ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2018.04.003
УДК 517.956.223

О.Г. Сторож

Львівський національний університет ім. Івана Франка
E-mail: storog@ukr.net

Резольвенти власних розширень лінійних відношень та скінченновимірних звужень щільно визначених операторів

Представлено членом-кореспондентом НАН України А.Н. Кочубеєм

У термінах абстрактних крайових операторів та відповідних функцій Вейля знайдено резольвентну множину та побудовано резольвенту власного розширення замкненого лінійного відношення, зокрема скінченновимірного звуження щільно визначеного оператора в гільбертовому просторі.

Ключові слова: *гільбертів простір, лінійне відношення, розширення, резольвента.*

Теорія лінійних відношень у гільбертовому просторі була започаткована у статті [1] і знайшла свій подальший розвиток у працях [2—6] та ін. Інтерес до цієї теорії пов'язаний, зокрема, з різноманітними застосуваннями в теорії розширень нещільно визначених операторів (див. [7—11] та цитовану там літературу).

У цій роботі під H розуміємо фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)$. Будь-який (замкнений) лінійний многовид у $H^2 = H \oplus H$ називається (замкненим) лінійним відношенням у H. Ми використовуємо такі позначення: $D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ — відповідно область визначення, область значень та многовид нулів відношення (оператора) T; якщо $\lambda \in \mathbb{C}$, то

$$(T-\lambda) = \{(y, y'-\lambda y) : (y, y') \in T\};$$

$$T^* = \{\hat{z} = (z, z') \in H^2 : (\forall \hat{y} = (y, y') \in T) \ \ (y' \,|\, z) = (y \,|\, z')\};$$

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T-\lambda) = \{0\}, \ \ R(T-\lambda) = H\}.$$

Далі, якщо X, Y — гільбертові простори, то $(\cdot|\cdot)_X$ — символ скалярного добутку на X; $B(X, Y)$ — сукупність лінійних неперервних операторів $S : X \to Y$ таких, що $D(S)$ = X; $B(X) = B(X, X)$; $C(X)$ — сукупніть замкнених лінійних щільно визначених операторів $X \to X$; $\mathbf{1}_X$ — тотожне перетворення простору X; $T \downarrow E$ — звуження відображення T на множину E; $\dotplus$, $\oplus$, $\ominus$ — символи прямої суми, ортогональної суми та ортогонального доповнення відповідно; T^* —

оператор, спряжений з оператором T; якщо $A: X \to Y_i$ $(i=1,\ldots,n)$ — лінійні оператори, то запис $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ означає, що $(\forall x \in X)\quad Ax = (A_1x, \ldots, A_nx)$.

Роль початкового об'єкта відіграє пара (L, L_0) замкнених лінійних відношень в H таких, що $L_0 \subset L$. Приймемо $M \overset{\text{def}}{=} L_0^*$, $M \overset{\text{def}}{=} L^*$. Відомо [12], що існують гільбертові простори G_1, G_2 та лінійні оператори $\Gamma_i \in B(L, G_i)$ $(i = 1, 2)$ такі, що (G, Γ), де $G = G_1 \oplus G_2$, $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$ є крайовою парою для (L, L_0) і $\tilde{\Gamma}_1 \in B(M, G_2), \tilde{\Gamma}_2 \in B(M, G_1)$ такі, що $(\tilde{G}, \tilde{\Gamma})$ де $\tilde{G} = G_2 \oplus G_1$, $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 \oplus \tilde{\Gamma}_2$ є крайовою парою для (M, M_0) і

$$\forall \hat{y} = (y, y') \in L, \quad \forall \hat{z} = (z, z') \in M\ ,$$

$$(y' \,|\, z) - (y \,|\, z') = (\Gamma_1 \hat{y} \,|\, \tilde{\Gamma}_2 \hat{z})_{G_1} - (\Gamma_2 \hat{y} \,|\, \tilde{\Gamma}_1 \hat{z})_{G_2}\,.$$

Будь-яке замкнене лінійне відношення $L_1(M_1)$ таке, що $L_0 \subset L_1 \subset L$ (відповідно $M_0 \subset M_1 \subset M$) називають власним розширенням відношення L_0 (M_0). У цьому випадку, використовуючи термінологію, запропоновану в [11], писатимемо $L_1 \in \mathrm{Ext}\{L_0, M_0\}$, $M_1 \in \mathrm{Ext}\{M_0, L_0\}$. З результатів, викладених у [12], випливає, що для будь-якого $L_1 \in \mathrm{Ext}\{L_0, M_0\}$ існує $A \in \mathrm{B}(G)$ таке, що $L_1 = \ker A\Gamma$. Далі писатимемо L_A замість L_1. Таким чином,

$$L_A = \ker\,(A_1\Gamma_1 + A_2\Gamma_2) = \{\,\hat{y} \in L: A_1\Gamma_1\,\hat{y} + A_2\Gamma_2\,\hat{y}\, = 0\}, \tag{1}$$

де $A_i = A \downarrow G_i$ $(i=1,2)$. При цьому, не втрачаючи загальності, можна вважати, що

$$R(A) = \overline{R(A)} \overset{\text{def}}{=} F_1. \tag{2}$$

Ми припускаємо, що резольвентна множина $\rho(L_2)$ відношення $L_2 = \ker\,\Gamma_2$ непорожня і $\lambda \in \rho(L_2)$, а отже, $\bar{\lambda} \in \rho(M_2)$ де $M_2 \overset{\text{def}}{=} \ker \tilde{\Gamma}_2 (= L_2^*)$. Тоді

$$L_\lambda \overset{\text{def}}{=} (L_2 - \lambda)^{-1} \in B\,(H),\ M_{\bar{\lambda}} \overset{\text{def}}{=} (M_2 - \bar{\lambda})^{-1} (L_\lambda^*) \in B\,(H)\,.$$

Це випливає з теореми про замкнений графік (див. [13, с. 211]).

Нижче встановлено розмірність многовиду нулів, корозмірність області значень та критерій нормальної розв'язності відношення $L_A - \lambda$. Знайдено також резольвентну множину та побудовано резольвенту відношення L_A. Окремо розглянуто випадок, коли початковим об'єктом є пара, яка складається зі скінченновимірного звуження деякого оператора з $C(H)$ та певного розширення-відношення цього оператора.

1. Основний результат. Введемо такі позначення:

$$\hat{L}_\lambda = (L_\lambda y,\, y + \lambda L_\lambda y)\,(y \in H), \quad \hat{M}_{\bar{\lambda}} = (M_{\bar{\lambda}} z,\, z + \bar{\lambda} M_{\bar{\lambda}} z) \quad (z \in H);$$

$$Z_\lambda = (\tilde{\Gamma}_1 \hat{M}_{\bar{\lambda}})^*,\ \tilde{Z}_{\bar{\lambda}} = (\Gamma_1 \hat{L}_{\bar{\lambda}})^*, \quad \hat{Z}_\lambda a = (Z_\lambda a, \lambda Z_\lambda a) \quad (a \in G_2)\,.$$

Лема 1. *Нехай* $\pi_1: H^2 \to H \oplus \{0\}$, $\quad \pi_2: H^2 \to \{0\} \oplus H$ *— ортопроектори. Тоді:*

а) $R(\hat{L}_\lambda) = L_2, \quad R(\hat{M}_{\bar{\lambda}}) = M_2;$

б) $Z_\lambda \in B(G_2, H), \quad Z_\lambda = (L_\lambda(\pi_1 + \lambda\pi_2) + \pi_2)\tilde{\Gamma}_1^*;$

в) $\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} \in B(G_1, H), \quad \tilde{Z}_{\bar{\lambda}} = (M_\lambda(\pi_1 + \bar{\lambda}\pi_2) + \pi_2)\tilde{\Gamma}_1^*.$

Лема 2.

а) $R(\hat{Z}_\lambda) \subset L, \Gamma_2 \hat{Z}_\lambda = \mathbf{1}_{G_2}$;

б) $\hat{Z}_\lambda \downarrow \widehat{\ker}(L-\lambda) = \mathbf{1}_{\widehat{\ker}(L-\lambda)}$;

в) $R(Z_\lambda) = \ker(L-\lambda)$;

г) $L_2 \dotplus \widehat{\ker}(L-\lambda) = L$.

Введемо позначення $M(\lambda) = \Gamma_1 \hat{Z}_\lambda$.

Лема 3. $L_0 \dotplus \widehat{\ker}(L-\lambda) = \ker(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2)$.

***Зауваження* 1.** Покладемо: $\hat{\tilde{Z}}_\lambda = (\tilde{Z}_{\bar{\lambda}}, \lambda \tilde{Z}_\lambda)$, $\tilde{M}(\bar{\lambda}) = \tilde{\Gamma}_1 \hat{\tilde{Z}}_\lambda$. Міняючи ролями пари (L, L_0) та (M, M_0), неважко переконатися, що

$$R(\hat{\tilde{Z}}_\lambda) = \widehat{\ker}(M-\bar{\lambda}), \quad \tilde{\Gamma}_2 \hat{\tilde{Z}}_\lambda = \mathbf{1}_{G_1}, \hat{\tilde{Z}}_\lambda \tilde{\Gamma}_2 \downarrow \widehat{\ker}(M-\lambda) = \mathbf{1}_{\widehat{\ker}(M-\bar{\lambda})}.$$

Крім цього, $M(\lambda)^* = \tilde{M}(\bar{\lambda})$.

Теорема 1. *Припустимо, що відношення* L_A *визначено згідно з* (1), *причому справджується* (2) *і* $A_\lambda \overset{\text{def}}{=} A_1 M(\lambda) + A_2 \ (\lambda \in \rho(L_2))$. *Тоді:*

а) $\dim\ker(L_A - \lambda) = \dim\ker A_\lambda$;

б) $\dim[H/R(L_A-\lambda)] = \dim[R(A_1)/R(A_1) \cap R(A_\lambda))]$;

в) $\dim\ker(L_A^* - \bar{\lambda}) = \dim\ker A_\lambda^*$;

г) $\dim[H/R(L_A^* - \bar{\lambda})] = \dim[G_2/R(A_\lambda^*)]$;

д) $R(L_A - \lambda)$ *замкнений в* H *тоді і тільки тоді, коли* $R(L_A)$ *замкнений в* F_1*;*

е) $\lambda \in \rho(L_A)$ *тоді і тільки тоді, коли* $A_\lambda^{-1} \in \mathcal{B}(F_1, G_2)$. *У цьому випадку*

$(L_A - \lambda)^{-1} = L_\lambda - Z_\lambda A_\lambda^{-1} A_1 \tilde{Z}_{\bar{\lambda}}^*$,

а $(L_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda$ *є компактним тоді і тільки тоді, коли компактним є оператор* A_1.

2. Резольвенти розширень нещільно визначеного оператора. У цьому пункті вважаємо, що $L, L_0 \in C(H)$ причому $L_0 \subset L$, $M \overset{\text{def}}{=} L_0^*$, $M_0 \overset{\text{def}}{=} L^*$, а для будь-якого $T \in C(H)$ під $D[T]$ розуміємо многовид $D(T)$, трактований як гільбертів простір зі скалярним добутком графіка оператора T. Припустимо, що G_1, G_2 — гільбертові простори, а $\Gamma_1 \in B(D[T], G_1)$, $G_2 \in B(D[L], G_2)$, $\tilde{\Gamma}_1 \in B(D[M], G_2)$, $\tilde{\Gamma}_2 \in B(D[M], G_1)$ задовольняють такі умови:

$$R(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = G_1 \oplus G_2, \quad \ker(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = D(L_0),$$

$$R(\tilde{\Gamma}_1 \oplus \tilde{\Gamma}_2) = G_2 \oplus G_1, \quad \ker(\tilde{\Gamma}_1 \oplus \tilde{\Gamma}_2) = D(M_0).$$

$$\forall y \in D(L), \forall z \in D(M) \quad (Ly \,|\, z) - (y \,|\, Mz) = (\Gamma_1 y \,|\, \tilde{\Gamma}_2 z)_{G_1} - (\Gamma_2 y \,|\, \tilde{\Gamma}_1 z)_{G_2}.$$

Нижче скрізь припускаємо, що нам відомі резольвенти $L_\lambda = (L_2 - \lambda)^{-1}$ та $M_{\bar{\lambda}} = (M_2 - \bar{\lambda})^{-1}$. Для будь-якого $\lambda \in \rho(L_2)$ покладемо $Z_\lambda = (\tilde{\Gamma}_1 M_{\bar{\lambda}})^*$, $M(\lambda) = (\Gamma_1 Z_\lambda)^*$, $\tilde{M}(\bar{\lambda}) = \tilde{\Gamma}_1 \tilde{Z}_{\bar{\lambda}}$. Властивості цих оператор-функцій досліджено в [14, 15].

Нехай $H_0^{(L)}, H_0^{(M)}$ — скінченновимірні підпростори простору H, а $P_0^{(L)}$ та $P_0^{(M)}$ — ортопроектори $H \to H_0^{(L)}$ та $H \to H_0^{(M)}$ відповідно. Покладемо

$G_{s,1} = G_1 \oplus H_0^L$, $G_{s,2} = G_2 \oplus H_0^M$, $G_s = G_{s,1} \oplus G_{s,2}$, $\tilde{G}_s = G_{s,2} \oplus G_{s,1}$;

$$\Gamma_{s,1}(y,\phi^{(M)})=\begin{pmatrix}\Gamma_1 y\\ -P_0^{(L)}y\end{pmatrix},\quad \Gamma_{s,2}(y,\phi^{(M)})=\begin{pmatrix}\Gamma_2 y\\ \phi^{(M)}\end{pmatrix},$$

$$\tilde\Gamma_{s,1}(z,\phi^{(L)})=\begin{pmatrix}\tilde\Gamma_1 z\\ -P_0^{(M)}z\end{pmatrix},\quad \tilde\Gamma_{s,2}(z,\phi^{(L)})=\begin{pmatrix}\tilde\Gamma_2 z\\ \phi^{(L)}\end{pmatrix},$$

$y\in D(L),\ \phi^{(M)}\in H_0^{(M)};\quad z\in D(M),\ \phi^{(L)}\in H_0^{(L)};$

$\Gamma_s=\Gamma_{s,1}\oplus\Gamma_{s,2},\quad \tilde\Gamma_s=\tilde\Gamma_{s,1}\oplus\tilde\Gamma_{s,2}.$

Далі, нехай $Z_\lambda,\ M(\lambda),\tilde Z_{\bar\lambda}$ $(\lambda\in\rho(L_2))$ такі, як на початку цього пункту і

$$Z_{s,\lambda}(a,\phi^{(M)})=Z_\lambda a-L_\lambda\phi^{(M)},\quad \hat Z_{s,\lambda}(a,\phi^{(M)})=\begin{pmatrix}Z_{s,\lambda}(a,\phi^{(M)})\\ \phi^{(M)}\end{pmatrix},\ (a,\phi^{(M)})\in G_{s,2},$$

$$M_s(\lambda)=\Gamma_{s,1}\hat Z_{s,\lambda},\quad \tilde Z_{s,\lambda}(a,\phi^{(L)})=\tilde Z_{\bar\lambda}a-M_{\bar\lambda}\phi^{(L)},\quad (a,\phi^{(L)})\in G_{s,1}.$$

Лема 4.

а) $Z_{s,\lambda}=(\tilde\Gamma_{s,1}M_{\bar\lambda})^*\in B(G_{s,2},H),\quad R(Z_s,\lambda)=\ker(S-\lambda)$;

б) $R(\hat Z_{s,\lambda})\dot+[D(L_2)\oplus\{0\}]=D[L]\oplus H_0^M,\quad \Gamma_{s,2}\hat Z_{s,\lambda}=\mathbf{1}_{G_{s,2}}$;

в) $\tilde Z_{s,\bar\lambda}=(\Gamma_{s,1}L_\lambda^*)\in B(G_{s,1},H),\quad R(\tilde Z_{s,\bar\lambda})=\ker(T-\bar\lambda)$;

г) $M_s(\lambda)=\begin{pmatrix}M(\lambda) & -\tilde Z_{\bar\lambda}^*\downarrow H_0^{(M)}\\ -P_0^{(L)}Z_\lambda & P_0^{(L)}L_\lambda\downarrow H_0^M\end{pmatrix}\in B(G_{s,2},G_{s,1})$,

$[D(S_0\oplus\{0\})]\dot+R(\hat Z_{s,\lambda})=\ker(\Gamma_{s,1}-M_{s,\lambda}\Gamma_{s,2})$.

Розглянемо такі відношення:

$S_0=L_0\downarrow(H\ominus H_0^{(L)}),\quad T_0=M_0\downarrow(H\ominus H_0^{(M)}),$

$S=\{(y,Ly+\phi^{(M)}):y\in D(L),\quad \phi^{(M)}\in H_0^{(M)}\},$

$T=\{(z,Mz+\phi^{(L)}):z\in D(M),\quad \phi^{(L)}\in H_0^{(L)})\}.$

Відомо [2], що $S_0^*=T,T_0^*=S$. Крім цього, як випливає з результатів праці [14], має місце таке твердження.

Твердження 1.

а) $R(\Gamma_s)=G_s,\quad \ker(\Gamma_s)=D(S_0)$;

б) $R(\tilde\Gamma_s)=\tilde G_s,\quad \ker(\tilde\Gamma_s)=D(T_0)$.

Нехай

$$A_s\in B(G_s),\ S_A=\ker(A_s\Gamma_s)=\{(y,Ly+\phi^{(M)})\in S:A_{s,1}\Gamma_{s,1}(y,\phi^M)+A_{s,2}\Gamma_{s,2}(y,\phi^M)=0\},\quad (3)$$

де $A_{s,i} = A_s \downarrow G_{s,i}$, $i = 1, 2.$ Міркуючи так, як в п. 1, бачимо, що будь-яке відношення з класу $\mathrm{Ext}\{S_0, T_0\}$ може бути подане у вигляді (3). При цьому без втрати загальності можна вважати, що

$$R(A_s) = R(A_s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F_{s,1}. \tag{4}$$

Тепер неважко сформулювати аналог теореми 1 у розглядуваній ситуації. Обмежимося формулюванням аналогу твердження *е* теореми 1.

Теорема 2. *Нехай відношення S_A визначено згідно з (3), причому справджуються (4) і $A_{s,\lambda} \stackrel{\mathrm{def}}{=} A_{s,1}M_s(\lambda) + A_{s,2}$ $(\lambda \in \rho(L_2))$, $\lambda \in \rho(S_A)$ тоді і тільки тоді, коли $A_{s,\lambda}^{-1} \in \mathcal{B}(F_{s,1}, G_{s,2})$. У цьому випадку $(S_A - \lambda)^{-1} = L_\lambda - Z_{s,\lambda} A_{s,\lambda}^{-1} \tilde{Z}_{s,\lambda}$, а компактність оператора $(S_A - \lambda)^{-1} - L_\lambda$ рівносильна компактності оператора $A_{s,1}$.*

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Arens R. Operational calculus of linear relations. *Pacif. J. Math.* 1961. **11**, № 1. P. 9—23. doi: https://doi.org/10.2140/pjm.1961.11.9
2. Coddington E.A. Self-adjoint subspace extensions of nondensely defined linear symmetric operators. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1973. **79**, № 4. P. 712—715.
3. Dijksma A., Snoo H.S.V. de. Self-adjoint extensions of symmetric subspaces. *Pacif. J. Math.* 1974. **54**, № 1. P. 71-100. doi: https://doi.org/10.2140/pjm.1974.54.71
4. Рофе-Бекетов Ф.С. Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций. *Докл. АН СССР.* 1969. **184**, № 5. С. 1034—1037.
5. Кочубей А.Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений. *Мат. заметки.* 1975. **17**, № 1. С. 41—48.
6. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально операторных уравнений. Киев: Наук.думка, 1984. 284 с.
7. Красносельський М.А. О самоспряженых расширениях эрмитовых операторов. *Укр. мат. журн.* 1949. № 1. С. 21—38.
8. Штраус А.В. О расширениях и характеристической функции симметрического оператора. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1968. **32**, № 1. С. 186—207.
9. Кочубей А.Н. О расширениях неплотно заданного симметрического оператора. *Сиб. мат. журн.* 1977. **18**, № 2. С. 314—320.
10. Derkach V.A., Mamalud M.M. The extension theory of Hermitian operators and the moment problem. *J. Math. Sci.* 1995. **73**, № 2. P. 141—242. doi: https://doi.org/10.1007/BF02367240
11. Malamud M.M., Mogilevskii V.I. On extensions of dual pairs of operators. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 1997. № 1. С. 30—37.
12. Оліяр Ю.І., Сторож О.Г. Абстрактні крайові оператори та деякі класи розширень лінійних відношень. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2013. №4 . С. 19—22.
13. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. Москва: Мир, 1972. 740 с.
14. OliyarYu.I., Storozh O.G. On a criteria of mutual adjoiness for extensions of some nondensely defined operators. *Meth. Funct. Anal. Topol.* 2014. **20**, № 1. P. 50—58.
15. Сторож О.Г. Методи теорії розширень та диференціально-граничні оператори: дис. д-ра. фіз.-мат. наук/ Львівський державний університет ім. Івана Франка, Львів. 1995.

Надійшло до редакції 28.11.2017

REFERENCES

1. Arens, R. (1961). Operational calculus of linear relations. Pacif. J. Math., 11, No. 1, pp. 9-23. doi: https://doi.org/10.2140/pjm.1961.11.9

2. Coddington, E. A. (1973). Self-adjoint subspace extensions of nondensely defined linear symmetric operators. Bull. Amer. Math. Soc., 79, No. 4, pp. 712-715.
3. Dijksma, A. & Snoo, H. S. V. de. (1974). Self-adjoint extensions of symmetric subspaces. Pacif. J. Math., 54, No. 1, pp. 71-100. doi: https://doi.org/10.2140/pjm.1974.54.71
4. Rofe-Beketov, F. S. (1969). Self-adjoint extensions of differential operators in the spase of vector-functions. Dokl. AN SSSR, 184, No. 5, pp. 1034-1037 (in Russian).
5. Kochubei, A. N. (1975). Extensions of symmetric operators and symmetric linear relations. Mat. Zametki, 17, No. 1, pp. 41-48 (in Russian).
6. Gorbachuk, V. I. & Gorbachuk, M. L. (1984). Boundary value problems for differential-operator equations. Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
7. Krasnoselskij, M. A. (1949). On self-adjoint extensions of Hermitian operators. Ukr. Math. Zhurn., No. 1, pp. 21-38 (in Russian).
8. Strauss, A. W. (1968). On extensions and characteristic function of symmetric operator. Izv. AN SSSR, 32, No. 1, pp. 186-207 (in Russian).
9. Kochubei, A. N. (1977). The extensions of a nondensely defined symmetric operator. Sib. Math. J., 18, No. 2, pp. 225-229. doi: https://doi.org/10.1007/BF00967155
10. Derkach, V. A. & Mamalud, M. M. (1995). The extension theory of Hermitian operators and the moment problem. J. Math. Sci, 73, No. 2, pp. 141-242. doi: https://doi.org/10.1007/BF02367240
11. Malamud, M. M. & Mogilevskii, V. I. (1997). On extensions of dual pairs of operators. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 1, pp. 30-37 (in Ukrainian).
12. Olijar, Yu. I. & Storozh, O. G. (2013). Abstract boundary operators and some classes of extensions of linear relations. Dopov. Nac. acad. nauk Ukr., No. 4, pp. 19-22 (in Ukrainian).
13. Kato, T. (1972). Perturbation theory for linear operators. Moscow: Mir (in Russian).
14. Oliyar, Yu. I. & Storozh, O. G. (2014). On a criteria of mutual adjoiness for extensions of some nondensely definedoperators. Meth. Funct. Anal. Topol., 20, No. 1, pp. 50-58.
15. Storozh, O. G. (1995). Extension theory methods and differential-boundary operators. (Unpublished Doctor thesis). Ivan Franko Lviv State University, Lviv, Ukraine (in Ukrainian).

Received 28.11.2017

О.Г. Сторож

Львовский национальный университет им. Ивана Франко
E-mail: storog@ukr.net

РЕЗОЛЬВЕНТЫ СОБСТВЕННЫХ РАСШИРЕНИЙ
ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ И КОНЕЧНОМЕРНЫХ СУЖЕНИЙ
ПЛОТНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

В терминах абстрактных краевых операторов и соответствующих функций Вейля найдено резольвентное множество и построена резольвента собственного расширения замкнутого линейного отношения, в частности конечномерного сужения плотно определенного оператора в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: *гильбертово пространство, линейное отношение, расширение, резольвента.*

O.G. Storozh

Ivan Franko National University of Lviv
E-mail: storog@ukr.net

THE RESOLVENTS OF PROPER EXTENSIONS OF LINEAR RELATIONS
AND FINITE-DIMENSIONAL RESTRICTIONS OF DENSELY DEFINED OPERATORS

In the terms of abstract boundary operators and corresponding Weyl functions, the resolvent set of the so-called proper extensions of closed linear relations in a Hilbert space is established, and the resolvents of the mentioned extensions are constructed. The results are applied to the case where the initial relation is the graph of the finite-dimensional restriction of a closed densely defined operator.

Keywords: *Hilbert space, linear relation, extension, resolvent.*