

<http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.10.022>

УДК 517.5

Р.Р. Салимов, Б.А. Клищук

Институт математики НАН Украины, Киев

E-mail: ruslan623@yandex.ru, bogdanklishchuk@mail.ru

Экстремальная задача для площади образа круга

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю.Ю. Трохимчуком)

Рассмотрены кольцевые Q -гомеоморфизмы относительно p -модуля на комплексной плоскости при $p > 2$. Для таких классов отображений установлены оценки снизу площади образа круга. Решена экстремальная задача о минимизации функционала площади образа круга.

Ключевые слова: кольцевые Q -гомеоморфизмы, p -модуль семейства кривых, конденсатор, p -ёмкость конденсатора, функционал площади.

В настоящей работе исследуются отображения, удовлетворяющие определенным верхним модульным оценкам, теория которых применима к отображениям квазиконформным в среднем (см. [1]), отображениям с конечным искажением длины (см. [2]) и отображениям с конечным искажением (см. [3]). Здесь мы ограничимся только плоским случаем.

Впервые верхняя оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии М.А. Лаврентьева [4]. В монографии [5] (см. предложение 3.7) получено уточнение неравенства Лаврентьева в терминах угловой дилатации. Также ранее в работах [3, 6] были получены верхние оценки искажения площади образа круга для кольцевых и нижних Q -гомеоморфизмов. В данной работе получены нижние оценки площади образа круга при кольцевых Q -гомеоморфизмах относительно p -модуля при $p > 2$.

Напомним некоторые определения. Пусть задано семейство Γ кривых γ в комплексной плоскости \mathbb{C} . Борелевскую функцию $\rho : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ называют *допустимой* для Γ , пишут $\rho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_{\gamma} \rho(z) |dz| \geq 1$$

для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$.

Пусть $p \in (1, \infty)$. Тогда p -модулем семейства Γ называется величина

$$\mathcal{M}_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{C}} \rho^p(z) dx dy.$$

Для произвольных множеств E, F и G в \mathbb{C} , через $\Delta(E, F, G)$ обозначим семейство всех непрерывных кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, которые соединяют E и F в G , т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

Пусть D — область в комплексной плоскости \mathbb{C} , $z_0 \in D$ и $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$. Положим

$$\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\},$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ является кольцевым Q -гомеоморфизмом относительно p -модуля в точке $z_0 \in D$, если соотношение

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \int_{\mathbb{A}} Q(z) \eta^p(|z - z_0|) dx dy$$

выполнено для любого кольца $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1.$$

Ниже приведен критерий принадлежности классу кольцевых Q -гомеоморфизмов относительно p -модуля при $p > 2$ на плоскости.

Предложение 1. Пусть D — область в \mathbb{C} и пусть $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая условию $q_{z_0}(r) \neq \infty$ для п.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$. Гомеоморфизм $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ является кольцевым Q -гомеоморфизмом в точке $z_0 \in D$ тогда и только тогда, когда для любых $0 < r_1 < r_2 < d_0$

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \frac{2\pi}{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{1/(p-1)} q_{z_0}^{1/(p-1)}(r)} \right)^{p-1}}$$

где $S_1 = S(z_0, r_1)$ и $S_2 = S(z_0, r_2)$, $q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(z_0, r)} Q(z) |dz|$ — среднее интегральное значение по

окружности $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Следуя работе [7], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A , называем *конденсатором*. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D , если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор в D , то (fA, fC) также конденсатор в fD . Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Пусть $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор. Обозначим через $\mathcal{C}_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ с компактным носителем. $\mathcal{W}_0(\mathcal{E}) = \mathcal{W}_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций таких, что: 1) $u \in \mathcal{C}_0(A)$; 2) $u(x) \geq 1$ для $x \in C$; 3) u принадлежит классу ACL и пусть

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}.$$

При $p \geq 1$ величину

$$\text{cap}_p \mathcal{E} = \text{cap}_p(A, C) = \inf_{u \in \mathcal{W}_0(\mathcal{E})} \int_A |\nabla u|^p dx dy$$

называют p -ёмкостью конденсатора \mathcal{E} .

Известно, что

$$\text{cap}_p \mathcal{E} = \mathcal{M}_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C))$$

(см. теорему 1 в [9]).

Установленные в работе нижние оценки для образа круга обобщают известную лемму Геринга для круга $E = B(z_0, r)$ (см. ниже).

Лемма Г. Пусть D и D' — ограниченные области в \mathbb{C} и E — произвольное измеримое по Борелю множество в D . Предположим, что $f : D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм, удовлетворяющий условию

$$\text{cap}_p f\mathcal{E} \leq K \text{cap}_p \mathcal{E}$$

при $p > 2$, где $\mathcal{E} = \left(B(z_0, r_2), \overline{B(z_0, r_1)} \right)$, $z_0 \in D$, $0 < r_1 \leq r_2 < d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда имеет место оценка

$$|fE| \geq K^{\frac{2}{2-p}} |E|$$

(см. лемму 7 в [10] при $n = 2$).

1. Искажение площади круга. В следующей теореме установлена нижняя оценка площади образа круга для кольцевых Q -гомеоморфизмов относительно p -модуля при $p > 2$.

Теорема 1. Пусть D и D' — ограниченные области в \mathbb{C} и $f : D \rightarrow D'$ — кольцевой Q -гомеоморфизм относительно p -модуля в точке $z_0 \in D$ при $p > 2$. Тогда при всех $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, имеет место оценка

$$|fB(z_0, r)| \leq \pi \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \left(\int_0^r \frac{dt}{t^{1/(p-1)} q_{z_0}^{1/(p-1)}(t)} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}},$$

где $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.

Доказательство сформулированной теоремы базируется на предложении 1 и оценке (8.7) из работы [8].

В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть D и D' — ограниченные области в \mathbb{C} и $f : D \rightarrow D'$ — кольцевой Q -гомеоморфизм относительно p -модуля в точке $z_0 \in D$ при $p > 2$. Предположим, что функция Q удовлетворяет условию

$$q_{z_0}(t) \leq q_0 t^{-\alpha}, \quad q_0 \in (0, \infty), \quad \alpha \in [0, \infty),$$

для $z_0 \in D$ и п. в. всех $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда при всех $r \in (0, d_0)$ имеет место оценка

$$|fB(z_0, r)| \geq \pi^{-\frac{\alpha}{p-2}} \left(\frac{p-2}{\alpha + p - 2} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} q_0^{\frac{2}{2-p}} |B(z_0, r)|^{1 + \frac{\alpha}{p-2}}.$$

Полагая $\alpha = 0$ в теореме 2, получаем следующее заключение.

Следствие 1. Пусть D и D' — ограниченные области в \mathbb{C} и $f : D \rightarrow D'$ — кольцевой Q -гомеоморфизм относительно p -модуля в точке $z_0 \in D$ при $p > 2$ и $q_{z_0}(t) \leq q_0 < \infty$ для п. в. $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда имеет место оценка

$$|fB(z_0, r)| \geq q_0^{\frac{2}{2-p}} |B(z_0, r)|$$

для всех $r \in (0, d_0)$.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $Q(z) \leq K < \infty$ для п. в. $z \in D$. Тогда имеет место оценка

$$|fB(z_0, r)| \geq K^{\frac{2}{2-p}} |B(z_0, r)|$$

для всех $r \in (0, d_0)$.

Замечание 1. Следствие 2 является частным случаем результата Геринга для $E = B(z_0, r)$ (см. лемму G).

2. Экстремальная задача для функционала площади. Пусть $Q: \mathbb{B} \rightarrow [0, \infty]$ — измеримая функция по Лебегу и \mathcal{H} — множество всех кольцевых Q -гомеоморфизмов $f: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ относительно p -модуля в точке $z_0 = 0$ при $p > 2$ с условием

$$q(t) = \frac{1}{2\pi t} \int_{S_t} Q(z) |dz| \leq q_0 t^{-\alpha}, \quad q_0 \in (0, \infty), \quad \alpha \in [0, \infty),$$

для п.в. $t \in (0, 1)$.

Рассмотрим на классе \mathcal{H} функционал площади $\mathbf{S}_r(f) = |fB_r|$. Ниже приведена теорема о минимизации функционала $\mathbf{S}_r(f)$.

Теорема 3. Для всех $r \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$\min_{f \in \mathcal{H}} \mathbf{S}_r(f) = \pi \left(\frac{p-2}{\alpha+p-2} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} q_0^{\frac{2}{2-p}} r^{\frac{2(\alpha+p-2)}{p-2}}.$$

Из теоремы 2 немедленно вытекает оценка

$$\mathbf{S}_r(f) \geq \pi \left(\frac{p-2}{\alpha+p-2} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} q_0^{\frac{2}{2-p}} r^{\frac{2(\alpha+p-2)}{p-2}}.$$

Построим гомеоморфизм $f_0 \in \mathcal{H}$, на котором реализуется минимум функционала $\mathbf{S}_r(f)$.

Пусть $f_0: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$, где

$$f_0(z) = \begin{cases} q_0^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{\alpha+p-2} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} |z|^{\frac{\alpha+p-2}{p-2}} \frac{z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Не трудно заметить, что оценка (1) является точной и знак равенства в ней достигается на отображении f_0 .

Покажем, что отображение, определенное таким образом, является кольцевым Q -гомеоморфизмом относительно p -модуля при $p > 2$ с функцией $Q(z) = q_0 |z|^{-\alpha}$ в точке $z_0 = 0$. Очевидно, что $q_{z_0}(t) = q_0 t^{-\alpha}$. Рассмотрим кольцо $\mathbb{A}(0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < 1$. Заметим, что отображение f_0 преобразует кольцо $\mathbb{A}(0, r_1, r_2)$ в кольцо $\tilde{\mathbb{A}}(0, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$, где

$$\tilde{r}_i = q_0^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{\alpha+p-2} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} r_i^{\frac{\alpha+p-2}{p-2}}, \quad i = 1, 2.$$

Обозначим через Γ семейство всех кривых, соединяющих окружности $S(0, r_1)$ и $S(0, r_2)$ в кольце $\mathbb{A}(0, r_1, r_2)$. Тогда p -модуль семейства $f_0\Gamma$ вычисляется в явном виде (см., например, соотношение (2) на с. 177 в [10])

$$\mathcal{M}_p(f_0\Gamma) = 2\pi \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{p-1} \left(\tilde{r}_2^{\frac{p-2}{p-1}} - \tilde{r}_1^{\frac{p-2}{p-1}} \right)^{1-p}.$$

Подставляя в предыдущее равенство значения \tilde{r}_1 и \tilde{r}_2 , определенные выше, получаем, что

$$\mathcal{M}_p(f_0\Gamma) = 2\pi \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{p-1} \left(\tilde{r}_2^{\frac{p-2}{p-1}} - \tilde{r}_1^{\frac{p-2}{p-1}} \right)^{1-p} = 2\pi q_0 \left(\frac{\alpha + p - 2}{p - 1} \right)^{p-1} \left(\frac{\alpha + p - 2}{r_2^{\frac{p-1}{p-1}}} - r_1^{\frac{\alpha + p - 2}{p-1}} \right)^{1-p}.$$

Заметим, что последнее соотношение можно переписать в следующем виде:

$$\mathcal{M}_p(f_0\Gamma) = \frac{2\pi}{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{1/(p-1)} q^{1/(p-1)}(t)} \right)^{p-1}},$$

где $q(t) = q_0 t^{-\alpha}$.

Следовательно, в силу предложения 1, гомеоморфизм f_0 является кольцевым Q -гомеоморфизмом относительно p -модуля при $p > 2$ с функцией $Q(z) = q_0 |z|^{-\alpha}$ в точке $z_0 = 0$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Golberg A. Integrally quasiconformal mappings in space // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2010. — 7, № 2. — С. 53–64.
2. Salimov R., Sevost'yanov E. The Poletskii and Väisälä inequalities for the mappings with (p, q) -distortion // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2014. — 59, Iss. 2. — P. 217–231.
3. Салимов Р.Р. Нижние оценки p -модуля и отображения класса Соболева // Алгебра и анализ. — 2014. — 26, № 6. — С. 143–171.
4. Лаврентьев М.А. Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. — Москва: Изд-во АН СССР, 1962. — 136 с.
5. Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V. Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane. — Zürich: European Mathematical Society, 2013. — x+205 p. — (Tracts in Mathematics, Vol. 19.).
6. Ломако Т.В., Салимов Р.Р. К теории экстремальных задач // Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2010. — 7, № 2. — С. 264–269.
7. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. — 1969. — 448. — P. 1–40.
8. Maz'ya V. Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces // Contemp. Math. — 2003. — 338. — P. 307–340.
9. Шлык В.А. О равенстве p -емкости и p -модуля // Сиб. мат. журн. — 1993. — 34, № 6. — С. 216–221.
10. Gehring F.W. Lipschitz Mappings and the p -capacity of Rings in n -space // Advances in the theory of Riemann surfaces: Proc. of the 1969 Stony Brook conf., Annals of Mathematics Studies, Vol. 66. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1971. — P. 175–193.

REFERENCES

1. Golberg A. Zbirnyk prats' In-tu matematyky NAN Ukraine, 2010, 7, No 2: 53-64.
2. Salimov R., Sevost'yanov E. Complex Variables and Elliptic Equations, 2014, 59, Iss. 2: 217-231.
3. Salimov R.R. Algebra i Analiz, 2014, 26, No 6: 143–171 (in Russian).
4. Lavrent'ev M.A. The variational method in boundary-value problems for systems of equations of elliptic type, Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1962 (in Russian).
5. Bojarski B., Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V. Infinitesimal geometry of quasiconformal and bi-Lipschitz mappings in the plane, Tracts in Mathematics, Vol. 19, Zürich: European Mathematical Society, 2013.
6. Lomako T.V., Salimov R.R. Zbirnyk prats' In-tu matematyky NAN Ukraine, 2010, 7, No 2: 264-269 (in Russian).

7. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., 1969, **448**: 1-40.
8. *Maz'ya V.* Contemp. Math., 2003, **338**: 307-340.
9. *Shlyk V.A.* Sib. mat. zhurn., 1993, **34**, No 6: 216-221 (in Russian).
10. *Gehring F.W.* Advances in the theory of Riemann surfaces: Proc. of the 1969 Stony Brook conf., Annals of Mathematics Studies, Vol. 66: Princeton: Princeton Univ. Press, 1971: 175-193.

Поступило в редакцію 14.04.2016

R.P. Salimov, B.A. Klishchuk

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: ruslan623@yandex.ru, bogdanklishchuk@mail.ru

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛОЩІ ОБРАЗУ КРУГА

Розглянуто кільцеві Q -гомеоморфізми відносно p -модуля на комплексній площині при $p > 2$. Для таких класів відображень встановлено оцінки знизу площі образу круга. Розв'язано екстремальну задачу про мінімізацію функціонала площі образу круга.

Ключові слова: кільцеві Q -гомеоморфізми, p -модуль сім'ї кривих, конденсатор, p -ємність конденсатора, функціонал площі.

R.R. Salimov, B.A. Klishchuk

Institute of the Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: ruslan623@yandex.ru, bogdanklishchuk@mail.ru

THE EXTREMAL PROBLEM FOR THE AREA OF AN IMAGE OF A DISC

We study the ring Q -homeomorphisms with respect to p -modulus, $p > 2$, in the complex plane and establish lower bounds for the area of an image of a disc. The extremal problem concerning a minimization of the area functional is solved.

Keywords: ring Q -homeomorphisms, p -modulus of a family of curves, capacitor, p -capacitance of a capacitor, area functional.