Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2011

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Е. С. Афанасьева

О граничном поведении кольцевых Q-гомеоморфизмов на римановых многообразиях

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Досліджено проблему неперервного або гомеоморфного продовження на межу так званих кільцевих Q-гомеоморфізмів між областями на ріманових многовидах. Знайдено умови на функцію $Q(x)$ та межі областей, при яких всякий кільцевий Q-гомеоморфізм допускає неперервне або гомеоморфне продовження на межу. Теорія може бути застосованою, зокрема, до класів Соболєва.

Риманом был определен способ введения метрики через положительно определенную (невырожденную) квадратичную форму, которая в дальнейшем получила название римановой метрики. Однако понятие “многообразие” было впервые четко введено позже Пуанкаре. В свою очередь, систематическое изучение гладких многообразий началось после 1912 г.

Параллельно этой теории длительное время развивалась и теория отображений в рамках конформных и квазиконформных отображений. Бельтрами, Каратеодори, Кристоффель, Гаусс, Риман и другие внесли свой вклад в развитие теории отображений. Отметим, что конформные отображения и их обобщения играют важную роль в развитии теории потенциала, математической физики, римановых поверхностей и топологии.

В работе [1] для квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое впоследствии легло в основу определения так называемых Q-гомеоморфизмов. В последние годы на плоскости и в пространстве активно изучается более широкий класс кольцевых Q-гомеоморфизмов (см., напр., [2–6]). Это понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу [7] и представляет собой обобщение и локализацию даного определения, которое впервые было введено и использовалось для изучения уравнений Бельтрами на плоскости в работе [5].

1. Предварительные замечания. Напомним некоторые определения, которые можно найти, напр., в [8–10].

n-мерное топологическое многообразие $\mathbb{M}^n$ — это хаусдорфово топологическое пространство со счетным базисом, в котором каждая точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$.

Картой на многообразии $\mathbb{M}^n$ называется пара (U, φ), где U — открытое подмножество пространства $\mathbb{M}^n$, а φ — гомеоморфизм подмножества U на открытое подмножество координатного пространства $\mathbb{R}^n$, каждой точке $p \in U$ ставится во взаимно однозначное соответствие набор из n чисел, ее *локальных координат. Дифференцируемое (гладкое) многообразие* — многообразие с картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, локальные координаты которых связаны дифференцируемым (гладким) образом.

Римановым многообразием $(\mathbb{M}^n, g)$ называется гладкое многообразие вместе с заданным на нем метрическим тензором g. *Римановой метрикой на многообразии* $(\mathbb{M}^n, g)$ называется положительно определенное (невырожденное) симметричное тензорное поле

$$g = g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

которое определяется только в координатных картах с правилом перехода

$$'g_{ij}(v) = g_{kl}(u(v)) \frac{\partial u^k}{\partial v^i} \frac{\partial u^l}{\partial v^j}. \tag{1}$$

Элемент длины на $(\mathbb{M}^n, g)$ задается инвариантной дифференциальной формой

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \tag{2}$$

где g_{ij} — метрический тензор, x^i — локальные координаты.

Напомним также, что *элемент объема* на $(\mathbb{M}^n, g)$ определяется инвариантой формой

$$dv = \sqrt{|\det g_{ij}|} dx^1 \cdots dx^n, \tag{3}$$

а *элемент площади* гладкой поверхности H на $(\mathbb{M}^n, g)$ определяется инвариантной формой

$$d\mathcal{A} = \sqrt{|\det g^*_{\alpha\beta}|} du_1 \cdots du_{n-1}, \tag{4}$$

где $g^*_{\alpha\beta}$ — риманова метрика на H, порожденная исходной римановой метрикой g_{ij} по формуле

$$g^*_{\alpha\beta}(u) = g_{ij}(x(u)) \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}.$$

Здесь $x(u)$ — гладкая параметризация поверхности H.

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — семейство кривых на n-мерном римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$. Измеримая по Борелю неотрицательная функция $\rho\colon \mathbb{M}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $n \geqslant 2$, называется *допустимой* для Γ, если условие

$$\int\limits_\gamma \rho ds \geqslant 1 \tag{5}$$

выполнено для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$, где в соответствии с формулой (2)

$$ds = \sqrt{g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt, \tag{6}$$

если $x(t)$ — гладкая параметризация кривой γ в локальных координатах.

Конформным модулем семейства кривых Γ называем величину

$$M(\Gamma) := \inf_{\rho\in \mathrm{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{M}^n} \rho^n dv, \tag{7}$$

где нижняя грань берется по всем допустимым для Γ функциям.

Пусть $(\mathbb{M}^n, g)$ — риманово многообразие, $n \geqslant 2$. Говорим, что функция $\varphi\colon \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание в точке* $x_0 \in \mathbb{M}^n$, сокр. $\varphi \in FMO(x_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, dv(x) < \infty \qquad \forall\, x_0 \in \mathbb{M}^n, \tag{8}$$

где

$$\overline{\varphi}_\varepsilon = \overline{\varphi}_{\varepsilon,x_0} = -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, dv(x) = \frac{1}{v(B(x_0,\varepsilon))} \int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, dv(x) \; - \tag{9}$$

среднее значение функции $\varphi(x)$ по геодезическому шару $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{M}^n \colon d(x, x_0) < \varepsilon\}$ относительно меры объема v. Напомним, что *геодезическое расстояние* $d(x, x_0)$ — инфимум длин кривых, соединяющих две точки x и x_0 (см. [10, с. 94]). Пишем также $\varphi \in FMO$, если $\varphi \in FMO(x_0)$ для всех $x_0 \in \mathbb{M}^n$.

Следующая концепция является естественным обобщением кольцевого определения квазиконформных отображений по Герингу (см. [7]).

Пусть D — область на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, D_* — область на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$ $(n \geqslant 2)$ и пусть $Q\colon D \to [0, \infty]$ — измеримая функция. В дальнейшем предполагаем, что приведенное ниже геодезическое кольцо является достаточно малым, таким, что оно попадает в нормальную окрестность соответствующей точки. Положим $A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in D\colon r_1 < d(x, x_0) < r_2\}$ — геодезическое кольцо, где d — геодезическое расстояние на $(\mathbb{M}^n, g)$. Далее $\Delta(E, F; D)$ обозначает семейство всех путей γ, соединяющих множества E и F в D. Будем говорить, что гомеоморфизм $f\colon D \to D_*$ называется *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{D}$, если

$$M(\Delta(f\mathrm{C}_0, f\mathrm{C}_1, D_*)) \leqslant \int\limits_{A\cap D} Q(x)\eta^n(d(x, x_0))\, dv(x) \tag{10}$$

выполняется для любого геодезического кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, любых двух континуумов (компактных связных множеств) $\mathrm{C}_0 \subset \overline{B(x_0, r_1)}$ и $\mathrm{C}_1 \subset \mathbb{M}^n \setminus B(x_0, r_2)$ и любой измеримой функции $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1$.

Будем также говорить, что f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в D, если (10) выполнено для всех точек $x_0 \in \overline{D}$.

Понятие кольцевого Q-гомеоморфизма было впервые введено в связи с исследованиями уравнений Бельтрами в [5] на плоскости и затем в [4] в пространстве.

2. Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов. Область D называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V \subseteq U$ точки x_0 такая, что $V \bigcap D$ связно. Заметим, что любая жордановая область D локально связна в любой своей граничной точке (см. [11, с. 66]).

Будем также говорить, что граница ∂D — *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant P \tag{11}$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V.

Будем говорить, что граница области D *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant \delta \tag{12}$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Граница ∂D называется *сильно достижимой* и *слабо плоской*, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы (см. [12]).

Теорема 1. *Пусть D и D_* — области на римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geqslant 2$, соответственно и пусть D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, а ∂D_* сильно достижима, $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны. Если $Q \in FMO(x_0)$, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D_*$ продолжим в точку x_0 по непрерывности на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.*

Теорема 2. *Пусть D — область на $(\mathbb{M}^n, g)$, локально связная на границе, D_* — область на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$ со слабо плоской границей, замыкания $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны и $Q \in L^1(D)$. Тогда обратный гомеоморфизм $g = f^{-1}\colon D_* \to D$ допускает (непрерывное) продолжение $\overline{g}\colon \overline{D_*} \to$ $\to \overline{D}$.*

Теорема 3. *Пусть D — область на $(\mathbb{M}^n, g)$, локально связная на границе, D_* — область на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$ со слабо плоской (сильно достижимой) границей, замыкания $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны и $Q \in L^1(D)$. Если Q принадлежит FMO, то любой кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D_*$ допускает гомеоморфное (непрерывное) продолжение $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

Теорема 4. *Пусть D — область на $(\mathbb{M}^n, g)$ с локально связной границей, D_* — область на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$ со слабо плоской (сильно достижимой) границей, замыкания $\overline{D}$ и $\overline{D_*}$ компактны, $Q \in \mathrm{L}^1(D)$ и где $0 < \varepsilon(x_0) < d_0 = \sup\limits_{x \in D} d(x, x_0)$.*

$$\int\limits_0^{\varepsilon(x_0)} \frac{dt}{\left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q(x)\, d\mathcal{A}\right)^{1/(n-1)}} = \infty \qquad \forall\, x_0 \in \partial D. \tag{13}$$

где функция Q определена на пересечении геодезических сфер $S_i = S(x_0, r_i)$ с областью D на многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ и $Q(x) \equiv 0$ вне D. Тогда каждый кольцевой Q-гомеоморфизм $f\colon D \to D_*$ допускает гомеоморфное (непрерывное) продолжение $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.

Здесь функция Q предполагается продолженной нулем вне области D.

3. Следствия для гомеоморфизмов класса Соболева. Говорим, что $f\colon \mathbb{M}^n \to \mathbb{M}^n_*$ является *ACL^n-отображением* или из *класса Соболева* $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M}^n)$, если для любых параметрических шаров $B = (B, \phi)$ на $(\mathbb{M}^n, g)$ и $B_* = (B_*, \psi)$ на $(\mathbb{M}^n_*, g_*)$ таких, что $f(B) \subset B_*$, $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ является ACL-отображением и частные производные от $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ локально L^n-интегрируемы на $\phi(B)$ (см., напр., [13]).

Функция f, определенная на параметрическом шаре $B = (B, \phi)$ риманового многообразия $(\mathbb{M}^n, g)$ с локальным параметром $\phi(p) = (x^1, \ldots, x^n)$ $(p \in B)$, является *абсолютно непрерывной на линиях (ACL)*, если $f \circ \phi^{-1}$, является ACL на $\phi(B)$. Более того, функция f, определенная на $(\mathbb{M}^n, g)$, является ACL, если ограничение $f|B$ является ACL для любого параметрического шара B на $(\mathbb{M}^n, g)$ (см., напр., [13]).

Развитая выше теория применима для гомеоморфизмов указанного класса с $K_I \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, так как такие гомеоморфизмы являются кольцевыми Q-гомеоморфизмами с $Q = K_I$, где K_I — внутренняя дилатация отображения f:

$$K_I(x, f) = \frac{J(x, f)}{l^n(x, f)}.$$

Здесь

$$J(x, f) = \lim_{r \to 0} \frac{v(f(B(x, r)))}{v(B(x, r))} \quad \text{п. в.}, \qquad l(x, f) = \liminf_{y \to x} \frac{d_*(f(x), f(y))}{d(x, y)}.$$

Теорема 5. *Пусть D — область на $(\mathbb{M}^n, g)$, D_* — область на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$ и пусть $f\colon D \to D_*$ гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D)$ с $f^{-1} \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(D_*)$. Если $K_I(x, f) \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, то f является кольцевым Q-гомеоморфизмом с $Q(x) = K_I(x, f)$.*

Таким образом, теоремы 1–4 имеют место, в частности, для гомеоморфизмов f класса Соболева $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ с локально суммируемой внутренней дилатацией.

1. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – **22**. – P. 1397–1420.
2. *Миклюков В. М.* Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. – Волгоград: Изд-во Волгогр. ун-та, 2005. – 273 с.
3. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
4. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. мат. журн. – 2007. – **48**, № 6. – С. 1361–1376.
5. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solution of Beltrami equation // J. d'Anal. Math. – 2005. – **96**. – P. 117–150.
6. *Смоловая Е. С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 5. – С. 682–689.
7. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353–393.
8. *Choquet-Bruhat Y., DeWitt-Morette C., Dillard-Bleick M.* Analysis, manifolds and physics. – Amsterdam: Elsevier, 1977. – 649 p.
9. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 384 с.
10. *Lee J. M.* Riemannian manifolds: an introduction to curvature. – New York: Springer, 1997. – 224 p.
11. *Wilder R. L.* Topology of manifolds. – New York: AMS, 1949. – 404 p.
12. *Ryazanov V., Salimov R.* Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory // Ukr. Math. Bull. – 2007. – **4**, No 2. – P. 199–234.
13. *Nakai M., Tanaka H.* Existence of quasiconformal mappings between Riemannian manifolds // Kodai Math. J. – 1982. – **5**. – P. 122–131.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 08.11.2010

E. S. Afanas'eva

About the boundary behavior of ring *Q*-homeomorphisms on Riemannian manifolds

The problem of continuous and homeomorphic extensions to the boundary of the so-called ring Q-homeomorphisms between domains on Riemannian manifolds is studied. A number of conditions on functions $Q(x)$ and boundaries of domains under which every ring Q-homeomorphism admits a continuous or homeomorphic extension to the boundary are found. The theory can be applied, in particular, to Sobolev's classes.