Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

3 • 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9+531.19+530.145

І. В. Гап'як, В. І. Герасименко

Узагальнене кінетичне рівняння Енскога

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

На основі кінетичних кластерних розкладів кумулянтів груп операторів системи пружних куль обгрунтовано нелінійне кінетичне рівняння Енскога та його узагальнення. Для початкових станів, які визначаються одночастинковою інтегровною функцією розподілу, встановлено еквівалентність задач Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ та узагальненого кінетичного рівняння Енскога.

Загальновідомими є результати, отримані в останні десятиріччя при дослідженні нелінійного кінетичного рівняння Больцмана [1, 2]. Разом з тим аналогічні дослідження кінетичного рівняння Енскога [3, 4], яке є узагальненням рівняння Больцмана для щільних середовищ, стримуються головним чином апріорі сформульованою структурою інтеграла зіткнень цього нелінійного рівняння [5–7], тобто відкритою залишається проблема математичного обгрунтування виводу рівняння Енскога з динаміки системи нескінченного числа пружних куль.

Мета цього повідомлення полягає в математичному описі еволюції стану системи пружних куль у термінах одночастинкової функції розподілу. На основі сформульованих кластерних розкладів кумулянтів груп операторів системи пружних куль для початкових станів, які визначаються одночастинковою функцією розподілу, в просторі послідовностей інтегрованих функцій доведено еквівалентність початкової задачі для ієрархії ББГКІ і початкової задачі для узагальненого кінетичного рівняння Енскога та послідовності явно визначених функціоналів від розв'язку такого рівняння. Таким чином, встановлено, що всі можливі стани нескінченної системи пружних куль у довільний момент часу можуть бути описані без будь-якої апроксимації на основі сформульованого узагальненого рівняння Енскога одночастинковою функцією розподілу.

Розглянемо систему однакових частинок одиничної маси, які взаємодіють як пружні кулі з діаметром $\sigma > 0$. Кожна частинка системи характеризується фазовими координатами $(q_i, p_i) \equiv x_i \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $i \geqslant 1$. Для конфігурацій такої системи частинок виконуються умови:

$|q_i - q_j| \geqslant \sigma$, $i \neq j \geqslant 1$, тобто множина $W_n \equiv \{(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^{3n} \mid |q_i - q_j| < \sigma$ хоча б для однієї пари $(i, j)\colon i \neq j \in (1, \ldots, n)\}$ є множиною заборонених конфігурацій.

Початковий стан системи нефіксованого числа пружних куль (нерівноважний великий канонічний ансамбль [1]) описується послідовністю $F(0) = (F_1(0, x_1), \ldots, F_s(0, x_1, \ldots, x_s), \ldots)$ s-частинкових (маргінальних) функцій розподілу визначених на фазовому просторі відповідного числа частинок, які є симетричними відносно перестановки аргументів $x_1, \ldots, x_s$ і дорівнюють нулю на множині W_s. Надалі розглядаються початкові дані, які визначаються одночастинковою функцією розподілу і задовольняють умову хаосу [1]

$$F(t)|_{t=0} = F^0 \equiv \left(F_1^0(x_1), \ldots, \prod_{i=1}^{s} F_1^0(x_i)\mathcal{X}_s, \ldots\right), \tag{1}$$

де $\mathcal{X}_s \equiv \mathcal{X}_s(q_1, \ldots, q_s)$ — характеристична функція дозволених конфігурацій $\mathbb{R}^{3s} \setminus W_s$ системи s пружних куль. Еволюція всіх можливих станів системи нефіксованого числа пружних куль описується послідовністю $F(t) = (F_1(t, x_1), \ldots, F_s(t, x_1, \ldots, x_s), \ldots)$ маргінальних функцій розподілу, які задовольняють задачу Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ

$$\frac{\partial}{\partial t} F_s(t) = \mathcal{L}_s^* F_s(t) + \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} dx_{s+1} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}^*(i, s+1) F_{s+1}(t), \tag{2}$$

$$F(t)_{|t=0} = F^0. \tag{3}$$

У рівнянні (2) оператор Ліувілля $\mathcal{L}_s^*$ визначено дужками Пуассона невзаємодіючих частинок з граничними умовами на границі заборонених конфігурацій ∂W_s [1]

$$\mathcal{L}_s^* F_s(t) \doteq -\sum_{i=1}^{s} \left\langle p_i, \frac{\partial}{\partial q_i} \right\rangle_{|\partial W_s} F_s(t, x_1, \ldots, x_s)$$

та оператор $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}^*(i, s+1)$ при $t > 0$ визначається таким виразом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{int}}^*(i, s+1) F_{s+1}(t) &\doteq \sigma^2 \int\limits_{\mathbb{S}_+^2} d\eta \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle (\delta(q_i - q_{s+1} - \sigma\eta) \times \\ &\times F_{s+1}(t, x_1, \ldots, q_i, p_i^*, \ldots, x_s, q_{s+1}, p_{s+1}^*) - \\ &- \delta(q_i - q_{s+1} + \sigma\eta) F_{s+1}(t, x_1, \ldots, x_s, q_{s+1}, p_{s+1})), \end{aligned} \tag{4}$$

де $\langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle \doteq \sum\limits_{\alpha=1}^{3} \eta^\alpha (p_i^\alpha - p_{s+1}^\alpha)$ — скалярний добуток, δ — міра Дірака, $\mathbb{S}_+^2 \doteq \{\eta \in \in \mathbb{R}^3 \mid |\eta| = 1, \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle > 0\}$ та імпульси p_i^*, p_{s+1}^* частинок визначаються виразами

$$\begin{aligned} p_i^* &\doteq p_i - \eta \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle, \\ p_{s+1}^* &\doteq p_{s+1} + \eta \langle \eta, (p_i - p_{s+1}) \rangle. \end{aligned}$$

У випадку $t < 0$ оператор $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}^*(i, s+1)$ визначається відповідним виразом [1].

Наведемо деякі означення, необхідні для строгого визначення розв'язку задачі Коші (2), (3). Нехай $L^1(\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n})$ — простір функцій f_s визначених на фазовому просторі s

частинок, які є симетричними відносно перестановки аргументів $x_1, \ldots, x_s$, дорівнюють нулю на множині заборонених конфігурацій W_s, з нормою $\|f_s\| = \int dx_1 \cdots dx_s |f_s(x_1, \ldots, x_s)|$. Підпростору $L^1_0(\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}) \subset L^1(\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n})$ належать неперервно диференційовані функції з компактними носіями. У просторі $L^1(\mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n})$ визначена така група сильно неперервних операторів:

$$S_n(t, 1, \ldots, n) f_n(x_1, \ldots, x_n) \doteq$$
$$\doteq \begin{cases} f_n(\mathtt{X}_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathtt{X}_n(t, x_1, \ldots, x_n)), & (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{3n} \times (\mathbb{R}^{3n} \setminus W_n)) \setminus \mathcal{M}^0_n, \\ 0, \quad (q_1, \ldots, q_n) \in W_n, \end{cases} \tag{5}$$

де $\mathtt{X}_i(t)$ — фазова траєкторія i-ї частинки [1]. Зауважимо, що фазові траєкторії системи пружних куль визначено не для всіх початкових даних (множина $\mathcal{M}^0_n$ [1]), а майже скрізь на фазовому просторі $(\mathbb{R}^{3n} \times (\mathbb{R}^{3n} \setminus W_n))$. Генератор ізометричної групи еволюційних операторів (5) збігається з оператором Ліувілля.

Кумулянт $(1+n)$-го порядку груп еволюційних операторів (5) визначається таким розкладом [8]:

$$\mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{Y\}, X \setminus Y) \doteq \sum_{\mathtt{P}:\, (\{Y\}, X \setminus Y) = \bigcup_i X_i} (-1)^{|\mathtt{P}|-1} (|\mathtt{P}| - 1)! \prod_{X_i \subset \mathtt{P}} S_{|\theta(X_i)|}(-t, \theta(X_i)), \tag{6}$$

де $\sum\limits_{\mathtt{P}}$ — сума за всіма можливими розбиттями $\mathtt{P}$ множини індексів $(\{Y\}, X \setminus Y) \equiv (\{Y\}, s + 1, \ldots, s+n)$ на $|\mathtt{P}|$ непорожніх підмножин $X_i \in (\{Y\}, X \setminus Y)$, що взаємно не перетинаються, $\{Y\}$ — множина індексів, яка складається з одного елемента $Y \equiv (1, \ldots, s)$, θ — декластиризаційне відображення, яке визначається згідно з формулою: $\theta(\{Y\}, X \setminus Y) = X$.

Для початкових функцій розподілу (1) розв'язок задачі Коші (2), (3) визначається таким розкладом [9]:

$$F_s(t, x_1, \ldots, x_s) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} !dx_{s+1} \cdots dx_{s+n} \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{Y\}, X \setminus Y) \prod_{i=1}^{s+n} F^0_1(x_i) \mathcal{X}_{s+n}, \tag{7}$$

де $\mathfrak{A}_{1+n}(-t)$ — кумулянт $(1+n)$-го порядку (6) груп операторів (5). Якщо $F^0_1 \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$, за умови $\|F^0_1\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} < e^{-1}$, ряд (7) є збіжним за нормою простору $L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ для довільного $t \in \mathbb{R}^1$.

Внаслідок того, що початкові дані (1) цілком визначаються одночастинковою функцією розподілу F^0_1, тобто початкові дані для кожної невідомої функції розподілу $F_s(t)$, $s \geqslant 1$, з ієрархії рівнянь (2) не є незалежними, то природно задачу Коші для ієрархії ББГКІ (2), (3) переформулювати як нову задачу Коші для еволюційного рівняння для одночастинкової функції розподілу $F_1(t)$ з початковими даними F^0_1 та послідовності функціоналів $F_s(t \mid F_1(t))$, $s \geqslant 2$, від розв'язку такого еволюційного рівняння, які еквівалентні маргінальним функціям розподілу (7) у випадку $s \geqslant 2$ [10].

З цією метою введемо еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geqslant 0$, на основі таких кластерних розкладів кумулянтів (6) груп операторів (5) (*кінетичні кластерні розклади*):

$$\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{Y\},X \setminus Y)\mathcal{X}_{s+n}(X) =$$
$$= \sum_{k_1=0}^{n} \frac{n!}{(n-k_1)!k_1!}\mathfrak{V}_{1+n-k_1}(t,\{Y\},s+1,\ldots,s+n-k_1) \times$$
$$\times \sum_{k_2=0}^{k_1} \frac{k_1!}{k_2!(k_1-k_2)!}\cdots \sum_{k_{n-k_1+s}=0}^{k_{n-k_1+s-1}} \frac{k_{n-k_1+s-1}!}{k_{n-k_1+s}!(k_{n-k_1+s-1}-k_{n-k_1+s})!}\times$$
$$\times \prod_{i=1}^{s+n-k_1} \mathfrak{A}_{1+k_{n-k_1+s+1-i}-k_{n-k_1+s+2-i}}(-t,i,s+n-k_1+1+k_{s+n-k_1+2-i},\ldots,$$
$$\ldots,s+n-k_1+k_{s+n-k_1+1-i})\times$$
$$\times\mathcal{X}_{1+k_{n-k_1+s+1-i}-k_{n-k_1+s+2-i}}(i,s+n-k_1+1+k_{s+n-k_1+2-i},\ldots,$$
$$\ldots,s+n-k_1+k_{s+n-k_1+1-i}), \qquad n \geqslant 0, \tag{8}$$

де оператор $\mathcal{X}_{s+n} \equiv \mathcal{X}_{s+n}(1,\ldots,s+n)$ діє на функції як оператор множення на відповідну характеристичну функцію дозволених конфігурацій $\mathbb{R}^{3(s+n)} \setminus W_{s+n}$ системи $s+n$ пружних куль. Наведемо приклади кінетичних кластерних розкладів (8):

$$\mathfrak{A}_1(-t,\{Y\})\mathcal{X}_s(Y) = \mathfrak{V}_1(t,\{Y\})\prod_{i=1}^{s}\mathfrak{A}_1(-t,i),$$
$$\mathfrak{A}_2(-t,\{Y\},s+1)\mathcal{X}_{s+1}(Y,s+1) = \mathfrak{V}_2(t,\{Y\},s+1)\prod_{i=1}^{s+1}\mathfrak{A}_1(-t,i) +$$
$$+\mathfrak{V}_1(t,\{Y\})\sum_{j=1}^{s}\mathfrak{A}_2(-t,j,s+1)\prod_{i=1,i\neq j}^{s}\mathfrak{A}_1(-t,i)\mathcal{X}_2(j,s+1).$$

Для побудови розв'язків рекурентних співвідношень (8) введемо поняття кумулянта розсіяння груп операторів (5)

$$\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t,\{Y\},X \setminus Y) \doteq \mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{Y\},X \setminus Y)\mathcal{X}_{s+n}(X)\prod_{i=1}^{s+n}\mathfrak{A}_1(t,i),$$

де $\mathfrak{A}_{1+n}(-t)$, $n \geqslant 0$, — кумулянти (6) груп операторів (5) та $\mathcal{X}_{s+n}(X)$ — оператор множення на характеристичну функцію дозволених конфігурацій $\mathbb{R}^{3(s+n)} \setminus W_{s+n}$ системи $s+n$ пружних куль. Тоді еволюційний оператор $(1+n)$-го порядку $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$ зображується таким розкладом за кумулянтами розсіяння груп операторів (5):

$$\mathfrak{V}_{1+n}(t,\{Y\},X \setminus Y) = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sum_{m_1=1}^{n}\cdots\sum_{m_k=1}^{n-m_1-\cdots-m_{k-1}}\frac{1}{(n-m_1-\cdots-m_k)!}\times$$
$$\times\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n-m_1-\cdots-m_k}(t,\{Y\},s+1,\ldots,s+n-m_1-\cdots-m_k)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{k}\sum_{k_2^j=0}^{m_j}\cdots\sum_{k_{n-m_1-\cdots-m_j+s}^j=0}^{k_{n-m_1-\cdots-m_j+s-1}^j}\prod_{i_j=1}^{s+n-m_1-\cdots-m_j}\frac{1}{(k_{n-m_1-\cdots-m_j+s+1-i_j}^j-k_{n-m_1-\cdots-m_j+s+2-i_j}^j)!}\times$$

$$\times\widehat{\mathfrak{A}}_{1+k_{n-m_1-\cdots-m_j+s+1-i_j}^j-k_{n-m_1-\cdots-m_j+s+2-i_j}^j}(t,i_j,s+n-m_1-\cdots-m_j+1+$$

$$+k_{s+n-m_1-\cdots-m_j+2-i_j}^j,\ldots,s+n-m_1-\cdots-m_j+k_{s+n-m_1-\cdots-m_j+1-i_j}^j),\qquad(9)$$

де $k_1^j\equiv m_j$, $k_{n-m_1-\cdots-m_j+s+1}^j\equiv 0$. Наведемо приклади еволюційних операторів (9) найнижчих порядків:

$$\mathfrak{V}_1(t,\{Y\})=\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{Y\})\doteq S_s(-t,Y)\mathcal{X}_s(Y)\prod_{i=1}^{s}S_1(t,i),$$

$$\mathfrak{V}_2(t,\{Y\},s+1)=\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,\{Y\},s+1)-\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,\{Y\})\sum_{i_1=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i_1,s+1).$$

Побудуємо рівняння, яким визначається еволюція одночастинкової функції розподілу (7):

$$F_1(t,x_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_2\cdots dx_{n+1}\mathfrak{A}_{1+n}(-t,1,\ldots,n+1)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n+1}F_1^0(x_i)\mathcal{X}_{n+1}(q_1,\ldots,q_{n+1}).\qquad(10)$$

Диференціюючи цей вираз за часом у сенсі поточкової збіжності в просторі $L^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$, для $F_1^0\in L_0^1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,x_1)=-\Big\langle p_1,\frac{\partial}{\partial q_1}\Big\rangle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_2\cdots dx_{n+1}\mathfrak{A}_{1+n}(-t,1,\ldots,n+1)\prod_{i=1}^{n+1}F_1^0(x_i)\mathcal{X}_{n+1}+$$

$$+\int dx_2\mathcal{L}_{\mathrm{int}}^*(1,2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_3\cdots dx_{2+n}\mathfrak{A}_{1+n}(-t,\{1,2\},3,\ldots,2+n)\prod_{i=1}^{2+n}F_1^0(x_i)\mathcal{X}_{n+2},$$

де оператор $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}^*(1,2)$ визначено формулою (4). Використовуючи в другому доданку правої частини цієї рівності кінетичні кластерні розклади (8) у випадку $\{Y\}=\{1,2\}$ та враховуючи означення (10) для одночастинкової функції розподілу, в результаті остаточно отримуємо, що при $t\geqslant 0$ справедливе таке співвідношення:

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(t,x_1)=-\Big\langle p_1,\frac{\partial}{\partial q_1}\Big\rangle F_1(t,x_1)+$$

$$+\sigma^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{S}_+^2}dp_2d\eta\int\limits_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^n}dx_3\cdots dx_{n+2}\langle\eta,(p_1-p_2)\rangle\times$$

$$\times (\mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1^*, 2^*_-\}, 3, \ldots, n+2) F_1(t, q_1, p_1^*) F_1(t, q_1 - \sigma\eta, p_2^*) -$$

$$- \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{1, 2_+\}, 3, \ldots, n+2) F_1(t, x_1) F_1(t, q_1 + \sigma\eta, p_2)) \prod_{i=3}^{n+2} F_1(t, x_i), \qquad (11)$$

де еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geqslant 0$, визначені розкладами (9) та використано позначення з означення (5), індекси $(1^\sharp, 2^\sharp_\pm)$ означають, що еволюційний оператор $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$ діє на відповідні фазові точки $(q_1, p_1^\sharp)$ і $(q_1 \pm \sigma\eta, p_2^\sharp)$. Співвідношення (11) трактуватимемо як еволюційне рівняння для одночастинкової функції розподілу при $t \geqslant 0$ і називатимемо *узагальненим кінетичним рівнянням Енскога*, оскільки марковська апроксимація цього рівняння є узагальненням відомих типів кінетичного рівняння Енскога [2–4].

Відзначимо, що початкові кореляції (1), які для системи пружних куль обумовлені існуванням заборонених конфігурацій, визначають коефіцієнти кінетичного рівняння (11). Можливість врахування кореляцій початкових станів пов'язана з кумулянтною природою структури розкладів для розв'язку рівнянь ББГКІ.

Для побудови функціоналів $F_s(t \mid F_1(t))$, $s \geqslant 2$, представимо кумулянти (6) груп операторів (5) у розв'язку (7) задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ для $s \geqslant 2$ у формі кінетичних кластерних розкладів (8). У результаті, враховуючи вираз (10) для розв'язку задачі Коші для ієрархії ББГКІ для одночастинкової функції розподілу $F_1(t)$, розклади (7) для $s \geqslant 2$ набувають форми таких розкладів за добутками одночастинкової функції розподілу:

$$F_s(t, x_1, \ldots, x_s \mid F_1(t)) \doteq$$

$$\doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)^n} dx_{s+1} \cdots dx_{s+n} \mathfrak{V}_{1+n}(t, \{Y\}, X \setminus Y) \prod_{i=1}^{s+n} F_1(t, x_i), \qquad (12)$$

де еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t)$, $n \geqslant 0$, визначаються формулою (9). Функціонали $F_s(t \mid F_1(t))$, $s \geqslant 2$, існують і представляються збіжними за нормою простору $L^1(\mathbb{R}^{3s} \times \mathbb{R}^{3s})$ рядами за умови $\|F_1(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)} < e^{-(3s+2)}$. Функціонали (12) характеризують кореляції системи пружних куль і на їх основі обчислюються середні значення спостережуваних неадитивного типу.

Таким чином, у роботі розглянуто основи кінетичного опису еволюції системи пружних куль. Встановлено узагальнене кінетичне рівняння Енскога (11), яким дається еквівалентний підхід до опису еволюції станів системи пружних куль поряд з підходом на основі ієрархії рівнянь ББГКІ (2). Відзначимо, що сформульовані кінетичні кластерні розклади (8) кумулянтів (6) груп операторів (5) дали змогу описати еволюцію системи в термінах одночастинкової функції розподілу у випадку існування кореляцій початкового стану. В цьому випадку початкові кореляції визначають коефіцієнти кінетичного рівняння.

Розглянемо зв'язок узагальненого кінетичного рівняння Енскога з кінетичними рівняннями системи пружних куль [2]. Перший член ряду інтеграла зіткнень узагальненого рівняння Енскога (11) точно збігається з інтегралом зіткнень кінетичного рівняння Больцмана–Енскога. Узагальнене кінетичне рівняння Енскога марковського типу виводиться в результаті переходу до формальної марковської границі ($\lim_{\epsilon \to 0} \mathfrak{V}_{1+n}(\epsilon^{-1} t)$), і на його основі у відповідних наближеннях можуть бути отримані апріорі сформульовані модифікації інтеграла зіткнень кінетичного рівняння Енскога [2–4]. У результаті застосування аналогів формул Дюамеля до еволюційних операторів (9) перші члени розкладу (12) формально збігаються з відповідними виразами, побудованими в працях Боголюбова за теорією збурень [7]. Також зауважимо, що у формальній границі Больцмана–Греда [1] кінетичне рівняння (11) збігається з кінетичним рівнянням Больцмана системи пружних куль.

1. *Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* Many-particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer, 1997. – 252 p.
2. *Bellomo N., Lachowicz M., Polewczak J., Toscani G.* Mathematical topics in nonlinear kinetic theory II: the Enskog equation. – Singapore: World Sci., 1991. – 224 p.
3. *Enskog D.* Kinetische theorie der wärmeleitung, reibung und selbstdiffusion in gewissen werdichteten gasen und flüßigkeiten // Kungl. Sv. Vetenskapsakademiens Handl. – 1922. – **63**. – S. 3–44.
4. *Beijeren H., Ernst M. H.* The modified Enskog equation // Physica. – 1973. – **68**. – P. 437–456.
5. *Polewczak J.* On some open problems in the revised Enskog equation for dense gases // Proc. "WASCOM 99" / Eds. V. Ciancio, A. Donato, F. Oliveri, S. Rionero. – Singapore: World Sci., 2001. – P. 382–396.
6. *Polewczak J.* A review of the kinetic modelings for non-reactive and reactive dense fluids: Questions and problems // Riv. Mat. Univ. Parma. – 2001. – **4**, No 6. – P. 23–55.
7. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. – Москва: ОГИЗ, 1946. – 119 с.
8. *Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V., Stashenko M. O.* On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – **37**, No 42. – P. 9861–9872.
9. *Gerasimenko V. I.* Approaches to derivation of quantum kinetic equations // Укр. фіз. журн. – 2009. – **54**, No 8–9. – С. 834–846.
10. *Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya.* The generalized kinetic equation generated by the BBGKY hierarchy // Там само. – 1998. – **43**, No 6–7. – С. 697–702.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка
Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 29.06.2011

И. В. Гапяк, В. И. Герасименко

Обобщенное кинетическое уравнение Энскога

На основе кинетических кластерных разложений кумулянтов групп операторов системы упругих шаров обосновано нелинейное кинетическое уравнение Энскога и его обобщения. Для начальных данных, которые определяются интегрируемой одночастичной функцией распределения, установлена эквивалентность задач Коши для иерархии уравнений ББГКИ и обобщенного кинетического уравнения Энскога.

I. V. Gapyak, V. I. Gerasimenko

The generalized kinetic Enskog equation

On the basis of kinetic cluster expansions of the cumulants of groups of operators of a hard sphere system, the nonlinear kinetic Enskog equation and its generalizations are justified. It is established that, for initial state which is determined by the integrable one-particle distribution function, the Cauchy problems of the BBGKY hierarchy and the generalized kinetic Enskog equation are equivalent.