УДК 519.21,519.217,519.718

І. В. Малик

Експоненціальна поведінка розв'язку диференціально-різницевого рівняння з напівмарковськими збуреннями

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Розглянуто експоненціальну поведінку розв'язку диференціально-різницевого рівняння з напівмарковсъкими збуреннями. Одержано необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості у середньому квадратичному тривіального розв'язку.

У даній роботі досліджуються диференціально-різницеві рівняння з напівмарковськими збуреннями (СДРРНЗ) в $\mathbb{R}^1$. Рівняння, що містять випадкові збурення коефіцієнтів системи, вивчалися багатьма дослідниками. Особливу увагу треба звернути на роботи Х. Мао, В. С. Королюка, Є. Ф. Царкова, Р. З. Хасьмінського, Дж. Хейла, Л. Ю. Шайхета, В. К. Ясинського та ін. [1–8]. Робота [9] присвячена випадку, коли зовнішнє збурення є дискретним ланцюгом Маркова. Мета даної роботи — доведення необхідних та достатніх умов експоненціальної стійкості в середньому квадратичному ($l.i.m$) СДРРНЗ у випадку, коли зовнішнє збурення є однорідним у часі напівмарковським процесом (НМП).

На ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \Im, P)$ [10], де $\Im \equiv \{F_t, t \geqslant 0\}$ — потік σ-алгебр, задано випадковий процес $x(t) := x(t, \omega)$, який є сильним розв'язком стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу, що містить напівмарковські збурення (СДРРНЗ)

$$dD^r x_t = L^r x_t dt + G^r x_t dW(t) \tag{1}$$

та задовольняє невипадкову початкову умову

$$x_0 = \varphi, \tag{2}$$

причому $W(t) := W(t, \omega)$, $t \geqslant 0$, — одновимірний вінерів процес; $r(t)$, $t \geqslant 0$, — однорідний у часі НМП [3, 8], що набуває значень з множини $X = \{1, 2, \ldots, N\}$ та не залежить від $W(t)$. Згідно з [3, 8], НМП задається процесом марковського відновлення (ПМВ)

$$\{r_n, \tau_n\}, \qquad n \geqslant 0,$$

тобто

$$r(t) := r_{\nu(t)}, \tag{3}$$

$\nu(t) := \max\limits_{n \geqslant 0}(\tau_n < t)$ — рахуючий процес; D^r, L^r, G^r — різницеві оператори [6], що залежать від НМП $r(t)$, $t \geqslant 0$, та задаються співвідношеннями

$$D^r x_t = \sum_{i=0}^{n} \delta_i(r(t)) x(t - \tau_i), \qquad L^r x_t = \sum_{i=0}^{n} l_i(r(t)) x(t - \tau_i),$$

$$G^r x_t = \sum_{i=0}^{n} g_i(r(t))x(t-\tau_i),$$

де

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = h < \infty.$$

Для спрощення введемо позначення

$$\delta_j^i = \delta_j(r(t) = i), \qquad l_j^i = l_j(r(t) = i), \qquad g_j^i = g_j(r(t) = i).$$

Існування та єдиність в $l.i.m.$ сильного розв'язку задачі (1), (2) доведені у роботі [8].

Означення 1. Стан i для НМП $r(t)$, $t \geqslant 0$, назвемо експоненціально стійким, якщо розв'язок СДРРНЗ (1) при $r(t) \equiv i$ задовольняє нерівність

$$Ex^2(t) \leqslant Me^{-kt},$$

де $M > 0$, $k > 0$.

Означення 2 [11]. Характеристичним показником (ХП) для функції $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ назвемо число (або символ $+\infty$, $-\infty$) λ, що визначається з рівності

$$\lambda\colon = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|f(t)|}{t}.$$

Для фінітної функції будемо вважати, що $\lambda = -\infty$.

Означення 3 [3, 8]. НМП $r(t)$, $t \geqslant 0$, називається ергодичним, якщо:

1) вкладений ланцюг Маркова (ВЛМ) $\{r_n\}_{n\geqslant 0}$ є ергодичним зі стаціонарним розподілом $\{\rho_i\}_{i\in X}$;

2) математичне сподівання часу перебування в кожному стані скінченне, тобто

$$m_i := \int_0^\infty t dF_i(t) < \infty, \qquad i \in X,$$

де $F_i(t) = P\{\tau_1 < t \mid r_0 = i\}$ — умовна функція розподілу часу перебування в стані i.

Лема 1 [3, 12]. *Нехай ВЛМ $\{r_n\}_{n\geqslant 0}$ є ергодичним та виконуються такі умови:*

1) математичне сподівання часу перебування в кожному стані скінченне:

$$m_i := \int_0^\infty t dF_i(t) \leqslant C < \infty;$$

2) середній час перебування в станах ненульовий:

$$M := \sum_{i\in X} \rho_i m_i > 0. \tag{4}$$

Тоді існує стаціонарний розподіл НМП $r(t)$, $t \geqslant 0$:

$$\pi_i = \lim_{t\to\infty} P\{r(t) = i \mid r(0) = j\} = \frac{\rho_i m_i}{M}. \tag{5}$$

Сформулюємо основний результат роботи:

Теорема 1. *Нехай виконуються такі умови:*

1) НМП $r(t)$, $t \geqslant 0$, є ергодичним зі стаціонарним розподілом $\{\pi_j\}_{j \in X}$, що визначений (5)*;*

2) λ_i — ХП для рівняння (1) *при $r(t) \equiv i$.*

Тоді необхідною та достатньою умовою експоненціальної стійкості в l.i.m. тривіального розв'язку СДРРНЗ (1) *є умова*

$$\Lambda := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \pi_i < 0. \tag{6}$$

Доведення. Позначимо через $x(t;i)$ розв'язок рівняння (1) при $r(t) \equiv i$. Зобразимо $x(t;i)$ таким чином:

$$x(t;i) = z(t;i) e^{\lambda_i t}. \tag{7}$$

Згідно з [4] та умовами теореми $\forall\, i \in X$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln Ez^2(t;i)}{t} = 0.$$

На основі попередньої рівності $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, T := T(\varepsilon)$: $\forall\, t > T$ має місце співвідношення

$$k_i e^{(\lambda_i - \varepsilon)t} \leqslant Ex^2(t;i) \leqslant K_i e^{(\lambda_i + \varepsilon)t}.$$

Розглянемо функції

$$l(t) := k e^{\sum\limits_{i=1}^{N} I_{\{r(t)=i\}}(\lambda_i - \varepsilon)t}, \qquad L(t) := K e^{\sum\limits_{i=1}^{N} I_{\{r(t)=i\}}(\lambda_i + \varepsilon)t},$$

де

$$k = \min_{i \in X} k_i, \qquad K = \max_{i \in X} K_i.$$

За умов існування стаціонарного розподілу для НМП $r(t)$, $t \geqslant 0$, при $t \to \infty$ маємо співвідношення

$$l(t) := k e^{\sum\limits_{i=1}^{N} \pi_i(\lambda_i - \varepsilon)t}, \qquad L(t) := K e^{\sum\limits_{i=1}^{N} \pi_i(\lambda_i + \varepsilon)t}.$$

Тобто для великих t за умов існування стаціонарного розподілу отримаємо

$$(t) \leqslant Ex^2(t) \leqslant L(t). \tag{8}$$

Достатність. Нехай виконується (6), тобто $\Lambda < 0$. Тоді

$$0 \leqslant \lim_{t\to\infty} Ex^2(t) \leqslant \lim_{t\to\infty} K e^{(\Lambda+\varepsilon)t} = 0.$$

Необхідність. Нехай тривіальний розв'язок рівняння (1) експоненціально стійкий. Тоді з нерівності (8) отримаємо

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln l(t)}{t} \leqslant \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln Ex^2(t)}{t} < 0.$$

Але $\ln(l(t)/t) = \Lambda - \varepsilon$, тому на підставі довільності $\varepsilon > 0$ маємо, що $\Lambda < 0$, тобто виконується (6). Теорема 1 доведена.

Означення 4. Розв'язок рівняння (1) назвемо експоненціально нестійким, якщо існують константи $M > 0$, $k > 0$ такі, що для $\forall t \geqslant 0$

$$Ex^2(t) \geqslant Me^{kt}.$$

Позначимо через $L_{ns} \subseteq X$ множину нестійких станів НМП.

Наслідок 1. *Для того щоб тривіальний розв'язок рівняння* (1) *був нестійким, достатньо, щоб*

$$\sum_{i \in L_{ns}} \pi_i = 1. \tag{9}$$

Доведення. Нехай виконується (9), тоді

$$\Lambda := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \pi_i = \sum_{i \in L_{ns}} \lambda_i \pi_i > 0,$$

що і доводить наслідок 1.

Наслідок 2. *Нехай*

$$P\{L_{sn}\} = p < 1$$

та i_0 *— асимптотично стійкий стан такий, що* $\pi_{i_0} > 0$. *Тоді тривіальний розв'язок рівняння* (1) *буде асимптотично стійким при*

$$\lambda_{i_0} < \frac{-\sum\limits_{i \in L_{ns}} \lambda_i \pi_i}{\pi_{i_0}}.$$

Доведення. Оцінимо ХП Λ:

$$\Lambda := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \pi_i \leqslant \sum_{i \in L_{ns}} \lambda_i \pi_i + \lambda_{i_0} \pi_{i_0} < 0.$$

Тобто

$$\lambda_{i_0} < \frac{-\sum\limits_{i \in L_{ns}} \lambda_i \pi_i}{\pi_{i_0}},$$

що і потрібно було довести.

Нехай умова *1* теореми 1 не виконується. Це означає, що рівняння (1) може перетворюватися в рівняння випереджаючого типу. Тоді має місце

Лема 2. *Для того щоб тривіальний розв'язок СДРРНЗ* (1) *був нестійким в l.i.m., достатньо, щоб існував стан* i_0, *для якого* $\pi_{i_0} > 0$ *та при* $r = i_0$ *СДРРНЗ вироджувався в рівняння випереджаючого типу [13].*

Доведення. Для стану i_0 згідно з [6, 13]

$$\lambda_{i_0} = +\infty.$$

Тому

$$\Lambda = +\infty.$$

Лема 2 доведена.

Таким чином, у роботі доведено необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості в $l.i.m.$ тривіального розв'язку стохастичного диференціально-різницевого рівняння з напівмарковськими збуреннями (1), сформульовано низку тверджень, що стосуються нестійкості в $l.i.m.$ розв'язку рівняння (1), знайдено достатні умови нестійкості рівнянь змішаного типу (лема 2).

Автор висловлює щиру вдячність за увагу до даної роботи та цінні поради проф. В. К. Ясинському та акад. НАН України В. С. Королюку.

1. *Kolmanovskia V., Koroleva N., Maizenberg T. et al.* Neutral stochastic differential delay equations with Markovian switching // Stochast. Anal. and Appl. – 2003. – **21**, Is. 4. – P. 819–847.
2. *Mao X.* Stability of stochastic differential equations with Markovian switching // Stochast. Process. and Appl. – 2002. – **79**, No 1. – P. 45–67.
3. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – Singapore: World Scientific Publishers, 2005. – 348 p.
4. *Царков Є. Ф., Малик І. В.* Асимптотична поведінка розв'язку лінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Доп. НАН України. – 2008. – № 7. – С. 52–57.
5. *Хасминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайном возмущении их параметров. – Москва: Наука, 1969. – 367 с.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1984. – 421 с.
7. *Mao X., Shaikhet L.* Delay-dependent stability criteria for stochastic diferential delay equations with Markovian switching // Stability and Control: Theory and Application. – 2000. – **3**, No 2. – P. 88–102.
8. *Королюк В. С., Царков Є. Ф., Ясинський В. К.* Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3 т. Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. – Чернівці: Золоті литаври, 2009. – 798 с.
9. *Кольба Г. Й., Малик І. В.* Диференціально-різницеві рівняння нейтрального типу з марковськими збуреннями // Наук. вісн. Чернівецьк. ун-ту: Зб. наук. праць. – 2010. – Вип. 501. – С. 52–60.
10. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2 т. – Москва: Физматлит, 1994. – Т. 2. – 473 с.
11. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.
12. *Портенко Н. И., Скороход А. В., Шуренков В. М.* Марковские процессы. – Киев: ВИНИТИ, 1989. – 248 с.
13. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения – Москва: Мир, 1967. – 545 с.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 18.05.2011

И. В. Малык

Экспоненциальное поведение решения дифференциально-разностного уравнения с полумарковскими возмущениями

Рассмотрено экспоненциальное поведение решения дифференциально-разностного уравнения с полумарковскими возмущениями. Получены необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения.

I. V. Malyk

Exponential behavior of the solution of a differential-difference equation with semi-Markov perturbations

The exponential behavior of the solution of a differential-difference equation with semi-Markov perturbations is considered. The necessary and sufficient conditions for the exponential stability in mean square of a trivial solution are obtained.