УДК 514.7(075.8)

А. И. Щерба

Устойчивость единичного шара пространства Минковского

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Досліджено стійкість одиничної кулі простору Мінковського у випадках, коли його власна площа або ширина його ізопериметрикса близькі до своїх найбільших можливих значень.

В n-мерном пространстве Минковского M^n, $n \geqslant 2$, нормирующее тело B принято называть единичным шаром, а его границу ∂B — единичной сферой. Через $\mathbb{R}^n$ обозначаем евклидово пространство, присоединенное к M^n, расстояние которого играет роль вспомогательной метрики [1, 2]. Целесообразно вспомогательную метрику выбрать так, чтобы $V_n(B)$ — евклидов n-мерный объем тела B равнялся объему n-мерного единичного шара в $\mathbb{R}^n$:

$$V_n(B) = \omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}.$$

Точки в M^n будем отождествлять с их радиусами-векторами, отложенными от зафиксированного начала координат o. Под записью $\|x\|$ понимаем длину вектора x в метрике пространства Минковского.

Изопериметриксом I пространства Минковского M^n называют центрально симметричное относительно o компактное выпуклое тело, опорная функция h_I которого задается на единичной сфере $\Omega = \{u \colon \langle u, u\rangle = 1\}$ в $\mathbb{R}^n$ формулой

$$h_I(u) = \omega_{n-1} V_{n-1}^{-1}(B \bigcap A_o(u)), \tag{1}$$

где V_{n-1} — евклидов $(n-1)$-мерный объем, $A_o(u)$ — проходящая через начало o гиперплоскость с нормалью u.

Хорошо известно, что изопериметрикс I пространства M^n зависит только от нормирующего тела B и не зависит от выбора посторонней метрики [1, с. 279; 3].

1. Рассмотрим устойчивость единичного шара B относительно ширины его изопериметрикса.

Пусть K — непустое компактное выпуклое тело из M^n. Шириной по Минковскому выпуклого тела K в M^n, отвечающей гиперплоскости H, называется величина [2, с. 106; 4]

$$\Delta_B(K, H) = \min\{\|x_1 - x_2\| \colon x_1 \in H_K^+,\ x_2 \in H_K^-\},$$

где H_K^+ и H_K^- — две опорные гиперплоскости для K, параллельные заданной $(n-1)$-мерной гиперплоскости H. Симметричность изопериметрикса: $I = -I$ обеспечивает выполнение равенства

$$\Delta_B(I, H) = 2\min\{\|x\| \colon x \in H_I\},$$

где H_I — одна из двух опорных для I гиперплоскостей. Рассматривая тело B расположенным в некотором присоединенном пространстве $\mathbb{R}^n$, укажем единичный вектор нормали u к опорной плоскости $H_I = H_I(u)$. Пусть $h_I(u)$ и $h_B(u)$ — опорные числа тел I и B, тогда можно записать $\Delta_B(I,H) = 2h_I(u)/h_B(u)$. Доказаны следующие теоремы устойчивости единичного шара пространства Минковского M^n в зависимости от ширины его изопериметрикса.

Теорема 1. *Если ширина изопериметрикса I на плоскости M^2, отвечающая прямой H, равна*

$$\Delta_B(I,H) = \frac{8}{\pi}(1-\varepsilon), \qquad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{1}{6},$$

то существует симметричный относительно начала o параллелограмм P со стороной, параллельной H, такой, что $P \subset B \subset (1+2\sqrt{\varepsilon})P$.

В случае размерности $n \geqslant 3$ пространства M^n имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Если*

$$\Delta_B(I,H) = 4(1-\varepsilon)\omega_{n-1}\omega_n^{-1}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 10^{-4n^3}, \tag{2}$$

то существует центрально симметричный относительно o цилиндр $C_n(D)$ с поперечным сечением D, параллельным H, и одномерными образующими такой, что

$$C_n(D) \subset B \subset C_n(D)(1+\varepsilon^{1/(2n^2)}). \tag{3}$$

Эти теоремы напрямую примыкают к результату В. И. Дисканта об оценке сверху ширины изопериметрикса $\Delta_B(I,H) \leqslant 4\omega_{n-1}\omega_n^{-1}$, где равенство возможно лишь в случае, когда B — цилиндр [4].

Приведем краткую схему **доказательства теоремы 2.** Через $A_t(u)$ обозначим гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, параллельную $A_0(u)$ и удаленную от нее на расстояние t в направлении вектора u. При $t<0$ плоскость $A_t(u)$ удаляется от $A_0(u)$ в направлении вектора $-u$. Пусть $B_t(u) = B \bigcap A_t(u)$. Центральная симметрия единичного шара $B=-B$ обеспечивает равенства $B_{-t}(u) = -B_t(u)$. Через u_0 обозначим единичный вектор нормали некоторой опорной к изопериметриксу I гиперплоскости $H_0 = H_I(u_0)$, а также $V_0 = V_{n-1}(B_0(u_0))$ и $h_0 = h_B(u_0)$.

Лемма 1. *Если ширина по Минковскому тела I в направлении вектора u_0 удовлетворяет равенству (2), то существует сечение единичного шара $B_t = B \bigcap A_t(u_0)$, удаленное от гиперплоскости $A_0(u_0)$ на расстояние*

$$T \geqslant t_0 = h_0\biggl(1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\biggr),$$

а для евклидового $(n-1)$-мерного объема которого выполнено соотношение

$$V_{n-1}(B_T) \geqslant V_0\biggl(1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\biggr)^{n-1}.$$

Доказательство леммы 1 проводится с помощью симметризации по Шварцу тела B относительно прямой $L(u_0)$, проходящей через o вдоль u_0.

Далее был использован метод В. И. Дисканта, предложенный им для исследования устойчивости в теории выпуклых тел [5, 6]. *Наибольшее из чисел γ, для которых тело*

γK_1 параллельным сдвигом помещается в K_0, называют коэффициентом вместимости тела K_1 в тело K_0 и обозначают $q = q(K_0, K_1)$.

Лемма 2. *Если $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 10^{-2}$, то коэффициент вместимости*

$$q(B_T; -B_T) \geqslant 1 - 5\varepsilon^{1/(2(n-1))}, \qquad n \geqslant 3.$$

Заметим, что в теле B_T имеется единственная точка x_0, для которой выполнено включение $x_0 + (B_{-T} + x_0)q(B_T; -B_T) \subset B_T$.

На гиперплоскости $A_o(u_0)$ строим центрально симметричное относительно начала o тело $D = (B_T - x_0) \bigcap (B_{-T} + x_0)$. Отметим, что

$$D \supset q(B_T; B_{-T})((B_T - x_0) \bigcup (B_{-T} + x_0)).$$

Через $C_n(D)$ обозначим цилиндр в $\mathbb{R}^n$, поперечные сечения которого совпадают с D, а 1-мерные образующие параллельные вектору x_o и ограничены гиперплоскостями $A_T(u_0)$ и $A_{-T}(u_0)$.

Построенный цилиндр находится в теле B и симметричен относительно начала o: $C_n(D) = -C_n(D)$. Оценивая снизу коэффициент вместимости $q(C_n(D), B)$ показываем, что

$$q_1 = q(C_n(D), B) \geqslant 1 - 10\varepsilon^{1/(2n(n-1))}, \qquad n \geqslant 3. \tag{4}$$

Следовательно, $q_1 B \subset C_n(D)$ и $B \subset (1/q_1)C_n(D)$, откуда сразу получаем оценку (3) из теоремы 2.

2. Рассмотрим теперь устойчивость единичного шара B в случае близости его собственной площади поверхности к наибольшему возможному значению. Следуя Г. Буземану [3], определим $(n-1)$-мерную площадь поверхности непустого компактного выпуклого тела K в M^n. Через $V_1(K, I)$ обозначаем соответствующий первый смешанный объем тел K и I, где

$$V_1(K, I) = V(\underbrace{K, K, \ldots, K}_{n-1}, I).$$

Здесь используем общепринятые обозначения [7; 8, с. 113]. Площадью по Минковскому поверхности тела K называется величина $O_B(K) = nV_1(K, I)$.

Под собственной площадью поверхности единичного шара B понимаем

$$O(B) = O_B(B) = nV_1(B, I). \tag{5}$$

В плоском случае для $n = 2$ величина $O(B)$ задает собственный периметр единичного круга на M^2. Еще в 1932 г. С. Голаб [9] установил для него достижимые оценки: $6 \leqslant O(B) \leqslant 8$. В 1956 г. Г. Буземан и К. Петти в работе [10] получили следующий результат.

Теорема А. *Если B — единичный шар в n-мерном пространстве Минковского M^n, то $O(B) \leqslant 2n\omega_{n-1}$, причем равенство возможно лишь в случае, когда B — параллелепипед.*

Сформулируем соответствующие теоремы устойчивости.

Теорема 3. *Пусть собственный периметр единичного круга B на плоскости Минковского M^2 равен $O(B) = 8(1 - \varepsilon)$, где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1/25$. Тогда существует центрально симметричный относительно начала o параллелограмм P, для которого выполняются включения*

$$P \subset B \subset (1 + 18\varepsilon)P.$$

Теорема 4. *Пусть собственная площадь $O(B)$ единичной сферы ∂B в пространстве Минковского M^n, $n \geqslant 3$, равна величине $O(B) = 2n\omega_{n-1}(1-\varepsilon)$. Тогда существует положительная константа ε_0, зависящая только от размерности n, и центрально симметричный относительно начала о параллелепипед P, для которых выполняются включения*

$$P \subset B \subset (1+\varepsilon^\delta)P, \tag{6}$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и показатель степени $\delta = 2^{-n}(n!)^{-2}$.

Основные результаты работы можно формулировать в терминах метрики $\|x\|$ пространства Минковского M^n. Так, например, теорема 4 звучит следующим образом: *если собственная площадь единичной сферы равна $O(B) = 2n\omega_{n-1}(1-\varepsilon)$, где ε — достаточно малое неотрицательное число, то в шаровом слое $(1+\varepsilon^\delta)^{-1} \leqslant \|x\| \leqslant 1$ пространства M^n, $n \geqslant 3$, можно разместить поверхность некоторого симметричного относительно начала о параллелепипеда P.* Причем для площади поверхности P выполняются неравенства $(1+\varepsilon^\delta)^{1-n}O(B) \leqslant O_B(P) \leqslant O(B)$, что сразу следует из определения площади поверхности и свойства монотонности смешанного объема.

Ограничимся здесь только **доказательством теоремы 4**. Оно основывается на идее Буземана–Петти (см. теорему 7.4.1. [2]) и на свойствах поверхностной функции $F(B,\omega)$ выпуклого тела B, введенной А. Д. Александровым [11, с. 39]. Исследуя возможность равенства $O(B) = 2n\omega_{n-1}$, Г. Буземан и К. Петти использовали тот факт, что тело B, как цилиндрическое тело, обладает n линейно независимыми одномерными образующими. При изучении устойчивости в этом равенстве мы вынуждены рассматривать каждое такое направление в отдельности. Само доказательство проводится индукцией по размерности m пространства M^m, $n \geqslant m \geqslant 2$, через построение в пространстве Минковского цилиндра, аппроксимирующего единичный шар с заданной точностью.

Запишем по А. Д. Александрову первый смешанный объем из определения (5) через интеграл Стилтьеса–Радона от непрерывной опорной функции $h_I(u)$ изопериметрикса I на единичной сфере

$$O(B) = \int\limits_\Omega h_I(u)F(B,d\omega).$$

Так как начало o — внутренняя точка для B, то $h_B(u) > 0$, а отношение опорных $h_I(u)/h_B(u)$ — непрерывная функция на Ω. В силу первой теоремы о среднем для интеграла, на Ω есть вектор u_0 такой, что

$$O(B) = \int\limits_\Omega \frac{h_I(u)}{h_B(u)} h_B(u)F(B,d\omega) = \frac{h_I(u_0)}{h_B(u_0)} \int\limits_\Omega h_B(u)F(B,d\omega) = \frac{h_I(u_0)}{h_B(u_0)} nV_n(B).$$

Опорная плоскость $H_0 = H_I(u_0)$ к телу I задается опорным числом $h_I(u_0)$. По условию теоремы 4 площадь $O(B) = 2n\omega_{n-1}(1-\varepsilon)$, значит, ширина $\Delta_B(I,H_0) = 2h_I(u_0)/h_B(u_0) = 4(1-\varepsilon)\omega_{n-1}\omega_n^{-1}$.

Тогда из теоремы 2 следует, что в M^n существует цилиндр с поперечным сечением, перпендикулярным вектору u_0, для которого выполнено соотношение (3).

Далее проведем исследование поперечного сечения D цилиндра $C_n(D)$. Покажем, что тело D по аналогии с формулой (3) может быть аппроксимировано некоторым "$(n-1)$-мерным" цилиндром $C_{n-1} = C_{n-1}(D_{n-2})$ с поперечным сечением D_{n-2}. Не умаляя общности рассуждений, считаем образующие цилиндра $C_n(D)$ перпендикулярными поперечному сечению D. Последнее основывается на аффинной инвариантности определения собственной площади поверхности $O(B)$ и на свободе выбора посторонней метрики в M^n.

Используя соотношения (1) и (4), оценим снизу собственную площадь поверхности цилиндра $C_n(D)$:

$$O(B) \leqslant O_B\left(\frac{1}{q_1}C_n\right) = \int\limits_{\Omega} \frac{\omega_{n-1}}{V_{n-1}(B\bigcap A_0(u))}F\left(\frac{1}{q_1}C_n, d\omega\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{q_1^{n-1}}\int\limits_{\Omega} \frac{\omega_{n-1}}{V_{n-1}(C_n\bigcap A_0(u))}F(C_n, d\omega) = \frac{1}{q_1^{n-1}}O_{C_n}(C_n(D)).$$

Учитывая условия, наложенные на $O(B)$ в теореме 4, имеем

$$O_{C_n}(C_n(D)) \geqslant q_1^{1-n}(1-\varepsilon)2n\omega_{n-1} \geqslant 2n\omega_{n-1}(1-20n\varepsilon^{1/(2n(n-1))}). \tag{7}$$

Поверхность цилиндра $C_n(D)$ составлена из двух оснований $D_T \subset B_T$ и $D_{-T} \subset B_{-T}$, равных D, и боковой поверхности C'_n, значит,

$$O_{C_n}(C_n) = 2O_{C_n}(D) + O_{C_n}(C'_n) = 2\omega_{n-1} + O_{C_n}(C'_n). \tag{8}$$

Обозначим через Ω' пересечение единичной сферы Ω с $(n-1)$-мерной гиперплоскостью R^{n-1}, соответствующей $A_0(u_0)$. Обратим внимание на следующие равенства:

$$\begin{cases} V_{n-1}(C_n\bigcap A_0(w)) = 2h_0V_{n-2}(D\bigcap A_0(w)), \qquad w\in\Omega'; \\ F_{n-1}(C'_n, d\omega) = 2h_0F_{n-2}(D, d'\omega), \qquad \text{где} \quad d'\omega \text{ — ограничение} \quad d\omega \quad \text{на} \quad \Omega'. \end{cases}$$

Таким образом,

$$O_{C_n}(C'_n) = \int\limits_{\Omega} \frac{\omega_{n-1}}{V_{n-1}(C_n\bigcap A_0(w))}F_{n-1}(C'_n, d\omega) = \int\limits_{\Omega'} \frac{\omega_{n-1}}{V_{n-2}(D\bigcap A_0(w))}F_{n-2}(D, d'\omega) =$$

$$= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}}O_D(D).$$

Наложив условие достаточной малости величины ε, учитывая (7) и (8), запишем

$$O_D(D) \geqslant 2(n-1)\omega_{n-2}(1-\varepsilon_1), \qquad \text{где} \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon^{1/(2n^2)}.$$

Беря исходно в условиях теоремы 2 вместо B тело D, расположенное в присоединенном к $A_0(u_0)$ пространстве R^{n-1}, строим центрально симметричный цилиндр $C_{n-1} = C_{n-1}(D_{n-2})$ с поперечным сечением $D_{n-2} \subset R^{n-2}$, удовлетворяющий включениям аналогичным, (3):

$$C_{n-1}(D_{n-2}) \subset D \subset (1+\varepsilon_1^{1/(2(n-1)^2)})C_{n-1}(D_{n-2}).$$

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ цилиндр $C_n(C_{n-1}(D_{n-2}))$, поперечные сечения которого совпадают с “$(n-1)$-мерным” цилиндром $C_{n-1}(D_{n-2})$, а одномерные образующие параллельны вектору u_0 и ограничены гиперплоскостями $A_T(u_0)$ и $A_{-T}(u_0)$. Он обладает характерным свойством

$$C_n(C_{n-1}(D_{n-2})) \subset B \subset (1+\varepsilon^{1/(2n^2)})(1+\varepsilon^{1/(2^2n^2(n-1)^2)})C_n(C_{n-1}(D_{n-2})). \tag{9}$$

Выполним рекуррентно $(n-1)$ раз указанные выше построения, соответствующие переходу к формуле (9). Цилиндр C_2 на плоскости M^2 есть параллелограмм. В результате получим параллелепипед

$$P = C_n(C_{n-1}(\ldots(C_3(C_2))\ldots)),$$

который и аппроксимирует исходное нормирующее тело B указанным в (6) образом.

Автор выражает искреннюю благодарность В. И. Дисканту за полезное обсуждение рассматриваемой задачи.

1. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. – Москва: Наука, 1985. – 336 с.
2. *Thompson A. C.* Minkowski geometry. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. – 346 p.
3. *Busemann H.* Intrinsic area // Ann. Math. – 1947. – **48**. – P. 234–267.
4. *Diskant V. I.* Estimates for diameter and width for the isoperimetrix in Minkowski geometry // J. Math. Phys., Anal., Geom. – 2006. – **2**, No 4. – P. 388–395.
5. *Дискант В. И.* Уточнение изопериметрического неравенства и теоремы устойчивости в теории выпуклых тел // Тр. Ин-та мат. СО АН СССР. – 1989. – **14**. – С. 98–132.
6. *Дискант В. И.* Устойчивость решений уравнений Минковского и Брунна // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1999. – **6**, № 3/4. – С. 245–252.
7. *Minkowski H.* Volume und Oberfläche // Ann. Math. – 1903. – **75**. – S. 447–495.
8. *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. – Москва: ФАЗИС, 2002. – 210 с.
9. *Golab S.* Quelques problemes metriques de la geometrie de Minkowski // Trav. l'Acad. Mines Cracovie. – 1932. – **6**. – P. 1–79.
10. *Busemann H., Petty C. M.* Problems on convex bodies // Math. Scand. – 1956. – **4**. – P. 88–94.
11. *Александров А. Д.* Геометрия и приложения: Избр. тр. Т. 1. – Новосибирск: Наука, 2006. – 748 с.

*Черкасский государственный
технологический университет*

Поступило в редакцию 19.11.2010

A. I. Shcherba

Stability of a unit ball in the Minkowski space

Stability of a unit ball in the Minkowski space is studied in cases where its own area and width of its isoperimetrix are close to the most possible values.