УДК 517.972

И. В. Орлов, Е. В. Божонок, Е. М. Кузьменко

Необходимые условия $\boldsymbol{K}$-экстремума вариационного функционала в пространствах Соболева над многомерной областью

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Чикрием)

Описаны аналоги классических необходимых условий локального экстремума — обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского и обобщенное необходимое условие Лежандра для компактных экстремумов вариационных функционалов в пространствах Соболева над многомерной областью. Также исследован вопрос достаточной гладкости решений обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского. Показано, что решение обобщенного вариационного уравнения Эйлера–Остроградского в пространстве Соболева обладает дополнительными аналитическими свойствами.

Начиная с работы Л. Тонелли [1], вариационные задачи в пространствах Соболева привлекают внимание многих математиков. В большинстве случаев (см., например, [2–5]) исследование экстремальных вариационных задач в пространствах Соболева было связано с так называемыми прямыми методами вариационного исчисления. В то же время рассматривались и различные обобщения классического подхода, позволяющие исключить прямые методы (см., например, работы [6]).

Недавно был разработан новый метод исследования вариационного функционала в пространстве Соболева в одномерном случае (см. наши работы [7–9]). Он основан на исследовании так называемых *компактно-аналитических* (или K*-аналитических*) свойств и *компактных экстремумов* (K*-экстремумов*) вариационных функционалов. Впоследствии этот метод был перенесен на многомерный случай [10, 11].

В настоящей работе описаны необходимые условия K-экстремума вариационных функционалов в многомерном случае, получаемые на основе их K-аналитических свойств. В п. 1 приведены необходимые определения и теоремы о K-аналитических свойствах вариационных функционалов в пространстве $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной областью D. В п. 2 исследовано обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для компактных экстремумов вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \in \mathbb{N}$. Далее, в п. 3 рассмотрена обратная задача повышения гладкости решения обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского. Наконец, в п. 4 приведено обобщенное необходимое условие Лежандра в рассматриваемой ситуации.

1. $\boldsymbol{K}$-аналитические свойства вариационных функционалов в $\boldsymbol{W^{1,p}(D)}$. Пусть E — произвольное вещественное локально выпуклое пространство, $\mathfrak{C}(E)$ — система всех абсолютно выпуклых компактов в E. Для каждого $C \in \mathfrak{C}(E)$ обозначим через E_C линейную оболочку C, снабженную банаховой нормой $\|\cdot\|_C$, порожденной множеством C.

Определение 1. Функционал $\Phi\colon E \to \mathbb{R}$ называется K*-непрерывным* (K*-дифференцируемым, дважды* K*-дифференцируемым* и т. д.) в точке $y \in E$, если все сужения Φ на

$(y + E_C)$ непрерывны (дифференцируемы по Фреше, дважды дифференцируемы по Фреше и т. д.) в y относительно нормы $\|\cdot\|_C$. Аналогично скажем, что Φ имеет *компактный экстремум* (*K-экстремум*) в y, если все сужения $\Phi\big|_{y+E_C}$ имеют локальный экстремум в y относительно соответствующих норм.

В нашей работе [10], на базе понятия доминантной смешанной гладкости, был введен широкий класс допустимых интегрантов, названных *K-псевдополиномами*, для которых корректно определен вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, \nabla y)\, dx \tag{1}$$

в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компакт в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей.

Определение 2. Отображение $f\colon \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z \to \mathbb{R}$ называется *K-псевдополиномом порядка $p \in \mathbb{N}$* ($f \in K_p(z)$), если оно может быть представлено в виде

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x, y, z)(z)^k, \tag{2}$$

где коэффициенты R_k, принимающие значения в пространстве k-линейных форм на $\mathbb{R}^n$, являются борелевскими отображениями, удовлетворяющими условию доминантной по x, y смешанной ограниченности (см. [12]).

Следующая теорема утверждает, что функционал (1) корректно определен в $W^{1,p}(D)$, если $f \in K_p(z)$.

Теорема 1. *Если интегрант f вариационного функционала* (1) *принадлежит классу $K_p(z)$, то функционал* (1) *корректно определен в пространстве $W^{1,p}(D)$. Кроме того, для любого компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}(D)$ выполнена оценка $|\Phi(y)| \leqslant \alpha_{C_\Delta} + \beta_{C_\Delta} \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^p$, где $\alpha_{C_\Delta} \geqslant 0$, $\beta_{C_\Delta} \geqslant 0$ — константы, зависящие от выбора C_Δ.*

Для перехода к условиям K-непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева выделяется подходящий подкласс интегрантов из $K_p(z)$.

Определение 3. Пусть $f \in K_p(z)$ непрерывно. Отображение f называется *вейерштрассовским K-псевдополиномом порядка p* ($f \in WK_p(z)$), если все коэффициенты R_k ($k = \overline{0, p}$) в представлении (2) удовлетворяют условию доминантной по x, y смешанной непрерывности (см. [12]).

Условие $f \in WK_p(z)$ гарантирует K-непрерывность функционала (1).

Теорема 2. *Если интегрант f вариационного функционала* (1) *принадлежит вейерштрассовскому классу $WK_p(z)$, то функционал* (1) *K-непрерывен всюду в пространстве $W^{1,p}(D)$.*

Для перехода к условиям K-дифференцируемости высших порядков требуются соответствующие обобщения вейерштрассовских классов.

Определение 4. Пусть $f \in C^m \bigcap K_p(z)$. Отображение f называется *вейерштрассовским K-псевдополиномом класса $W^m K_p(z)$*, если все джеты порядка m $(R_k, \nabla_{yz} R_k, \ldots, \nabla^m_{yz} R_k)$ коэффициентов R_k ($k = \overline{0, p}$) в представлении (2) удовлетворяют условию доминантной по x, y смешанной непрерывности.

Условие $f \in W^m K_p(z)$ обеспечивает m-кратную K-дифференцируемость функционала (1).

Теорема 3. *Если интегрант f вариационного функционала* (1) *принадлежит классу $W^m K_p(z)$, $m \in \mathbb{N}$, то функционал* (1) *m раз K-дифференцируем в пространстве $W^{1,p}(D)$.*

При этом классическая формула вариации m-го порядка сохраняется и для K-вариации m-го порядка, т. е.

$$\Phi_K^{(m)}(y)(h)^m = \int\limits_D \left[\sum_{\ell=0}^{m} C_m^\ell \frac{\partial^m f}{\partial y^{m-\ell}\partial z^\ell}(x,y,\nabla y) h^{m-\ell} \cdot (\nabla h)^\ell\right] dx. \tag{3}$$

2. Обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для $\boldsymbol{K}$-экстремалей в $\boldsymbol{W^{1,p}(D)}$. Здесь мы рассматриваем вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x,y,\nabla y)\, dx, \qquad y(\cdot) \in W^{1,p}(D), \qquad p \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

с дополнительным граничным условием $y\big|_{\partial D} = y_0$, где $y_0 \in W^{1,p}(\partial D)$, D — компакт в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей ∂D. Для определения K-экстремалей функционала (4) нам необходим "почти всюду"-аналог уравнения Эйлера–Остроградского (см. [13]).

Теорема 4. *Пусть $f \in W^1K_p(z)$. Предположим, что функционал* (4) *достигает K-экстремума в точке $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ и отображение $(\partial f/\partial z)(x,y,\nabla y)$ принадлежит пространству Соболева $W^{1,1}(D)$. Тогда п. в. на D имеет место обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial z_i}(x,y,\nabla y)\right) = 0. \tag{5}$$

В частности, условие теоремы выполнено, если

$$\frac{\partial f}{\partial z} \in C^1(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n) \qquad \text{и} \qquad y(\cdot) \in W^{2,p}(D).$$

В дальнейшем решения обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского (5) с условиями теоремы 8 будем называть *K-экстремалями* вариационного функционала (4).

3. Гладкость K-экстремалей в $\boldsymbol{W^{1,p}}$. В классическом C^1-случае, как известно, решение уравнения Эйлера–Остроградского при достаточно общих условиях принадлежит классу C^2. Мы рассмотрели аналогичную проблему в соболевском случае (см. [14]). Был поставлен вопрос: будет ли решение уравнения Эйлера–Остроградского при естественных условиях принадлежать классу $W^{2,p}$; будет ли оно, по крайней мере, обладать дополнительными аналитическими свойствами?

Приведем результат об определенном усилении гладкости K-экстремалей в пространствах Соболева.

Теорема 5. *Пусть, в условиях теоремы 4, функция $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$, $y\big|_{\partial D} = y_0$, является K-экстремалью функционала* (4). *Предположим, что гессиан $(\partial^2 f/\partial z^2)(x,y,\nabla y)$ невырожден п. в. на D. Тогда функция $y(\cdot)$ дважды аппроксимативно дифференцируема почти всюду на D и в тех точках $x \in D$, где градиент $\nabla y(x)$ аппроксимативно непрерывен и гессиан $(\partial^2 f/\partial z^2)(x,y,\nabla y)$ невырожден, функция следа $\mathrm{Tr}((\partial^2 f/\partial z^2)(x,y,\nabla y)\cdot\nabla_{ap}^2(y)(x))$ также аппроксимативно непрерывна.*

Предыдущий результат может быть существенно улучшен в предположении п. в. непрерывности градиента K-экстремали. В частности, имеет место повторная п. в. дифференцируемость K-экстремали (т. е. п. в. дифференцируемость градиента K-экстремали).

Теорема 6. *Пусть, в условиях теоремы 5, градиент $\nabla y(x)$ непрерывен п. в. на D. Тогда $\nabla^2(y)(x)$ существует п. в. на D и в тех точках, где $\nabla y(x)$ непрерывен на D, функция следа $\mathrm{Tr}((\partial^2 f/\partial z^2)(x,y,\nabla y)\cdot\nabla^2(y)(x))$ также непрерывна на D.*

Таким образом, решение обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского обладает дополнительными аналитическими свойствами. Тем не менее вопрос о принадлежности K-экстремали к классу $W^{2,p}$, вообще говоря, решается отрицательно. Приведем соответствующий пример.

Пример 1. Рассмотрим простейший вариационный функционал

$$\Phi(y)=\int\limits_D |\nabla y(x)|^2 dx, \qquad (y(\cdot)\in W^{1,2}(D), D=[0;1]\times[0;1]).$$

Здесь обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского принимает вид

$$y_{x_1x_1}+y_{x_2x_2}\overset{\text{п.в.}}{=}0. \tag{6}$$

Пусть $\chi(t)$ — "канторова лестница" на $[0;1]$. Положим

$$y_0(x)=\int\limits_0^{x_1}\chi(t)\,dt+\int\limits_0^{x_2}\chi(t)\,dt, \qquad 0\leqslant x_1\leqslant 1, \qquad 0\leqslant x_2\leqslant 1.$$

Тогда $y_0(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (6). Однако $y_0(\cdot)\notin W^{2,2}(D)$, так как $\nabla y_0(\cdot)\notin W^{1,2}(D)$. Таким образом, в отличие от классического вариационного C^1-случая, существенного повышения гладкости для K-экстремали не происходит.

4. Обобщенное необходимое условие Лежандра для K-экстремумов в $W^{1,p}(D)$. Получим аналог классического необходимого условия Лежандра экстремума вариационного функционала в C^1 [6] в случае K-экстремума функционала (4) в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$.

Определение 5. Пусть φ — квадратичная форма на вещественном векторном пространстве E. Назовем φ *полунеотрицательной* ($\varphi\overset{\text{semi}}{\geqslant}0$), если условие $\varphi<0$ не выполняется, т. е. если найдется $h\in E$ $(h\neq 0)$ такой, что $\varphi(h)\geqslant 0$.

Теорема 7. *Пусть вариационный функционал* (4) *достигает K-минимума в $y(\cdot)\in W^{1,p}(D)$. Кроме того, предположим, что интегрант $f\in W^2K_p(z)$ и отображение $(\partial^2 f/\partial y\partial z)(x,y,\nabla y)$ принадлежит пространству Соболева $W^{1,1}(D)$. Тогда выполняется обобщенное необходимое условие Лежандра*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y(x),\nabla y(x))\overset{\text{semi}}{\geqslant}0 \tag{7}$$

вдоль K-экстремали $y(\cdot)$ почти всюду на D.

В заключение рассмотрим пример двумерного вариационного функционала, имеющего негладкую K-экстремаль, но удовлетворяющего обобщенному условию Лежандра.

Пример 2. Положим

$$\Phi(y)=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left(\int\limits_0^{\sqrt{y_{x_1}^2+y_{x_2}^2}}\cos^2 t^2 dt\right)dx \qquad (y\in W^{1,2}(D),\ D=[-1;1]\times[-1;1]).$$

1. Непосредственные вычисления показывают, что $f \in W^2 K_2(z)$, причем $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, \nabla y) \in$ $\in\ W^{1,1}(D)$.

2. Очевидно, что $\Phi(y)$ имеет минимум в любой точке $y(\cdot) \in W^{1,2}(D)$, удовлетворяющей условию $|\nabla y|^2 = y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2 = \pi/2 + \pi k$ п. в. ($k \in \mathbb{Z}$). Рассмотрим конкретную точку минимума $y_0(x_1, x_2) = \sqrt{\pi/4}(|x_1| + |x_2|)$. В этом случае обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского принимает вид

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{y_{x_i}}{\sqrt{y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2}} \cdot \cos^2(2(y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2))\right) \overset{\text{п.в.}}{=} 0. \tag{8}$$

Непосредственно проверяется, что функция $y_0(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (8).

3. Наконец, в рассматриваемом выше случае мы получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y_0(x), \nabla y_0(x)) \overset{\text{п.в.}}{=} 2\pi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{semi}}{\geqslant} 0 \qquad \text{п.в. на } D$$

для K-экстремали $y_0(\cdot)$. Таким образом, y_0 удовлетворяет обобщенному необходимому условию Лежандра, при этом классическое условие Лежандра не выполняется в связи с негладкостью экстремали.

1. *Tonelli L.* Fondamenti di Calcolo delle Variazioni. – Bologna: Zanichelli, 1921–1923. – 466 p.
2. *Dacorogna B.* Introduction to the calculus of variations. – London: Imperial College Press, 2004. – 228 p.
3. *Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В. и др.* Оптимальное управление / Под ред. Н. П. Осмоловского, В. М. Тихомирова. – Москва: МЦНМО, 2008. – 320 с.
4. *Giaquinta M., Hildebrandt S.* Calculus of variations I. – New York: Springer, 1996. – 474 p.
5. *Giusti E.* Direct methods in the calculus of variations. – Singapore: World Scientific, 2003. – 403 p.
6. *Klötzler R.* Mehrdimensionale Variationsrechnung. – Boston: Birkhauser, 1980. – 299 p.
7. *Bozhonok E. V.* Some existence conditions of compact extrema for variational functionals of several variables in Sobolev space H^1 // Operator Theory: Advances and Applications. – Basel: Birkhäuser, 2009. – Vol. 90. – P. 141–155.
8. *Orlov I. V.* Compact extrema: general theory and its applications to the variational functionals // Operator Theory: Advances and Applications. – Basel: Birkhäuser, 2009. – Vol. 190. – P. 397–417.
9. *Орлов И. В., Божонок Е. В.* Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в пространстве Соболева H^1: Учеб. пособие. – Симферополь: ДИАЙПИ, 2010. – 156 с.
10. *Кузьменко Е. М.* Условия корректной определенности и компактной непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ // Уч. зап. Таврич. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Физико-мат. науки. – 2011. – **24(63)**, № 1. – С. 76–89.
11. *Кузьменко Е. М.* Условия K-дифференцируемости и повторной K-дифференцируемости вариационных функционалов в пространствах Соболева $W^{1,p}$ функций многих переменных // Там же. – 2011. – **24(63)**, № 3. – С. 39–60.
12. *Schmeisser H.-J., Triebel H.* Topics in Fourier analysis and function spaces. – Chichester: Wiley, 1987. – 300 p.
13. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. – Москва: Физматгиз, 1961. – 230 с.
14. *Bozhonok E. V.* On solutions to “almost everywhere” Euler–Lagrange equation in Sobolev space H^1 // Meth. Funct. Anal. and Topol. – 2007. – **123**, No 3. – P. 262–266.

Таврический национальный университет
им. В. И. Вернадского, Симферополь

Поступило в редакцию 08.10.2013

I. В. Орлов, К. В. Божонок, К. М. Кузьменко

Необхідні умови K-екстремуму варіаційного функціонала в просторах Соболєва над багатовимірною областю

Описано аналоги класичних необхідних умов локального екстремуму — узагальнене рівняння Ейлера–Остроградського й узагальнена необхідна умова Лежандра для компактних екстремумів варіаційних функціоналів у просторах Соболева над багатовимірною областю. Також досліджено питання достатньої гладкості розв'язків узагальненого рівняння Ейлера–Остроградського. Показано, що розв'язок узагальненого варіаційного рівняння Ейлера–Остроградського в просторі Соболева має додаткові аналітичні властивості.

I. V. Orlov, E. V. Bozhonok, E. M. Kuzmenko

Necessary conditions for the K-extremum of a variational functional in Sobolev spaces over multi-dimensional domains

This paper deals with a generalized Euler–Ostrogradsky equation and necessary conditions of the Legendre type in the case of the compact extrema of variational functionals in Sobolev spaces over multidimensional domains. The inverse problem of smoothness refinement for the solutions of the generalized Euler–Ostrogradsky equation is considered. It is shown that the solution of the generalized variational Euler–Ostrogradsky equation in the Sobolev space has additional analytic properties.