УДК 512.552.4

А. С. Коротков, Л. М. Тимошкевич

Аналог теореми Сміта для злічених графів Кокстера

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Ю. С. Самойленком)

Досліджено індекси злічених графів Кокстера. Доведено твердження про монотонність індексу і аналог теореми Сміта.

У даній роботі спектральну теорію злічених графів розуміємо в сенсі [1–3]. Для злічених графів мають місце аналоги відомих теорем спектральної теорії скінченних графів (наприклад, теореми парності, див. [4]). Мета роботи — одержати деякі результати про індекси злічених графів, зокрема аналог теореми Дж. Сміта: опис злічених графів Кокстера, для яких індекс дорівнює $\sqrt{\sqrt{5}+2}$. Матеріал, який стосується спектральної теорії скінченних графів, зокрема графів Кокстера, поняття характеристичного поліному та індексу, теореми Дж. Сміта та ін., див., наприклад у [5–10]. Індекси графів мають широке коло застосувань, зокрема, у теорії представлень, де розглядаються умови існування наборів підпросторів гільбертового простору, зв'язаних певними умовами (див. [11]).

1. Злічені графи Кокстера. Нагадаємо деякі означення і факти зі спектральної теорії злічених графів ([1, 2] та ін). У роботі застосовується термінологія теорії графів, зокрема вершини та ребра графа, суміжні вершини, інцидентні вершина та ребро, степінь вершини, порядок графа, шлях, зв'язний граф, компоненти зв'язності графа, цикл, дерево тощо. Надалі під терміном "граф" ми розуміємо впорядковану пару (V, R), в якій V — деяка непорожня множина (множина вершин) і R — множина, що складається з невпорядкованих пар різних елементів V (множина ребер).

Графом Кокстера $\mathbf{G}$ називаємо пару (G, f), в якій G — граф і f — відображення множини ребер цього графа G в множину, що складається з символу ∞ і натуральних чисел, більших за 2. Будемо казати, що G — граф, підпорядкований графу Кокстера $\mathbf{G} = (G, f)$.

Для простоти сприймання граф Кокстера почасти представляють схемою, що зображує підпорядкований граф, приписуючи ще над кожним ребром e число $f(e)$, яке називатимемо "позначкою" на ребрі. Прийнято опускати приписування на ребрах числа 3, і такі ребра ще називатимемо непозначеними, а ребра з позначкою, що більша або дорівнює 4, — позначеними.

Зліченним графом Кокстера називають граф зі зліченною множиною вершин. Для зручності записів позначимо через $\mathrm{Fin}(\mathbf{\Gamma})$ множину всіх скінченних підграфів графа $\mathbf{\Gamma}$.

Зауваження 1. Звичайні графи є підмножиною графів Кокстера, для них функція f — це відображення в число 3. Ми називатимемо граф Кокстера просто графом, якщо з контексту зрозуміло, що мова йде про графи Кокстера. Для позначення графів Кокстера будемо використовувати напівжирний шрифт.

Зауваження 2. Називатимемо граф Кокстера зв'язним, деревом, циклом і т. п., якщо підпорядкований граф задовольняє ці властивості.

Вважатимемо, що $\infty \geqslant n$, де n — довільне натуральне число або символ ∞, причому рівність досягається тоді і лише тоді, коли $n = \infty$. Для злічених графів (V, R) вважатимемо, що $|V| = \infty$.

Нехай $\mathbf{G} = (G, f)$ — граф Кокстера. Граф $\mathbf{G}_1 = (G_1, f_1)$ називається *підграфом* графа $\mathbf{G} = (G, f)$, — якщо G_1 підграф G, і для довільного ребра e графа G_1 має місце нерівність $f_1(e) \leqslant f(e)$.

Для позначення того, що $\mathbf{G}_1$ є підграфом $\mathbf{G}$, використовуватимемо включення: $\mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}$.

Зафіксуємо порядок, в якому будемо розглядати вершини графа Кокстера. З кожним графом $\mathbf{G} = (G, f)$ та порядком вершин пов'язують матрицю суміжності $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, де $n = |\mathbf{G}|$ — кількість вершин графа, а елементи матриці $a_{ij} = 2\cos\dfrac{\pi}{k}$, якщо $f(\{i,j\}) = k$, $a_{ij} = 2$, якщо $f(\{i,j\}) = \infty$, і $a_{ij} = 0$, якщо вершини i та j не сполучені ребром.

Таким чином, $A(\mathbf{G})$ — симетрична дійсна матриця з нулями на головній діагоналі. Якщо граф $\mathbf{G}$ скінченний, тобто $|V| < \infty$, то $A(\mathbf{G})$ є квадратною матрицею порядку $|V|$. Для зліченних графів $\mathbf{G}$ матриця $A(\mathbf{G})$ нескінченна вправо і вниз. Вигляд матриці суміжності залежить від порядку, в якому розглядаються вершини. Однак матриці суміжності одного і того ж графа при різних нумераціях вершин пов'язані між собою відношенням подібності.

Нагадаємо, що *спектром* квадратної матриці порядку n називається множина її власних значень. Оскільки матриця суміжності $A(\mathbf{G})$ скінченного графа $\mathbf{G}$ симетрична ($a_{ij} = a_{ji}$), то її спектр дійсний. Позначимо точки спектра (власні значення матриці) через λ_i ($i = 1, \ldots, n$) та розташуємо їх у незростаючому порядку $\lambda_{\mathbf{G}} = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. Найбільше власне значення $\lambda_{\mathbf{G}}$ називають *індексом* графа $\mathbf{G}$. Спектр матриці суміжності будемо позначати $\sigma(\mathbf{G})$ та називати спектром графа $\mathbf{G}$. Спектр графа не залежить від способу нумерації його вершин та є інваріантом графа. Для характеристичного многочлена матриці суміжності скористаємося позначенням $P_{\mathbf{G}}(\lambda) = |\lambda I - A(\mathbf{G})|$. Поняття індексу поширимо на зліченні графи таким чином:

Означення 1. Індексом зліченного графа називається додатне число або символ ∞, визначені рівністю

$$\operatorname{ind}\mathbf{\Gamma} = \sup_{\mathbf{G}\in \operatorname{Fin}(\mathbf{\Gamma})} \operatorname{ind}\mathbf{G}.$$

Твердження 1. *Індекс зліченного графа дорівнює супремуму індексів його компонент зв'язності.*

Доведення. Нехай $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_1 \bigsqcup \mathbf{\Gamma}_2 \bigsqcup \cdots$ — розклад графа $\mathbf{\Gamma}$ на компоненти зв'язності. Символом $\bigsqcup$ позначається диз'юнктне об'єднання (об'єднання множин, що попарно не перетинаються). Розглянемо довільний скінченний підграф $\mathbf{G}$ графа $\mathbf{\Gamma}$. Має місце розклад

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \bigsqcup \mathbf{G}_2 \bigsqcup \cdots, \qquad \mathbf{G}_i \subset \mathbf{\Gamma}_i, \qquad i \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $\mathbf{G}$ скінченний, то лише скінченна кількість $\mathbf{G}_i \neq \varnothing$. Тому мають місце рівності

$$\operatorname{ind}\mathbf{\Gamma} = \sup_{\mathbf{G}} \operatorname{ind}\mathbf{G} = \sup_{\mathbf{G}} \sup_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{ind}\mathbf{G}_i = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{\mathbf{G}} \operatorname{ind}\mathbf{G}_i = \sup_{i\in\mathbb{N}} \sup_{\mathbf{G}_i} \operatorname{ind}\mathbf{G}_i = \sup_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{ind}\mathbf{\Gamma}_i.$$

Далі розглядатимемо лише зв'язні графи скінченного степеня.

Теорема 1. *Нехай $\mathbf{\Gamma}$ — зліченний граф, $\{\mathbf{\Gamma}_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність його скінченних підграфів, що задовольняє умови:*

а) $\mathbf{\Gamma}_n \subset \mathbf{\Gamma}_{n+1}$ для всіх натуральних n;

б) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{\Gamma}_n = \mathbf{\Gamma}$.

Тоді $\operatorname{ind}\mathbf{\Gamma} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{ind}\mathbf{\Gamma}_n$.

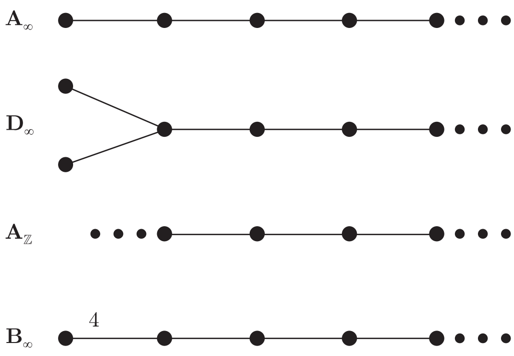

Рис. 1

Наслідок 1. *Нехай* $\mathbf{\Gamma}^1$, $\mathbf{\Gamma}^2$ *— зліченні графи,* $\{\mathbf{\Gamma}_n^1\}_{n=1}^\infty$, $\{\mathbf{\Gamma}_n^2\}_{n=1}^\infty$ *— послідовності скінченних підграфів* $\mathbf{\Gamma}^1$ *і* $\mathbf{\Gamma}^2$ *відповідно. Припустимо, що ці послідовності задовольняють умови:*

а) графи $\mathbf{\Gamma}_n^1$ *та* $\mathbf{\Gamma}_n^2$ *ізоморфні при кожному* $n \in \mathbb{N}$*;*

б) для всіх $n \in \mathbb{N}$ *мають місце включення* $\mathbf{\Gamma}_n^1 \subset \mathbf{\Gamma}_{n+1}^1$, $\mathbf{\Gamma}_n^2 \subset \mathbf{\Gamma}_{n+1}^2$*;*

в) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{\Gamma}_n^1 = \mathbf{\Gamma}^1$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{\Gamma}_n^2 = \mathbf{\Gamma}^2$.

Тоді $\operatorname{ind}\mathbf{\Gamma}^1 = \operatorname{ind}\mathbf{\Gamma}^2$.

П р и к л а д 1. Граф $\mathbf{A}_\infty$ визначається як нескінченний вправо ланцюг (рис. 1).

При обчисленні індекса цього графа як підграф $\mathbf{\Gamma}_n$ можна обрати граф $\mathbf{A}_n$, утворений першими n вершинами. Індекс цього графа відомий (див. [5, 8]) і дорівнює

$$\operatorname{ind}\mathbf{A}_n = 2\cos\frac{\pi}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

При $n \to \infty$ цей вираз прямує до 2. Отже, $\operatorname{ind}\mathbf{A}_\infty = 2$.

П р и к л а д 2. Граф $\mathbf{D}_\infty$ є нескінченним вправо ланцюгом з розгалуженням (див. рис. 1).

Його можна розглядати як границю n-вершинних графів Динкіна $\mathbf{D}_n$, $n \geqslant 4$. При обчисленні $\operatorname{ind}\mathbf{D}_\infty$ як $\mathbf{\Gamma}_n$ можна обрати підграф $\mathbf{D}_n$, утворений першими n вершинами, $n \geqslant 4$. Індекс графа $\mathbf{D}_n$ дорівнює

$$\operatorname{ind}\mathbf{D}_n = 2\cos\frac{\pi}{2(n-1)}$$

(див. [5, 8]). При $n \to \infty$ маємо $\operatorname{ind}\mathbf{D}_n \to 2$. Отже, $\operatorname{ind}\mathbf{D}_\infty = 2$.

П р и к л а д 3. Позначимо $\mathbf{A}_\mathbb{Z}$ нескінченну в обидві сторони цілочисельну пряму — граф, зображений на рис. 1.

Як $\mathbf{\Gamma}_n$ можна обрати граф Динкіна $\mathbf{A}_n$. Така сама серія обиралася для $\mathbf{A}_\infty$. Отже, $\operatorname{ind}\mathbf{A}_\mathbb{Z} = \operatorname{ind}\mathbf{A}_\infty = 2$.

П р и к л а д 4. Граф $\mathbf{B}_\infty$ визначається як нескінченний вправо ланцюг (див. рис. 1).

При обчисленні індекса цього графа як підграф $\mathbf{\Gamma}_n$ можна обрати граф $\mathbf{B}_n$, утворений першими $n \geqslant 2$ вершинами. Індекс цього графа відомий (див. [6]) і дорівнює

$$\operatorname{ind}\mathbf{B}_n = 2\cos\frac{\pi}{2n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

При $n \to \infty$ цей вираз прямує до 2. Отже, $\operatorname{ind}\mathbf{B}_\infty = 2$.

Твердження 2. *Нехай* $\mathbf{\Gamma}$ *— зліченний граф. Тоді* $\operatorname{ind}\mathbf{\Gamma} \leqslant \deg\mathbf{\Gamma}$.

2. Операції на зліченних графах Кокстера. Розглянемо деякі операції на зліченних графах Кокстера.

Нехай $\mathbf{G} = (G, f)$ — зліченний граф Кокстера.

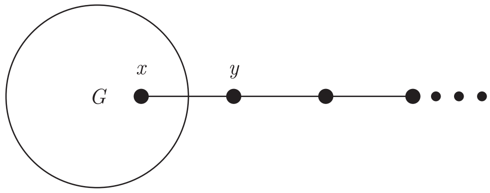

Рис. 2

1. *Операція видалення вершини.* Зафіксуємо вершину x графа $\mathbf{G}$. Введемо до розгляду граф $G_1 = (V_1, R_1)$, множина вершин якого $V_1 = V \setminus x$, а множина ребер одержується з R видаленням ребер, інцидентних вершині x. Введемо до розгляду функцію f_1, яка є обмеженням функції f на множину ребер графа G_1. Тоді граф Кокстера $\mathbf{G}_1 = (G_1, f_1)$ позначається $\mathbf{G} - x$ і називається графом Кокстера, одержаним з графа $\mathbf{G}$ видаленням вершини x.

2. *Операція видалення ребра.* Зафіксуємо ребро e графа $\mathbf{G} = (V, R)$. Розглянемо граф $G_1 = (V_1, R_1)$, множина вершин якого $V_1 = V$, а множина ребер $R_1 = R \setminus e$. Введемо в розгляд функцію f_1, яка є обмеженням функції f на множину ребер графа G_1. Тоді граф $\mathbf{G}_1 = (G_1, f_1)$ позначається $\mathbf{G} - e$ і називається графом Кокстера, одержаним з графа $\mathbf{G}$ видаленням ребра e.

3. *Операція зменшення мітки на ребрі.* Зафіксуємо ребро e графа $G = (V, R)$. Введемо в розгляд функцію f_1, яка тотожно рівна функції f на множині ребер $R \setminus e$, а на ребрі e $f_1(e) < f(e)$. Тоді граф $\mathbf{G_1} = (G, f_1)$ називається графом Кокстера, одержаним з графа $\mathbf{G}$ зменшенням мітки на ребрі e. Можна сформулювати означення підграфа в термінах операцій над графами. Підграфом графа $\mathbf{G}$ будемо називати граф, який можна одержати з $\mathbf{G}$ застосуванням операцій видалення вершин та ребер, чи зменшенням мітки на ребрі.

Нагадаємо властивості операцій над скінченними зв'язними графами Кокстера.

Твердження 3. *Нехай $\mathbf{\Gamma}$ — скінченний зв'язний граф. Тоді при видаленні вершини або ребра чи зменшенні мітки на ребрі $\mathbf{\Gamma}$ індекс зменшується (див. [5, 8]).*

Твердження 4. *Нехай $\mathbf{\Gamma}$ — зліченний зв'язний граф. При видаленні вершини або ребра чи підрозбитті внутрішнього ребра $\mathbf{\Gamma}$ його індекс не збільшується.*

Наслідок 2. *Нехай $\mathbf{\Gamma}_1$, $\mathbf{\Gamma}_2$ — зліченні графи та $\mathbf{\Gamma}_1 \subseteq \mathbf{\Gamma}_2$. Тоді* $\operatorname{ind}\mathbf{\Gamma}_1 \leqslant \operatorname{ind}\mathbf{\Gamma}_2$.

3. Індекси зліченних графів, що складаються зі скінченного графа та нескінченного ланцюга. Такі графи складаються зі скінченного графа $\mathbf{G}$, нескінченного ланцюга та ребра $\{x, y\}$, що їх з'єднує. Граф такого виду можна задати зліченною кількістю пар $(\mathbf{G}, x)$.

Теорема 2. *Нехай зліченний граф $(\mathbf{G}, x)$ складається зі скінченного графа та нескінченного ланцюга (рис. 2). Тоді:*

1. Якщо $(\mathbf{G}, x) \in \{\mathbf{A}_\infty, \mathbf{D}_\infty, \mathbf{B}_\infty\}$, то $\operatorname{ind}(\mathbf{G}, x) = 2$.

2. Якщо $(\mathbf{G}, x) \notin \mathbf{A}_\infty$, $\mathbf{D}_\infty$, $\mathbf{B}_\infty$, то $\operatorname{ind}(\mathbf{G}, x) > 2$ *та є максимальним коренем рівняння*

$$\frac{P_{\mathbf{G}-x}(\lambda)}{P_{\mathbf{G}}(\lambda)} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}.$$

4. Зліченні графи Кокстера, індекси яких належать проміжку $\left[2; \sqrt{\sqrt{5}+2}\right]$. Наведемо аналог відомої теореми Дж. Сміта для зліченних графів.

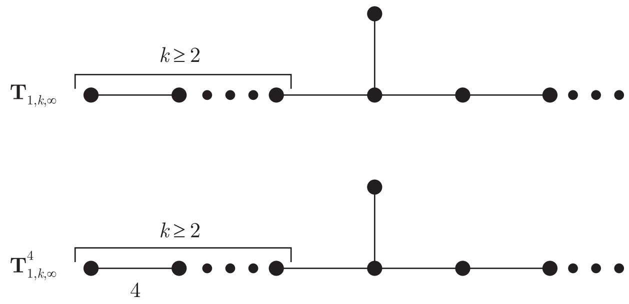

Рис. 3

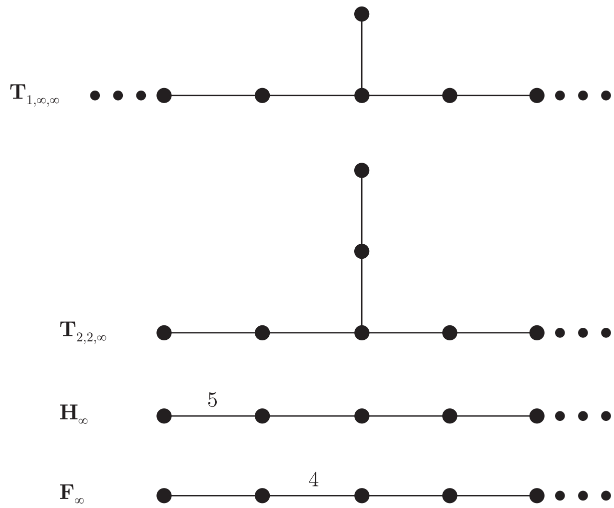

Рис. 4

Теорема 3. *Нехай* $\mathbf{\Gamma}$ *— зліченний зв'язний граф. Тоді:*

1) $\operatorname{ind} \mathbf{\Gamma} \geqslant 2$*;*

2) якщо $\operatorname{ind} \mathbf{\Gamma} = 2$*, то* $\mathbf{\Gamma}$ *є одним із таких графів:* $\mathbf{A}_\infty$*,* $\mathbf{D}_\infty$*,* $\mathbf{A}_\mathbb{Z}$*,* $\mathbf{B}_\infty$*;*

3) якщо $\operatorname{ind} \mathbf{\Gamma} \in \left(2; \sqrt{\sqrt{5}+2}\right)$*, то* $\mathbf{\Gamma}$ *є одним із графів серії:* $\mathbf{T}_{1,k,\infty}$*,* $k \geqslant 2$*,* $\mathbf{T^4}_{1,k,\infty}$*,* $k \geqslant 2$ *(рис. 3);*

4) якщо $\operatorname{ind} \mathbf{\Gamma} = \sqrt{\sqrt{5}+2}$*, то* $\mathbf{\Gamma}$ *є одним із графів:* $\mathbf{T}_{1,\infty,\infty}$*,* $\mathbf{T}_{2,2,\infty}$*,* $\mathbf{H}_\infty$*,* $\mathbf{F}_\infty$ *(рис. 4).*

Доведення. 1. Випливає з наслідка 2, оскільки нескінченний ланцюг $\mathbf{A}_\infty$ є підграфом довільного зліченного зв'язного графа та має індекс 2.

2. Згідно із теоремою Сміта, скінченні графи, відмінні від графів Динкіна–Кокстера, мають індекс, не менший за 2. Якщо зліченний граф містить вершину степеня 4 або ребро з міткою, строго більшою за 4, то він міститиме і скінченний підграф, індекс якого строго більший за 2. Аналогічно, індекс зліченного графа буде строго більший за 2, якщо він містить два ребра з мітками на них принаймні 4. Отже, якщо $\operatorname{ind} \mathbf{\Gamma} = 2$, то скінченними підграфами $\mathbf{\Gamma}$ можуть бути лише графи Динкіна–Кокстера $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{D}_n$ та $\mathbf{B}_n$ та $\deg \mathbf{\Gamma} = 2$ або $\deg \mathbf{\Gamma} = 3$. Легко переконатися, що цю умову задовольняють лише графи $\mathbf{A}_\infty$, $\mathbf{B}_\infty$, $\mathbf{A}_\mathbb{Z}$ у випадку, коли $\deg \mathbf{\Gamma} = 2$, та $\mathbf{D}_\infty$ у випадку, коли $\deg \mathbf{\Gamma} = 3$.

3–4. Доведення цих пунктів теореми досить громіздке, здійснюється методом заборонених підграфів та перебором, з використанням теореми 1.

1. *Mohar B.* The spectrum of an infinite graph // Linear Algebra Appl. – 1982. – **48**. – P. 245–256.
2. *Mohar B., Woess W.* A survey on spectra of infinite graphs // Bull. London Math. Soc. – 1989. – **21**. – P. 209–234.
3. *von Below J.* An index theory for uniformly locally finite graphs // Linear Algebra Appl. – 2009. – **431**, iss. 1–2. – P. 1–19.
4. *Godsil C. P., Mohar B.* Walk-generating functions and spectal measures of infinite graphs // Ibid. – 1988. – **107**. – P. 191–206.
5. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов, теория и применение. – Киев: Наук. думка, 1984. – 384 с.
6. *Goodman F. M., de la Harpe P., Jones V. F. R.* Coxeter graphs and towers of algebras. – New York: Springer, 1989. – 288 p.
7. *Brouwer A. E., Haemers W. H.* Spectra of graphs. – New York: Springer, 2012. – 245 p.
8. *Москалева Ю. П., Самойленко Ю. С.* Введение в спектральную теорию графов. – Киев: Центр учеб. лит., 2007. – 116 с.
9. *Самойленко Ю. С., Тимошкевич Л. М.* Про спектральну теорію графів Кокстера // У світі математики. – 2009. – **15**, No 3. – С. 14–24.
10. *Коротков А. С., Самойленко Ю. С.* Про індекси зліченних графів // Там само. – 2012. – **18**, No 3. – С. 7–17.
11. *Самойленко Ю. С., Стрелец А. В.* О простых n-ках подпространств в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, No 12. – С. 1668–1703.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 15.04.2013

А. С. Коротков, Л. М. Тимошкевич

Аналог теоремы Смита для счетных графов Кокстера

Исследованы индексы счетных графов Кокстера. Доказаны утверждения о монотонности индекса и аналог теоремы Смита.

A. S. Korotkov, L. M. Tymoshkevych

Smith-type theorem for countable Coxeter graphs

Index of infinite Coxeter graphs are investigated. It proves monotony of index and Smith-like theorem.