



УДК 532.59:534.29

© 2012

О. П. Жук, академік НАН України В. Д. Кубенко, Я. О. Жук

Про радіаційну силу плоскої акустичної хвилі, яка діє на тверде сферичне тіло в заповненій рідиною циліндричній порожнині

Досліджено дію радіаційної сили на сферичне тіло в циліндричній порожнині, заповненій стисливою рідиною. Встановлено залежність величини і напрямку дії сили від частоти та відношення радіусів тіла і циліндричної порожнини.

Для твердого сферичного тіла, яке знаходиться в заповненій ідеальною стисливою рідиною циліндричній порожнині, розглядається задача щодо визначення дії на нього радіаційної сили, обумовленої радіаційним тиском акустичного поля. При формулюванні задачі в лагранжовій системі координат радіаційний тиск визначається як середнє в часі значення акустичного тиску [1] на поверхню сферичного тіла. Такий підхід вимагає при обчисленні акустичного тиску враховувати величини другого порядку. Для визначення тиску з такою точністю можна обмежитися потенціалами поля швидкості, одержаними із розв'язків лінійної задачі дифракції [2, 3]. У зв'язку з цим будемо дотримуватися такої схеми дослідження. На першому етапі визначимо потенціали поля швидкості рідини в порожнині з твердим сферичним тілом. На другому — обчислимо результуючу силу дії рідини на тіло. І на третьому етапі осередненням в часі відфільтруємо її сталу складову.

Постановка задачі дифракції. Задачу першого етапу — визначення потенціалів поля швидкості рідини в порожнині — сформулюємо в лінійній постановці, дотримуючись робіт [4, 5]. Вважатимемо, що кругова циліндрична порожнина радіусом ρ_0 з абсолютно твердими стінками заповнена ідеальною стисливою рідиною густиною γ , в якій звук поширюється зі швидкістю a_0 . В циліндричній порожнині розміщено нерухоме сферичне тіло радіусом r_0 , центр якого знаходиться на осі порожнини. Виберемо циліндричну систему координат $Orz\varphi$, вісь Oz якої направлена вздовж осі циліндричної порожнини (рис. 1), і сферичну систему координат $Or\theta\varphi$. Нехай у додатному напрямі осі Oz поширюється плоска акустична хвиля, яка описується потенціалом

$$\Phi_0 = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (1)$$

де A — амплітуда; $k = \omega/a_0$ — хвильове число; ω — кутова частота; t — час.

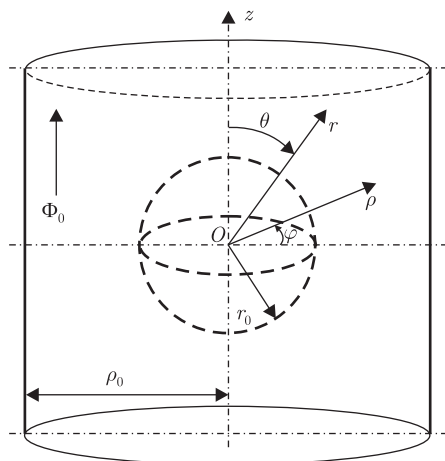


Рис. 1

Потенціал Φ_0 є розв'язком лінійного хвильового рівняння. Введемо безрозмірні величини

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0}; & \bar{r} &= \frac{r}{\rho_0}; & \bar{t} &= \frac{ta_0}{\rho_0}; & \bar{\omega} &= \frac{\omega\rho_0}{a_0}; & \bar{v} &= \frac{v}{a_0}; \\ \bar{\Phi} &= \frac{\Phi}{\rho_0 a_0}; & \bar{p} &= \frac{p}{\gamma a_0^2}; & \bar{z} &= \frac{z}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (2)$$

У співвідношеннях (2) \mathbf{v} — вектор швидкості рідини; $v = |\mathbf{v}|$; p — акустичний тиск. В подальшому будуть використовуватися тільки безрозмірні величини, тому позначати їх рискою не будемо. В безрозмірних величинах потенціал (1) і лінійне хвильове рівняння мають відповідно такий вигляд:

$$\Phi_0 = A \exp[i\omega(z - t)]; \quad (3)$$

$$\Delta\Phi + \omega^2\Phi = 0, \quad (4)$$

де Δ — диференціальний оператор Лапласа.

Визначення потенціалів хвильового поля в порожнині зводиться до розв'язування лінійної задачі розсіювання акустичної хвилі (3) на сферичному тілі і на внутрішній поверхні порожнини: знаходження розв'язків рівняння (4), які описують поле вектора швидкості рідини

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi, \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi_{\text{sph}} + \Phi_{\text{cyl}} \quad (5)$$

і задовольняють граничні умови на поверхні порожнини

$$v_{\rho}|_{\rho=1} = \left. \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \right|_{\rho=1} = 0, \quad (6)$$

на поверхні сферичного тіла

$$v_r|_{r=r_0} = \left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0 \quad (7)$$

і умови випромінення Зоммерфельда на нескінченності

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{d\Phi}{dr} - i\omega\Phi \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = 0. \quad (8)$$

Оскільки рідина знаходиться в порожнині, хвильові збурення повинні бути обмеженими

$$\Phi \rightarrow \text{const}, \quad \text{коли} \quad \rho \rightarrow 0. \quad (9)$$

В (5) позначено: Φ_{sph} — потенціал, що описує розсіяну на сферичному тілі хвилю; Φ_{cyl} — потенціал, що описує хвилю, розсіяну на поверхні порожнини.

Визначення потенціалів хвильового поля. Розв'язки Φ_{sph} рівняння (4) в сферичній системі координат будемо шукати у вигляді узагальненого ряду Фур'є за сферичними хвильовими функціями

$$\Phi_{\text{sph}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n h_n^{(1)}(\omega r) P_n(\cos \theta), \quad (10)$$

а розв'язки Φ_{cyl} рівняння (4) в циліндричній системі координат — у вигляді

$$\Phi_{\text{cyl}}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi. \quad (11)$$

В (10) і (11) $h_n^{(1)}(x)$ — сферична функція Ганкеля першого роду; $P_n(x)$ — поліноми Лежандра; $J_0(x)$ — циліндрична функція Бесселя нульового порядку; A_n — невідомі сталі; $B(\xi)$ — невідома густина; ξ — стала розділення. Співвідношення (10) і (11) задовольняють відповідно умови (8) і (9).

Складові (3), (10) і (11) загального розв'язку Φ (5) записані в різних системах координат, зв'язаних з конкретними тілами. Для того щоб задовольнити відповідно граничні умови (6) і (7), загальний потенціал Φ необхідно записати у відповідній системі координат. Для цього використаємо співвідношення (6), (7), (8), які дозволяють циліндричні хвильові функції виразити через сферичні хвильові функції і навпаки. В результаті потенціал (10), записаний у сферичній системі координат, в циліндричній системі координат має такий вигляд:

$$\Phi_{\text{sph}}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) H_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi; \quad (12)$$

$$A(\xi) = \frac{1}{2\omega} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n i^{-n} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right),$$

а потенціал (11), записаний у циліндричній системі координат, в сферичній —

$$\Phi_{\text{cyl}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n j_n(\omega r) P_n(\cos \theta); \quad (13)$$

$$B_n = i^n (2n + 1) \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) d\xi.$$

Потенціал Φ_0 первинної хвилі (3) також запишемо в сферичній системі координат

$$\Phi_0(r, \theta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A i^n (2n+1) j_n(\omega r) P_n(\cos \theta). \quad (14)$$

У формулах (12)–(14) $j_n(x)$ — сферичні функції Бесселя; $H_0(x)$ — циліндрична функція Ганкеля нульового порядку.

Загальний потенціал (5) в циліндричній системі координат $O\rho\varphi z$, беручи до уваги (3), (11) і (12), запишемо так:

$$\Phi(\rho, z) = A e^{i\omega z} + \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) H_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi. \quad (15)$$

Для потенціалу (15), який задовольняє граничну умову (6), справедливе таке співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [A(\xi) H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2}) + B(\xi) J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})] \sqrt{\omega^2 - \xi^2} e^{i\xi z} dz = 0. \quad (16)$$

Із (16), беручи до уваги формулу (12) для $A(\xi)$, одержуємо для обчислення $B(\xi)$ через невідомі сталі A_n такий вираз:

$$B(\xi) = -\frac{1}{2\omega} \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n i^{-n} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right). \quad (17)$$

У сферичній системі координат $O r \theta \varphi$ загальний потенціал (5), беручи до уваги (10), (13) і (14), запишемо так:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} [A i^n (2n+1) j_n(\omega r) + A_n h_n^{(1)}(\omega r) + B_n j_n(\omega r)] P_n(\cos \theta). \quad (18)$$

У формулах (10)–(15) і (18) співмножник $\exp(-i\omega t)$ не наведено.

Для потенціалу (18), який узгоджується з граничними умовами (8), має місце таке рівняння:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left[A_n \frac{d h_n^{(1)}(\omega r_0)}{dr} + B_n \frac{d j_n(\omega r_0)}{dr} + A i^n (2n+1) \frac{d j_n(\omega r_0)}{dr} \right] P_n(\cos \theta) = 0. \quad (19)$$

Беручи до уваги формулу (13) для B_n і формулу (17) для $B(\xi)$, одержуємо із (19) нескінченну систему алгебраїчних рівнянь для обчислення невідомих коефіцієнтів A_n

$$A_n - \frac{(2n+1)}{2\omega} \frac{j_n'(\omega r_0)}{h_n^{(1)'}(\omega r_0)} \sum_{m=0}^{m=\infty} i^{n-m} q_{mn} A_m = -A i^n (2n+1) \frac{j_n'(\omega r_0)}{h_n^{(1)'}(\omega r_0)}(\omega r_0) \quad (20)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

У рівняннях (20) коефіцієнти g_{mn} мають такий вигляд:

$$q_{mn} = 2 \int_0^{\infty} \frac{H_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})}{J_1(\sqrt{\omega^2 - \xi^2})} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) d\xi. \quad (21)$$

Відзначимо, що для непарних сум індексів $n + m$ коефіцієнти g_{mn} дорівнюють нулю. Система рівнянь має єдиний розв'язок, який знаходиться методом редукції. Задана точність забезпечується шляхом порівняння результатів при послідовному збільшенні числа рівнянь. Обчислені коефіцієнти A_n дають можливість вирахувати коефіцієнти B_n і визначити загальний потенціал (18) в сферичній системі координат.

Визначення радіаційної сили. Радіаційну силу, яка діє на сферичне тіло, обчислимо, осереднивши в часі відповідну гідродинамічну силу. Завдяки осовій симетрії акустичного поля відносно осі Oz гідродинамічна сила направлена вздовж цієї осі і вираховується за формулою

$$F_z = -2\pi r_0^2 \int_0^{\pi} p \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (22)$$

Тиск p в (22) визначаємо з точністю до величин другого порядку. Для цього скористаємося формулою для обчислення тиску [2], яка в безрозмірних величинах для нерухомого сферичного тіла має такий вигляд:

$$p = -\frac{1}{2r_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2. \quad (23)$$

В (23) враховано, що сферичне тіло нерухоме, а Φ — потенціал (18). Вкажемо, що у формулі (23), як впливає з її структури, необхідно брати дійсні частини похідних потенціалу Φ .

Осереднюючи за періодом первинної хвилі при умові (23) гідродинамічну силу (22), в результаті одержуємо формулу для обчислення радіаційної сили, що діє на сферичне тіло вздовж осі Oz

$$\langle F_z \rangle = 2\pi \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} [n(n+2) - \alpha^2] (R_n R_{n+1} + S_n S_{n+1}), \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega r_0; & S_n &= K_n + M_n + G_n; & R_n &= L_n + T_n + N_n; \\ K_n &= (-1)^n (4n+1) j_{2n}(\omega r_0); & L_n &= (-1)^n (4n+3) j_{2n+1}(\omega r_0); \\ M_n &= \operatorname{Re} A_n j_n(\omega r_0) - \operatorname{Im} A_n y_n(\omega r_0); & N_n &= \operatorname{Re} A_n y_n(\omega r_0) + \operatorname{Im} A_n j_n(\omega r_0); \\ G_n &= \operatorname{Re} B_n j_n(\omega r_0); & T_n &= \operatorname{Im} B_n j_n(\omega r_0). \end{aligned} \quad (25)$$

Аналіз результатів числового дослідження радіаційної сили. Числові розрахунки проводилися в безрозмірних величинах (2). За нормувальні параметри були взяті механічні характеристики стисливої рідини (води): швидкість хвилі $a_0 = 1500$ м/с, густина $\gamma = 1000$ кг/м³. Розглядалася плоска хвиля (3) з густиною потоку енергії $I = 175,5$ Вт/м².

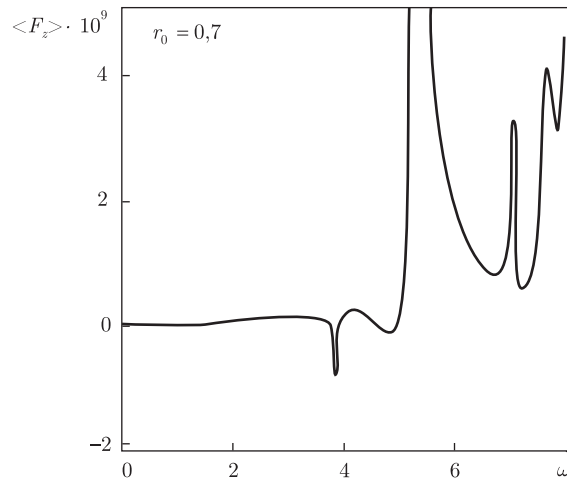


Рис. 2

Безрозмірна амплітуда A в формулі (3) дорівнює $0,3 \cdot 10^{-5}$. Графік залежності радіаційної сили від частоти хвилі для сферичного тіла безрозмірного радіуса (2) $r_0 = 0,7$ зображено на рис. 2. Аналіз графіка показує характерні особливості дії радіаційної сили на сферичне тіло в циліндричній порожнині:

залежно від частоти хвилі радіаційна сила може бути направлена як у напрямі поширення хвилі, так і в зворотному напрямі;

в околі деяких частот зміна величини радіаційної сили має характер, близький до резонансного: на графіках залежності радіаційної сили від частоти в околі резонансних частот з'являються максимуми. Очевидно, резонансні частоти є власними частотами механічної системи — заповнена рідиною циліндрична порожнина з сферичним твердим тілом.

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. — Москва: Наука, 1966. — 520 с.
2. King L. V. On the acoustic radiation pressure on spheres // Proc. Roy. Soc. Ser. A. — 1934. — **147**, No 861. — P. 246–265.
3. Guz A. N., Zhuk A. P. Motion of solid particles in a liquid under the action of an acoustic field: the mechanism of radiation pressure // Int. Appl. Mech. — 2004. — **40**, No 3. — P. 246–265.
4. Kubenko V. D., Dzyuba V. V. Interaction of infinite thin elastic cylindrical shell and a pulsating spherical inclusion in potential flow of ideal compressible liquid: internal axisymmetric problem // Ibid. — 2009. — **45**, No 3. — P. 297–312.
5. Kubenko V. D., Dzyuba V. V. Diffraction of a plane acoustic wave by a rigid sphere in a cylindrical cavity: an axisymmetric problem // Ibid. — 2009. — **45**, No 4. — P. 424–432.
6. Гузь А. Н., Головчан В. Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. — Киев: Наук. думка, 1972. — 254 с.
7. Ерофеенко В. Т. Связь между основными решениями в цилиндрических и сферических координатах уравнений Гельмгольца и Лапласа // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1972. — № 4. — С. 42–46.
8. Кубенко В. Д. Задачи дифракции стационарных волн на совокупности цилиндрических и сферических тел в жидкости // Прикл. механика. — 1987. — **23**, № 6. — С. 111–117.

А. П. Жук, академик НАН Украины В. Д. Кубенко, Я. А. Жук

О радиационной силе плоской акустической волны, действующей на сферическое тело в заполненной жидкостью цилиндрической полости

Исследовано действие радиационной силы на сферическое тело в цилиндрической полости, заполненной сжимаемой жидкостью. Установлены зависимости величины и направления действия силы от частоты и отношения радиусов тела и цилиндрической полости.

O. P. Zhuk, Academician of the NAS of Ukraine V. D. Kubenko, Ya. O. Zhuk

On the radiation force of a plane acoustic wave acting on a solid spherical body in a liquid-filled cylindrical cavity

The radiation force effect on a spherical body located in the cylindrical cavity filled with a compressible liquid is studied. The dependences of the magnitude and direction of the force on the frequency and the ratio of sphere and cylinder radii are investigated.