ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

6 • 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 514.764.272



Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Борисенко, К. Д. Драч**

## О теореме сравнения углов для замкнутых кривых

*Отримано оцінки кута між радіусом-вектором із точки всередині замкненої регулярної кривої та її зовнішньою нормаллю в залежності від відстані від точки до кривої. Розглянуто випадки повного однозв'язного двовимірного многовиду сталої та несталої гауссової кривини.*

В работах [1–3] были даны оценки угла между радиусом-вектором и нормалью к гиперповерхности в пространстве Лобачевского и в многообразии Адамара при условии, что нормальная кривизна $k_n$ гиперповерхности в пространстве Лобачевского кривизны $-1$ удовлетворяет неравенству $k_n \geqslant 1$ или $k_n > \lambda$, $\lambda < 1$. Для полного односвязного риманового многообразия секционной кривизны $0 \geqslant K \geqslant -k_1^2$ аналогичная оценка дана для гиперповерхности, нормальная кривизна которой $k_n > \lambda$, $\lambda \leqslant k_1$. В этой работе выполнено условие $\lambda > k_1$.

Пусть $M^2$ — полное односвязное двумерное риманово многообразие, $\gamma$ — замкнутая вложенная кривая кривизны $k \geqslant k_0$. Кривая $\gamma$ ограничивает область, гомеоморфную кругу, $O$ — точка внутри этой области, $h$ — минимальное расстояние от точки $O$ до кривой. Для произвольной точки $P \in \gamma$ определим угол $\varphi$ — угол между внешней нормалью к кривой в точке $P$ и геодезической из точки $O$ в точку $P$, $0 \leqslant \varphi < \pi/2$.

Имеют место следующие оценки на угол $\varphi$.

**Теорема 1.** *Пусть $\gamma$ — регулярная класса $C^k$, $k \geqslant 2$, замкнутая вложенная кривая на плоскости постоянной гауссовой кривизны.*

*1. Если на евклидовой плоскости кривизна кривой удовлетворяет неравенству $k \geqslant k_0 > 0$, то*

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{2hk_0 - h^2k_0^2} \geqslant hk_0.$$

*2. Если в плоскости Лобачевского кривизны $K = -k_1^2$ кривизна кривой удовлетворяет неравенству $k \geqslant k_0 > k_1$, то*

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sh}^2((r-h)k_1)}{\operatorname{sh}^2(rk_1)}} \geqslant \frac{\operatorname{sh}(hk_1)}{\operatorname{sh}(rk_1)}, \tag{1}$$

*где* $r = (1/k_1)\operatorname{arccth}(k_0/k_1)$ *— радиус окружности кривизны* $k_0$ *на плоскости Лобачевского кривизны* $-k_1^2$.

*3. Если на сфере кривизны* $K = k_1^2$ *кривизна кривой* $\gamma$ *удовлетворяет неравенству* $k \geqslant k_0 \geqslant 0$, *то*

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{1 - \frac{\sin^2((r-h)k_1)}{\sin^2(rk_1)}} \geqslant \frac{\sin(hk_1)}{\sin(rk_1)}, \tag{2}$$

*где* $r = (1/k_1)\operatorname{arcctg}(k_0/k_1)$ *— радиус окружности кривизны* $k_0$ *на сфере кривизны* $k_1^2$.

Аналогичный результат имеет место, если объемлющее пространство является римановым многообразием непостоянной кривизны.

**Теорема 2.** *Пусть* $\gamma$ *— регулярная класса* $C^k$ *замкнутая вложенная кривая в полном односвязном двумерном римановом многообразии* $M^2$.

*1. Если гауссова кривизна многообразия* $M^2$ *удовлетворяет неравенству* $0 \geqslant K \geqslant -k_1^2$, $k_1 > 0$, *и кривизна кривой* $\gamma$ $k \geqslant k_0 > k_1$, *то выполняется неравенство* (1).

*2. Если гауссова кривизна многообразия* $M^2$ *удовлетворяет неравенству* $k_2^2 \geqslant K \geqslant k_1^2$, *кривая лежит в круге радиуса* $r = \pi/k_2$ *с центром в точке* $O$ *и кривизна кривой* $\gamma$ $k \geqslant k_0 \geqslant 0$, *то выполняется неравенство* (2).

Пусть точка $O$ — полюс полярной системы координат на римановом многообразии $M^2$, кривая $\gamma(s)$ принадлежит области регулярности этой системы координат, $s$ — параметр длины на кривой $\gamma$. Метрика $M^2$ имеет вид

$$d\sigma^2 = du^2 + g(u,v)dv^2;$$

$u = u(s)$, $v = v(s)$ — естественная параметризация кривой, $k(s)$, $\mu(s)$ — соответственно кривизны кривой $\gamma(s)$ и окружности радиуса $u(s)$ в точке $\gamma(s)$ с центром в точке $O$. Кривизны взяты относительно внутренних нормалей; $\varphi(s)$ — угол между внешней нормалью к кривой $\gamma$ в точке $\gamma(s)$ и радиальным направлением $(1,0)$ в точке $\gamma(s)$.

**Лемма 1** [2, 3].

$$k(s) = \cos\varphi\mu(s) - \frac{d\varphi}{ds}.$$

**Лемма 2** [4, 5]. *Пусть гауссова кривизна риманового многообразия* $M^2$ *удовлетворяет одному из следующих условий:*

*1)* $K \geqslant k_1^2$, $k_1 > 0$, *и окружность радиуса и принадлежит области регулярности полярной системы координат с полюсом в центре окружности;*

*2)* $0 \geqslant K \geqslant -k_1^2$, $k_1 \geqslant 0$.

*Тогда кривизна* $\mu(u,v)$ *окружности радиуса и удовлетворяет неравенству*

$$\mu(u,v) \leqslant \mu_0(u),$$

*где* $\mu_0(u)$ *— кривизна окружности радиуса и на плоскости постоянной кривизны соответственно:*

*1)* $k_1^2$;

*2)* $-k_1^2$.

Заметим, что на евклидовой плоскости $\mu_0(u) = 1/u$, на сфере кривизны $k_1^2$ $\mu_0(u) = k_1 \operatorname{ctg} k_1 u$, на плоскости Лобачевского кривизны $-k_1^2$ $\mu_0(u) = k_1 \operatorname{cth} k_1 u$.

**Лемма 3.** *Пусть* $M^2$ *— плоскость кривизны,* $\gamma$ *— окружность радиуса* $r$*,* $O$ *— точка внутри круга, ограниченного окружностью на расстоянии* $h$ *от окружности. Тогда угол* $\varphi$ *между геодезической из точки* $O$ *в точку окружности* $\gamma(s)$ *и внешней нормалью к окружности удовлетворяет неравенству:*

*1) в случае евклидовой плоскости*

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{\frac{2h}{r} - \frac{h^2}{r^2}} \geqslant \frac{h}{r};$$

*2) в случае сферы кривизны* $k_1^2$

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{1 - \frac{\sin^2((r-h)k_1)}{\sin^2(rk_1)}} \geqslant \frac{\sin hk_1}{\sin rk_1};$$

*3) в случае пространства Лобачевского кривизны* $-k_1^2$

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sh}^2(k_1(r-h))}{\operatorname{sh}^2(k_1 r)}} \geqslant \frac{\operatorname{sh} k_1 h}{\operatorname{sh} k_1 r}.$$

*Во всех случаях равенство достигается в направлении, перпендикулярном геодезической, соединяющей центр окружности с точкой* $O$*.*

**Доказательство теоремы 1.** Введем на плоскости постоянной кривизны полярную систему координат с полюсом в точке $O$. Тогда по лемме 1 кривизна кривой $\gamma$ удовлетворяет уравнению

$$k = \mu_0 \cos\varphi - \frac{d\varphi}{ds}.$$

Перейдем к заданию кривой параметром $u$ и перепишем это уравнение в виде

$$k = \mu_0(u)\cos\varphi - \sin\varphi \frac{d\varphi}{du}. \tag{3}$$

Возьмем на плоскости постоянной кривизны окружность $S$ кривизны $k_0$. Возьмем точку $O_1$ на расстоянии $h$ от этой окружности и полярную систему координат с полюсом в точке $O_1$. Здесь будем обозначать $\beta$ — угол между внешней нормалью к окружности и геодезической с точки $O_1$ до точки окружности $S$. По лемме 1

$$k_0 = \mu_0(u)\cos\beta - \sin\beta \frac{d\beta}{du}. \tag{4}$$

Вычтем из уравнения (3) уравнение (4) и воспользуемся условием теоремы $k \geqslant k_0$. Тогда мы получим

$$\mu_0(\cos\varphi - \cos\beta) - \sin\varphi\frac{d\varphi}{du} + \sin\beta\frac{d\beta}{du} = k - k_0 \geqslant 0. \tag{5}$$

Введем функцию $f(u) = \cos\varphi(u) - \cos\beta(u)$. Из (5) следует, что она удовлетворяет неравенству

$$f' + \mu_0 f \geqslant 0, \qquad f(h) = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим дугу кривой $\gamma$ от точки $Q_0$ такой, что $\mathrm{dist}(O, Q_0) = \mathrm{dist}(O, \gamma) = h$, до точки $Q_1$, на которой функция $u(s)$ возрастает. Будем проводить доказательство для случая 3. Оно самое сложное, в остальных случаях доказательство аналогично.

Если кривая $\gamma$ не является окружностью, а точка $O$ не является ее центром, то $h < \pi/(2k_1)$. Действительно, в силу условия теоремы $k \geqslant 0$ кривая $\gamma$ лежит в замкнутой полусфере. Отсюда и получаем ограничение на $h$. Покажем, что при $u$, близком к $h$, $f(u) \geqslant 0$ и не совпадает с нулем, если в окрестности $Q_0$ дуга кривой не является дугой окружности кривизны $k_0$. Действительно, если сколь угодно близко к $h$ найдется значение $u$ такое, что $f(u) < 0$, то найдется $u_0(s)$, близкое к $h$, при котором

$$f(u_0) < 0, \qquad f'(u_0) < 0. \tag{7}$$

Так как $\mu_0(u_0) > 0$, то неравенства (7) противоречат неравенству (6).

Возьмем близкое к $h$ значение $u_1$ такое, что $f(u_1) > 0$. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} &g' + \mu_0(u)g = 0,\\ &g(u_1) = f(u_1) > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

В случае *3* $\mu_0(u) = k_1 \operatorname{ctg} k_1 u$ и тогда решение (8)

$$g = \frac{f(u_1)\sin k_1 u_1}{\sin k_1 u}.$$

Сравним решение неравенства (6) и уравнения (8) с одним и тем же начальным условием. В точках, где $f - g < 0$,

$$(f - g)' \geqslant -\mu_0(f - g) > 0 \tag{9}$$

при $u_1 \leqslant u \leqslant \pi/(2k_1)$, так как в этом интервале $\mu_0(u) \geqslant 0$. Так как $f(u_1) - g(u_1) = 0$, то среди точек, в которых $f - g < 0$, найдется такая точка $u_2$, что $f(u_2) - g(u_2) < 0$, $f'(u_2) - g'(u_2) < 0$, что противоречит неравенству (9). Поэтому при $u_1 \leqslant u \leqslant \pi/(2k_1)$ $f \geqslant g > 0$.

При $u > \pi/(2k_1)$, $\mu_0(u) < 0$ $f(\pi/(2k_1)) - g(\pi/(2k_1)) \geqslant 0$. Поэтому из неравенства (9) следует, что $f' - g' \geqslant 0$. Поэтому при $u \geqslant \pi/(2k_1)$ на участке кривой $\gamma$, где $u = u(s)$ является монотонной возрастающей функцией, $f \geqslant 0$. Это значит, что $\cos\varphi(u) \geqslant \cos\beta(u)$. А оценка на $\cos\beta(u)$ дана в лемме 3. Отсюда мы и получим утверждение теоремы 1 для выбранной дуги. Кривая $\gamma$ является объединением таких дуг, которые отличаются только минимальными расстояниями $h_i$ от точки $O$ до выбранной дуги. Оценив угол $\varphi$ на каждом участке кривой, где функция $u = u(s)$ монотонна, мы получим оценку для замкнутой кривой.

Если $h_i > \pi/(2k_1)$, то $f(h_i) \geqslant 0$ и из неравенства (6) следует $f' > 0$ и $f > 0$ на этой дуге кривой.

**Доказательство теоремы 2.** В этом случае уравнение (3) перепишется в виде

$$k = \mu(u, v)\cos\varphi - \sin\varphi\frac{d\varphi}{du}. \tag{10}$$

Уравнение (4) не изменится. Вычтем из уравнения (10) уравнение (4):

$$\mu(u, v)\cos\varphi - \mu_0\cos\beta - \sin\varphi\frac{d\varphi}{du} + \sin\beta\frac{d\beta}{du} = k - k_0 \geqslant 0. \tag{11}$$

По лемме 2 $\mu(u,v) \leqslant \mu_0$. Тогда

$$\mu_0(\cos\varphi - \cos\beta) + \frac{d}{du}(\cos\varphi - \cos\beta) \geqslant k - k_0 \geqslant 0.$$

И это неравенство совпадает с неравенством (6). Минимальное расстояние $h$ до кривой $\gamma$ от точки $O$ меньше $\pi/(2k_1)$. Это следует из леммы 2 и неотрицательности кривизны кривой $\gamma$.

Если $h = \pi/(2k_1)$, то кривая $\gamma$ является окружностью с центром в точке $O$ и одновременно замкнутой геодезической. Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством теоремы 1.


1. *Borisenko A. A., Miquel V.* Total curvatures of convex hypersurfaces in hyperbolic space // Ill. J. Math. – 1999. – **43**, No 2. – P. 61–78.
2. *Borisenko A. A., Gallego E., Reventos A.* Relation between area and volume for $\lambda$-convex sets in Hadamard manifolds // Different. Geom. and Its Appl. – 2001. – **14**. – P. 267–280.
3. *Borisenko A. A.* Convex sets in Hadamard manifolds // Ibid. – 2002. – **17**. – P. 111–121.
4. Petersen *P.* Riemannian geometry. – Graduate texts in mathematics. Vol. 171. – New York: Springer, 1998. – 411 p.
5. Бураго *Ю. Д., Залгаллер В. А.* Введение в Риманову геометрию. – Ст.-Петербург: Наука, 1994. – 388 с.



*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*



*Поступило в редакцию 23.09.2010*



Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. A. Borisenko, K. D. Drach**


## About an angle comparison theorem for closed curves


*We estimate an angle between the radius vector from a point inside of the closed regular curve and its outer normal depending on the distance between the point and the curve. The cases of the complete connected two-dimensional manifold with constant and non-constant curvatures are considered.*