УДК 519.71

Член-кореспондент НАН України **С. І. Ляшко, Д. А. Клюшин, Г. М. Стешенко**

Якісне та чисельне дослідження сингулярного керування конвективною дифузією суміші радіоізотопів

Розглянуто задачу оптимального керування переносом суміші радіоізотопів. Доведено існування і єдиність оптимального керування, а також побудовано алгоритм розв'язання відповідної задачі оптимального керування.

В наш час у всьому світі існує велика кількість могильників радіоактивних відходів, але питання математичного моделювання конвективної дифузії суміші ізотопів з урахуванням явища філіації розкрите не повністю. В основних роботах на цю тему [1–4] досліджено існування слабкого розв'язку нелінійної початково-крайової задачі, що описує перенос радіоактивних речовин у пористому середовищі з урахуванням явища філіації. Водночас досі не було розглянуто задачу про ідентифікацію координат і потужності точкових джерел забруднення.

Постановка задачі. Для того щоб перейти до задачі оптимального керування, розглянемо таку постановку:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial t} + C_{u_1} + D_{u_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1(x) & \dfrac{\partial}{\partial t} + C_{u_2} + D_{u_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{\partial}{\partial t} + C_{u_{Y-1}} + D_{u_{S-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -a_{Y-1}(x) & \dfrac{\partial}{\partial t} + C_{u_Y} + D_{u_Y} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \\ \dots \\ u_Y(x,t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{E1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1Y} & q_{2Y} & \dots & q_{EY} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta(x-r_1) \\ \delta(x-r_2) \\ \dots \\ \delta(x-r_E) \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + C_{u_s} u_s + D_{u_s} u_s =$$

$$= \frac{\partial u_s}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{sij}(x)\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{2} a_{si}(x)\frac{u_s}{\partial x_i} + a_s(x)u_s, \qquad s = \overline{1,\dots,Y},$$

$$W_{EY}(t) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \dots & q_{E1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{1Y} & q_{2Y} & \dots & q_{EY} \end{pmatrix}, \qquad F_E(x) = \begin{pmatrix} \delta(x-r_1) \\ \delta(x-r_2) \\ \dots \\ \delta(x-r_E) \end{pmatrix} \ —$$

відповідні матриця і вектор правих частин; $\delta(x)$ — δ-функція Дірака. В цих позначеннях стан системи задається крайовими умовами:

$$u_s(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \qquad s = \overline{1,\ldots,Y}, \qquad u_s(x,0) = 0, \qquad s = \overline{1,\ldots,Y}. \tag{2}$$

Оператори дифузійного переносу D_{u_1}, $D_{u_2}, \ldots, D_{u_Y}$ є самоспряженими і додатно визначеними в просторі Ω: $D_s = D_s^* \geqslant k_0 E$, $s = \overline{1,\ldots,Y}$, де E — тотожний оператор.

Оператори конвективного переносу C_{u_1}, $C_{u_2}, \ldots, C_{u_Y}$ є кососиметричними, тобто $C_s^* = -C_s$, $s = \overline{1,\ldots,Y}$ в $L_2(Q)$.

Припускаючи середовище нестискненим, маємо:

$$\sum_{i=1}^{2} (a_{si}(x))_{x_i} = 0, \qquad s = \overline{1,\ldots,Y}.$$

Точки $x = r_p$, $p = \overline{1,\ldots,E}$, $E \in N$ визначають положення джерел, потужності яких (функції $q_{ps}(t)$, $s = \overline{1,\ldots,Y}$, $p = \overline{1,\ldots,E}$) невідомі. Додаткова інформація інтерпретується як усереднення вимірювання $U(x,t)$ в околі деяких окремих точок $z_m \in \Omega$, $m = 1,2,\ldots,M$. З урахуванням похибки вимірів маємо:

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(z_m,t) \\ u_2(z_m,t) \\ \ldots \\ u_Y(z_m,t) \end{pmatrix} \approx \varphi_m(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{u_1 m}(t) \\ \varphi_{u_2 m}(t) \\ \ldots \\ \varphi_{u_Y m}(t) \end{pmatrix}, \qquad m = 1,2,\ldots,M. \tag{3}$$

Для дослідження в просторах H та $L_2(Q)$ введемо скалярний добуток і такі норми:

$$\|u\|^2_{L_2}(Q) = \int\limits_Q u^2 dQ, \qquad (u,v)_{L_2(Q)} = \int\limits_Q uv dQ,$$

$$\|u\|^2_H(Q) = \int\limits_Q \left((u)^2_t + \sum_{i=1}^{2} (u)^2_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{2} (u)^2_{x_i x_j} \right) dQ$$

та розглянемо простори H^K та $(L_2(Q))^K$ вектор-функцій $U = (u_1, u_2, \ldots, u_K)$ та $H^{K\times M}$ і $(L_2(Q))^{K\times M}$ матриць-функцій $U = \begin{pmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1K} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{M1} & \ldots & u_{MK} \end{pmatrix}$, де u_k та u_{mk} належать H та $L_2(Q)$ відповідно, і введемо скалярний добуток і норми:

$$(U,V)_{L_2^K} = \sum_{k=1}^{K} \int\limits_Q u_k v_k dQ, \qquad (U,V)_{L_2^{K\times M}} = \sum_{k,m=1}^{K,M} \int\limits_Q u_{km} v_{km} dQ,$$

$$\|U\|^2_{L_2^K}(Q) = \int\limits_Q \sum_{k=1}^{K} (u_k)^2 dQ, \qquad \|U\|^2_{L_2^{K\times M}}(Q) = \int\limits_Q \sum_{k,m=1}^{K,M} (u_{km})^2 dQ,$$

$$\|U\|^2_{H^K}(Q) = \int\limits_Q \sum_{k=1}^{K} \left((u_k)^2_t + \sum_{i=1}^{2} (u_k)^2_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{2} (u_k)^2_{x_i x_j} \right) dQ,$$

$$\|U\|^2_{H^{K\times M}(Q)} = \int\limits_Q \sum_{k,m=1}^{K,M} \left((u_{km})^2_t + \sum_{i=1}^{2} (u_{km})^2_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{2} (u_{km})^2_{x_i x_j} \right) dQ.$$

Аналогічно для спряженої задачі вводяться простори H^K_+ та H_+.

За парами H, $L_2(Q)$ та H_+, $L_2(Q)$ побудуємо негативні простори $(H)^*$ та $(H_+)^*$, а за парами H^K, $(L_2(Q))^K$ та H^K_+, $(L_2(Q))^K$ — негативні простори $(H_+)^*$ та $(H^K_+)^*$, поповнюючи $L_2(Q)$ та $(L_2(Q))^K$ за нормами:

$$\|f\|_{(H)^*} = \sup_{\substack{u\in H\\ u\neq 0}} \frac{|(f,u)_{L_2(Q)}|}{\|u\|_H}, \qquad \|F\|_{(H^K)^*} = \sup_{\substack{U\in H^K\\ U\neq 0}} \frac{|(F,U)_{(L_2(Q))^K}|}{\|U\|_{H^K}},$$

$$\|F\|_{(H^K_+)^*} = \sup_{\substack{V\in H^K_+\\ V\neq 0}} \frac{|(F,V)_{(L_2(Q))^K}|}{\|V\|_{H^K_+}}, \qquad \|f\|_{(H_+)^*} = \sup_{\substack{\upsilon\in H_+\\ \upsilon\neq 0}} \frac{|(f,\upsilon)_{L_2(Q)}|}{\|\upsilon\|_{H_+}}.$$

Нехай керування q_{ps} належить гільбертовому простору $L_2(Q)$. Необхідно визначити $U(x,t)$ та потужності невідомих джерел $W_{EY}(t)$. Функціонал візьмемо у вигляді:

$$\begin{aligned} J_\alpha(W_{EY}) &= \sum_{m=1}^{M} \int\limits_0^T \left(\varphi_{u_1 m}(t) - \int\limits_\Omega g_{u_1 m} u_1(t,x)dx \right)^2 dt + \\ &+ \sum_{m=1}^{M} \int\limits_0^T \left(\varphi_{u_2 m}(t) - \int\limits_\Omega g_{u_2 m} u_2(t,x)dx \right)^2 dt + \cdots + \\ &+ \sum_{m=1}^{M} \int\limits_0^T \left(\varphi_{u_S m}(t) - \int\limits_\Omega g_{u_S m} u_S(t,x)dx \right)^2 dt + \alpha(\|W_{EY}\|_{H^{E\times Y}})^2, \end{aligned} \tag{4}$$

де $g_{u_s m} = \chi_{\omega_{sm}}/\operatorname{diam}\omega_{sm}$, $s = \overline{1,\ldots,Y}$, — ядро усереднення за областю ω_{sm}; $\chi_{\omega_{sm}}$ — індикаторна функція; $\alpha > 0$ — параметр регуляризації.

Визначимо функцію $\chi \in (H^Y)^*$ виразом

$$\chi = \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=1}^{M} g_{u_1 m}(x) \\ \sum\limits_{m=1}^{M} g_{u_2 m}(x) \\ \cdots \\ \sum\limits_{m=1}^{M} g_{u_Y m}(x) \end{pmatrix},$$

де $g_{u_1 m}, g_{u_2 m}, \ldots, g_{u_Y m}$ — ядра усереднення відповідних компонент вектора U в околі точки спостереження. Нехай $\psi(t) \in (L_2(0,T))^Y$ така, що

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_{u_1 m}(t) \\ \psi_{u_2 m}(t) \\ \dots \\ \psi_{u_Y m}(t) \end{pmatrix}, \qquad \chi\psi(t) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{m=1}^{M} g_{u_1 m}(x)\psi_{u_1 m}(t) \\ \sum\limits_{m=1}^{M} g_{u_2 m}(x)\psi_{u_2 m}(t) \\ \dots \\ \sum\limits_{m=1}^{M} g_{u_Y m}(x)\psi_{u_Y m}(t) \end{pmatrix}.$$

Значення α береться з урахуванням похибок вимірів (3). Оптимальне керування $W_{EY}^{\text{опт}}(t)$ знаходиться за умови мінімізації функціонала (4):

$$J_\alpha(W_{EY}^{\text{опт}}) = \min_{W_{EY}^{\in} H^{E\times Y}} J_\alpha(W_{EY}), \tag{5}$$

а за розв'язок оберненої задачі візьмемо $U(x,t) = U(x,t,W_{EY}^{\text{опт}})$ і матрицю $W_{EY}^{\text{опт}}$.

Позначимо через $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$ білінійну форму, побудовану розширенням скалярного добутку в $L_2(Q)$ за неперервністю до білінійної форми на $(H)^* \times H$, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega^Y$ — білінійну форму, що побудована за просторами $(H^*)^Y$ та $(H)^Y$, через $\langle\cdot,\cdot\rangle_+$ — білінійну форму, побудовану розширенням скалярного добутку в $L_2(Q)$ за неперервністю до білінійної форми на $(H_+)^* \times$ $\times\ H_+$.

Означення 1. $U \in (L_2(Q))^Y$ називається слабким розв'язком системи (1)–(2), якщо

$$(U, VL^*)_{(L_2(Q))^Y} = \langle F, V\rangle_+^Y, \qquad \forall\, V \in (H_+^Y).$$

Розв'язок задачі оптимального керування. Оскільки стан системи визначається як розв'язок задачі (1)–(2) та справджуються відповідні умови [6], існує єдине оптимальне керування системою (1)–(2).

При користуванні ітераційними методами перехід з k-ї на $k+1$-ту ітерацію здійснюється таким чином.

1. Розв'язується задача для визначення стану системи

$$LU^k = FW_{EY}^k, \tag{6}$$

$$U^k(0) = 0. \tag{7}$$

2. Визначається відповідний спряжений стан системи

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial\psi_{u_1}}{\partial t} - C_{u_1}\psi_{u_1} + D_{u_1}\psi_{u_1} - a_1(x)\psi_{u_2} = 2\sum_{m=1}^{M}\left\{ g_{u_1 m}\left(\int_\Omega g_{u_1 m} u_1^k dx - \varphi_{u_1 m}\right)\right\}, \\
&-\frac{\partial\psi_{u_2}}{\partial t} - C_{u_2}\psi_{u_2} + D_{u_2}\psi_{u_2} - a_2(x)\psi_{u_3} = 2\sum_{m=1}^{M}\left\{ g_{u_2 m}\left(\int_\Omega g_{u_2 m} u_2^k dx - \varphi_{u_2 m}\right)\right\}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&-\frac{\partial\psi_{u_Y}}{\partial t} - C_{u_Y}\psi_{u_Y} + D_{u_Y}\psi_{u_Y} = 2\sum_{m=1}^{M}\left\{ g_{u_Y m}\left(\int_\Omega g_{u_Y m} u_Y^k dx - \varphi_{u_Y m}\right)\right\},
\end{aligned} \tag{8}$$

$$T > t \geqslant 0, \qquad \psi^k(T) = 0. \tag{9}$$

3. Визначається нове наближення для інтенсивності джерел

$$\frac{W_{u_s}^{k+1} - W_{u_s}^{k}}{s_{k+1}}\psi_{u_s} + \alpha W_{u_s} = 0, \qquad s = \overline{1, \ldots, Y}. \tag{10}$$

Таким чином, в даній роботі розглянуто задачу оптимального керування конвективною дифузією суміші радіоізотопів. Доведено існування і єдиність розв'язку поставленої задачі. Запропоновано алгоритм для використання чисельних методів для знаходження розв'язку даної задачі.

1. *Choquet C.* Radionuclide transport model with wells // Asymptotic Analysis. – 2004. – **37**. – P. 57–78.
2. *Choquet C.* Existence result for a radionuclide transport model with unbounded viscosity // J. of Math. and Fluid Mechanics. – 2004. – **6**. – P. 365–388.
3. *Choquet C., Zimmermann S.* Study of a finite volume-finite element scheme for a nuclear transport model. – arXiv:0704.1286.
4. *Douglas J. Jr., Spagnuolo A.* The transport of nuclear contamination in fractured porous media // J. of Korean Mathematical Society. – 2001. – **38**. – P. 723–761.
5. *Ляшко С. И.* Моделирование и оптимизация подземного массопереноса. – Киев: Наук. думка, 1998. – 240 с.
6. *Ляшко С. И.* Обобщенное управление линейными системами. – Киев: Наук. думка, 1998. – 472 с.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 09.11.2011

Член-корреспондент НАН Украины **С. И. Ляшко, Д. А. Клюшин, Г. Н. Стешенко**

Качественное и численное исследование сингулярного управления конвективной диффузией смеси радиоизотопов

В работе исследована задача оптимального управления переносом смеси радиоизотопов. Доказано существование и единственность оптимального управления, а также разработан алгоритм решения соответствующей задачи оптимального управления.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **S. I. Lyashko, D. A. Klyushin, G. M. Steshenko**

The qualitative numerical investigation of the singular control over the convection-diffusion of a radioisotope mixture

The optimal control problem for the transport of a radioisotope mixture is investigated. The theorem on existence and uniqueness of an optimal control is proved, and the algorithm for solving the optimal control problem is developed.