УДК 519.214,519.65

І. В. Малик

Збіжність у схемі дифузійної апроксимації розв'язків диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу

(Представлено академіком НАН України В. С. Королюком)

Розглянуто достатні умови слабкої збіжності у $C([0,T])$ для випадкових процесів, що описуються диференціально-функціональними рівняннями з випадковими операторами. Одержано достатні умови слабкої збіжності для розв'язків даних рівнянь за умов, накладених на коефіцієнти вихідного рівняння.

Дослідженню збіжності випадкових процесів у схемі дифузійної апроксимації у різних просторах присвячено багато робіт, наприклад [1–4]. Це пов'язано з широким використанням дифузійних процесів як математичних моделей реальних явищ: моделювання ціни вартості акцій та облігацій [5], модель розвитку популяції [6] тощо. У роботі [4] розглянуто слабку збіжність випадкових процесів у просторі неперервних функцій $C([0,T])$ та у просторі Скорохода $D([0,T])$. Робота [2] присвячена збіжності напівмарковських випадкових еволюцій у схемі усереднення та дифузійної апроксимації. Дана робота присвячена збіжності у схемі дифузійної апроксимації для розв'язків диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу. Дані рівняння описують реальні явища, які "мають" пам'ять.

Отже, на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \Im, P)$ [7], де $\Im := \{F_t, t \geqslant 0\}$ — потік σ-алгебр, задано сім'ю випадкових процесів $x^\varepsilon(t) := x(t,\varepsilon,\omega)$, $t \geqslant 0$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, де $x^\varepsilon(t)$ — сильні розв'язки лінійних диференціально-функціональних рівнянь (ДФР) в R^1 з випадковими операторами [8]

$$dD^\varepsilon x_t^\varepsilon = L^\varepsilon x_t^\varepsilon dt, \tag{1}$$

що задовольняють невипадкову початкову умову

$$x_0^\varepsilon = \varphi, \tag{2}$$

де для $\psi \in C([-h,\infty))$ визначено лінійні оператори:

$$D^\varepsilon \psi_t := \psi(t) - \int_{-h}^{0} D(t,\varepsilon^{-1}s,\omega)\psi(t-s)\,ds, \qquad L^\varepsilon \psi_t := \int_{-h}^{0} L(t,\varepsilon^{-1}s,\omega)\psi(t-s)\,ds,$$

$\psi_t := \{\psi(t+s), s \in [-h,0]\}$, $0 < h < \infty$. Тут $D, L\colon R_+ \times R^1 \times \Omega \to R^1$ — вимірні відображення за всіма своїми аргументами. Будемо припускати, що оператори D^ε та L^ε задовольняють глобальну умову Ліпшіца м. н. з деякою константою $l < \infty$

$$|D^\varepsilon\psi^1 - D^\varepsilon\psi^2| + |L^\varepsilon\psi^1 - D^\varepsilon\psi^2| \leqslant l\|\psi^1 - \psi^2\|, \tag{3}$$

де $\|\psi\| := \sup\limits_{s\in[-h,0]} |\psi(s)|$ — рівномірна норма на $[-h,0]$.

Для відображення D будемо також вимагати таку умову [9]:

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0),t\in R_+,\|\varphi\|=1}\int\limits_{-h}^{0}|D(t,\varepsilon^{-1}s,\omega)\varphi(s)|\,ds<1, \tag{4}$$

яка є необхідною умовою існування розв'язку задачі (1), (2). При умовах (3) та (4) існує єдиний сильний розв'язок задачі (1), (2) [9].

Припустимо також, що при фіксованому $t\in R_+$ випадкові процеси D, L є стаціонарними за s, тоді

$$\overline{D}(t):=ED(t,s,\omega),\overline{L}(t):=EL(t,s,\omega).$$

Зауважимо, що при виконанні умов (3) та (4) існує єдиний розв'язок рівняння

$$d\overline{D}x_t^0=\overline{L}x_t^0dt \tag{5}$$

при початковій умові (2), де

$$\overline{D}\psi_t:=\psi(t)-\int\limits_{-h}^{0}\overline{D}(t)\psi(t-s)\,ds,\qquad \overline{L}\psi_t:=\int\limits_{-h}^{0}\overline{L}(t)\psi(t-s)\,ds.$$

Введемо сім'ю випадкових процесів для $\varepsilon>0$:

$$\xi^\varepsilon(t):=\varepsilon^{-1/2}(x^\varepsilon(t)-x^0(t)),\qquad t\geqslant 0, \tag{6}$$

де $x^\varepsilon(t)$, $t\geqslant 0$ — розв'язки задач (1), (2); $x^0(t)$, $t\geqslant 0$ — розв'язок задачі (5), (2). Згідно з означенням випадкових процесів $x^\varepsilon(t)$, $x^0(t)$, $t\geqslant 0$, отримаємо

$$\xi^\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1/2}\int\limits_{-h}^{0}(D(t,\varepsilon^{-1}s,\omega)x^\varepsilon(t-s)-\overline{D}(t)x^0(t-s))\,ds+$$

$$+\varepsilon^{-1/2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0}(L(s,\varepsilon^{-1}s_1,\omega)x^\varepsilon(s-s_1)-\overline{L}(s)x^0(s-s_1))\,ds_1ds=$$

$$=\varepsilon^{-1/2}\int\limits_{-h}^{0}(D(t,\varepsilon^{-1}s,\omega)(x^0(t-s)+\varepsilon^{1/2}\xi^\varepsilon(t-s))-\overline{D}(t)x^0(t-s))\,ds+$$

$$+\varepsilon^{-1/2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0}(L(s,\varepsilon^{-1}s_1,\omega)(x^0(s-s_1)+\varepsilon^{1/2}\xi^\varepsilon(s-s_1))-\overline{L}(s)x^0(s-s_1))\,ds_1ds=$$

$$=\varepsilon^{-1/2}\int\limits_{-h}^{0}(D(t,\varepsilon^{-1}s,\omega)-\overline{D}(t))x^0(t-s)\,ds+$$

$$+\varepsilon^{-1/2}\int_0^t\int_{-h}^0 (L(s,\varepsilon^{-1}s_1,\omega)-\overline{L}(s))x^0(s-s_1)\,ds_1ds+$$

$$+\int_{-h}^0 D(t,\varepsilon^{-1}s,\omega)\xi^\varepsilon(t-s)\,ds+\int_0^t\int_{-h}^0 L(s,\varepsilon^{-1}s_1,\omega)\xi^\varepsilon(s+s_1)\,ds_1ds. \qquad (7)$$

Для $\varepsilon>0$ позначимо сім'ю випадкових процесів $z^\varepsilon(t)$, $t>0$, що задані співвідношеннями

$$z^\varepsilon(t):=\varepsilon^{-1/2}\int_{-h}^0(D(t,\varepsilon^{-1}s,\omega)-\overline{D}(t))x^0(t-s)\,ds+$$

$$+\varepsilon^{-1/2}\int_0^t\int_{-h}^0(L(s,\varepsilon^{-1}s_1,\omega)-\overline{L}(s))x^0(s-s_1)\,ds_1ds. \qquad (8)$$

Згідно з співвідношенням (7) та означенням (8), отримаємо, що сім'я випадкових процесів $\xi^\varepsilon(t)$, $t\geqslant 0$, $\varepsilon>0$ задовольняє ДФР

$$dD^\varepsilon\xi_t^\varepsilon=L^\varepsilon\xi_t^\varepsilon dt+dz^\varepsilon(t).$$

Введемо позначення

$$B_D(t_1,t_2,s):=E((D(t_1,v,\omega)-\overline{D}(t_1))(D(t_2,v+s,\omega)-\overline{D}(t_2))),$$

$$B_L(t_1,t_2,s):=E((L(t_1,v,\omega)-\overline{L}(t_1))(L(t_2,v+s,\omega)-\overline{L}(t_2))),$$

де $t_1,\ t_2\in R_+,\ s,\ v\in R^1$.

Сформулюємо достатні умови слабкої збіжності [2–4] сім'ї випадкових процесів $\xi^\varepsilon(t)$ до деякого дифузійного процесу $\xi^0(t)$ при $\varepsilon\to 0$ в $C([0,T])$, $T<\infty$.

Теорема 1. *Нехай:*

1) $\varphi\in C([-h,0])$ та виконується умова склеювання в точці 0: $\lim\limits_{t\to 0+}x^\varepsilon(t)=\varphi(0)$;

2) $D(t,s,\omega)$, $L(t,s,\omega)$ — вимірні за всіма змінними, ергодичні стаціонарні процеси за s при фіксованих t і виконується умова Ліпшиця (3) та умова (4); випадкові процеси $D(t_1,s,\omega)$, $L(t_2,s,\omega)$ — незалежні при фіксованих t_1, $t_2\in R_+$;

3) функції $B_D(t_1,t_2,s)$ та $B_L(t_1,t_2,s)$ задовольняють співвідношення:

$$\sup_{t_1,t_2\in R_+}\int_{-\infty}^{\infty}|B_D(t_1,t_2,s)|\,ds+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty|B_L(t_1,t_2,s)|\,dsdt_1dt_2<\infty;$$

4) $|L(t,s,\omega)|$, $E|L(t,s,\omega)|^2$ — рівномірно інтегровні за t; $|D(t,s,\omega)|$ — рівномірно обмежена за t.

Тоді для $T<\infty$ має місце слабка збіжність сім'ї випадкових процесів ξ^ε до випадкового процесу ξ^0 в $C([0,T])$, де $\xi^0(t)$, $t\in[0,T]$ задовольняє ДФР рівняння

$$d\overline{D}\xi_t^0=\overline{L}\xi_t^0dt+dz^0(t), \qquad (9)$$

причому $z^0(t)$ — гауссовий процес, для якого

$$Ez^0(t) = 0,$$

$$E(z^0(t_1)z^0(t_2)) = \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B_D(t_1,t_2,v)x^0(t_1+s)x^0(t_2+s)\,dvds + \\ + \int\limits_{0}^{t_1}\int\limits_{0}^{t_2}\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B_L(s_1,s_2,v)x^0(s_1+s)x^0(s_2+s)\,dvdsds_1ds_2. \tag{10}$$

Доведення теореми розіб'ємо на два етапи:

1) доведемо, що випадковий процес $z^\varepsilon(t)$, $t \in [0,T]$ є асимптотично гауссовим випадковим процесом при $\varepsilon \to 0$;

2) доведемо, що за ймовірністю $\sup\limits_{t\in[0,T]} |\xi^\varepsilon(t) - \zeta^\varepsilon(t)| \to 0$, де $\zeta^\varepsilon(t)$ — частково усереднений випадковий процес, який задовольняє ДФР

$$d\overline{D}\zeta_t^\varepsilon = \overline{L}\zeta_t^\varepsilon dt + dz^\varepsilon(t). \tag{11}$$

Найперше зауважимо, що при умові *1* теореми 1 та (3) вірна оцінка

$$\sup_{t\in[-h,T]} |x^0(t)| < \infty.$$

Розглянемо $B_\varepsilon(t_1,t_2) := E(z^\varepsilon(t_1)z^\varepsilon(t_2))$, враховуючи умову *2* теореми:

$$B_\varepsilon(t_1,t_2) = \varepsilon^{-1}\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{-h}^{0} B_D(t_1,t_2,\varepsilon^{-1}(s_1-s_2))x^0(t_1+s_1)x^0(t_2+s_2)\,ds_1ds_2 + \\ + \varepsilon^{-1}\int\limits_{0}^{t_1}\int\limits_{0}^{t_2}\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{-h}^{0} B_L(z_1,z_2,\varepsilon^{-1}(s_1-s_2))x^0(z_1+s_1)x^0(z_2+s_2)\,ds_1ds_2dz_1dz_2.$$

Зробивши заміну $u_1 = s_1$, $u_2 = \varepsilon^{-1}(s_1 - s_2)$ у двох інтегралах, отримаємо

$$B_\varepsilon(t_1,t_2) = \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{\varepsilon^{-1}u_1}^{\varepsilon^{-1}(h+u_1)} B_D(t_1,t_2,u_2)x^0(t_1+u_1)x^0(t_2+u_1-\varepsilon u_2)\,du_2du_1 + \\ + \int\limits_{0}^{t_1}\int\limits_{0}^{t_2}\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{\varepsilon^{-1}u_1}^{\varepsilon^{-1}(h+u_1)} B_L(z_1,z_2,u_2)x^0(z_1+u_1)x^0(z_2+u_1-\varepsilon u_2)\,du_2du_1dz_1dz_2.$$

З умови *3* теореми та обмеженості розв'язку $x^0(t)$, $t \in [0,T]$ випливає, що $\exists\, B(t_1,t_2)$:

$$B(t_1,t_2) :\, = \lim_{\varepsilon\to 0} B_\varepsilon(t_1,t_2) = E(z^0(t_1)z^0(t_2)),$$

де z_0 — гауссовий процес з параметрами, визначеними в (10). Тоді, згідно з теоремою 2.1 [4],

$$\lim_{\varepsilon\to 0} z^\varepsilon \rightrightarrows z^0, \tag{12}$$

де через $\rightrightarrows$ позначимо слабку збіжність у просторі неперервних функцій $C([0,T])$ (див. [2, 4]).

У літературі, наприклад [10], випадкові процеси $\zeta^\varepsilon(t)$, $\varepsilon > 0$, іноді називають частково усередненими процесами. З урахуванням умов *2*, *4* теореми 1 та умови (3) для різниці $|\xi^\varepsilon(t) - \zeta^\varepsilon(t)|$, $t \in [0,T]$ вірна нерівність

$$|\xi^\varepsilon(t) - \zeta^\varepsilon(t)| \leqslant K \sup_{s\in[0,T]} |\xi^\varepsilon(s) - \zeta^\varepsilon(s)| + \Psi_\varepsilon(t,\omega),$$

де $K = K(l,T) < \infty$,

$$\Psi_\varepsilon(t,\omega) := \Bigg| \int_{-h}^{0} (D(t,\varepsilon^{-1}s,\omega) - \overline{D}(t))\zeta^\varepsilon(t+s)\,ds + \\ + \int_0^t\int_{-h}^0 (L(s,\varepsilon^{-1}s_1,\omega) - \overline{L}(s))\zeta^\varepsilon(s+s_1)\,ds_1 ds \Bigg|.$$

Для доведення того, що

$$\sup_{t\in[0,T]} |\xi^\varepsilon(t) - \zeta^\varepsilon(t)| \to 0 \tag{13}$$

за ймовірністю при $\varepsilon \to 0$, достатньо показати, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \Psi_\varepsilon(T,\omega) = 0.$$

Доведення аналогічного факту можна знайти в [11], де розглянуто збіжність за ймовірністю розв'язків задач (1), (2) у схемі усереднення при $\varepsilon \to 0$.

Згідно з (13), випадкові процеси ζ^ε та ξ^ε є асимптотично близькі за ймовірністю на $[0,T]$ при $\varepsilon \to 0$, тобто для $\forall\,\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P\Big\{ \sup_{s\in[0,T]} |\zeta^\varepsilon(s) - \xi^\varepsilon(s)| > \delta \Big\} = 0$$

та має місце слабка збіжність (12) в $C([0,T])$.

Тоді, за теоремою 4.1 [4], отримуємо твердження теореми 1, тобто $\xi^\varepsilon \rightrightarrows \xi^0$ при $\varepsilon \to 0$ в $C([0,T])$, де граничний процес $\xi^0(t)$, $t \geqslant 0$, задовольняє граничне ДФР (9).

Теорема 1 доведена.

Автор висловлює щиру вдячність за увагу до даної роботи та цінні поради акад. НАН України В. С. Королюку.

1. *Kolmanovskia V., Koroleva N., Maizenberg T. et al.* Neutral stochastic differential delay equations with Markovian switching // Stochastic Analysis and Applications. – 2003. – **21**, Iss. 4. – P. 819–847.

2. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – Singapore: World Scientific, 2005. – 331 p.
3. *Pinsky M. A.* Lectures on random evolutions. – Singapore: World Scientific, 1991. – 135 p.
4. *Биллинсгли П.* Сходимость вероятностных мер. – Москва: Наука, 1977. – 352 с.
5. *Мішура Ю. С., Шевченко Г. М.* Математика фінансів. – Київ: Вид.-поліграф. центр "Київський університет", 2009. – 352 с.
6. *Петунин Ю. И.* Приложение теории случайных процессов в биологии и медицине. – Киев: Наук. думка, 1981. – 320 с.
7. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-х т. – Москва: Физматлит, 1994. – Т. 2. – 368 с.
8. *Королюк В. С., Царков Є. Ф., Ясинський В. К.* Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х т. – Чернівці: Золоті литаври, 2009. – Т. 3. – 798 с.
9. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – Москва: Мир, 1984. – 421 с.
10. *Mao X.-R., Shaikhet L.* Delay-dependent stability criteria for stochastic differential delay equations with Markovian switching // Stability and Control. Theory and Application. – 2000. – **3**, No 2. – P. 88–102.
11. *Малик І. В.* Збіжність у схемі усереднення диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу // Доп. НАН України. – 2013. – № 9. – С. 51–56.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 09.01.2013

И. В. Малык

Сходимость в схеме диффузионной аппроксимации решений дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа

Рассмотрены достаточные условия слабой сходимости в $C([0,T])$ для случайных процессов, описываемых дифференциально-функциональными уравнениями со случайными операторами. Получены достаточные условия слабой сходимости для решений данных уравнений в условиях, наложенных на коэффициенты исходного уравнения.

I. V. Malyk

Convergence in the diffusion approximation scheme for solutions of differential-functional equations of the neutral type

We consider sufficient conditions for the weak convergence in $C([0,T])$ for random processes described by functional differential equations with random operators. Sufficient conditions for the weak convergence of solutions of the equations under conditions imposed on the coefficients of the original equation are obtained.