ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.08.003
УДК 517.5

Е.С. Афанасьева [1], В.И. Рязанов [1], Р.Р. Салимов [2]

[1] Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск
[2] Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

К теории классов Соболева с критическим показателем

Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В.Я. Гутлянским

Установлено, что любой гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$ с внешней дилатацией $K_O(x,f)\in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}$ является так называемым нижним Q-гомеоморфизмом с $Q=K_O(x,f)$, а также кольцевым Q_*-гомеоморфизмом с $Q_*=K_O^{n-1}(x,f)$. Это позволяет исследовать локальное и граничное поведение отображений класса $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$.

Ключевые слова: *классы Соболева, критический показатель, внешняя и внутренняя дилатации, нижние и кольцевые Q-гомеоморфизмы.*

1. Предварительные замечания. Пусть D — область в $R^n, n\geqslant 2,$ и пусть $f:D\to R^n$ — непрерывное отображение. Если f имеет все первые частные производные в точке $x\in D$, то $f'(x)$ — якобиева матрица f, $\|f'(x)\|$ — её операторная норма, $\|f'(x)\|:=\sup\limits_{|h|=1}|f'(x)\cdot h|$ и $J_f(x)=$ $=\det f'(x)$ — якобиан отображения f. Напомним, что *внешняя дилатация* отображения f в точке x определяется равенством $K_O(x,f)=\dfrac{\|f'(x)\|^n}{|J_f(x)|}$, если $J_f(x)\neq 0$; $K_O(x,f)=1$, если $f'(x)=0$; $K_O(x,f)=\infty$ в остальных точках. *Внутренней дилатацией* отображения f в точке x называется величина $K_I(x,f)=\dfrac{|J_f(x)|}{l(f'(x))^n}$, где $l(f'(x))=\min\limits_{|h|=1}|f'(x)\cdot h|$, если $J_f(x)\neq 0$; $K_I(x,f)=1$, если $f'(x)=0$; $K_I(x,f)=\infty$ в остальных точках.

Следуя [1, разд. 9.2], далее *k-мерной поверхностью* S в R^n называется произвольное непрерывное отображение $S:\omega\to R^n$, где ω — открытое множество в R^k и $k=1,\ldots,n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называется число прообразов

$$N(S,y)=\operatorname{card} S^{-1}(y)=\operatorname{card}\{x\in\omega: S(x)=y\},\quad y\in R^n.$$

Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу (см., например, [2, с. 160]) и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k (см., например, теорему II(7.6) в [3]).

Для борелевской функции $\rho: R^n \to [0, \infty]$ ее *интеграл по поверхности* S определяется равенством

$$\int_S \rho\, dA := \int_{R^n} \rho(y) N(S, y)\, dH^k(y).$$

Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелева функция $\rho: R^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, пишут $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$, если

$$\int_S \rho^k dA \geqslant 1$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. *Модулем* семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int_{R^n} \rho^n(x)\, dm(x).$$

В дальнейшем через $\Delta(E, F; G)$ обозначаем совокупность всех кривых $\gamma: [0,1] \to R^n$, соединяющих произвольные множества E и F в множестве $G \subset R^n$, т. е. $\gamma(0) \in E$, $\gamma(1) \in F$ и $\gamma(t) \in G$ для всех $t \in (0,1)$.

2. О кольцевых и нижних Q-гомеоморфизмах. Пусть D и D' — области в $R^n, n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, $Q: R^n \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f: D \to D'$ является *кольцевым* Q*-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in \overline{D}$, если соотношение $M(\Delta(f(K_1), f(K_2); f(D)) \leqslant \int_{A \cap D} Q(x) \eta^n(|x - x_0|)\, dm(x)$ выполнено для любых двух континуумов K_1, K_2 из D, которые принадлежат разным компонентам дополнения в R^n колец $A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in R^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $\quad 0 < r_1 < r_2 < \infty$, и для каждой измеримой функции $\eta: (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что $\int_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1$. Также говорим, что гомеоморфизм $f: D \to D'$ есть *кольцевой* Q*-гомеоморфизм*, если f является кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Понятие кольцевого Q-гомеоморфизма впервые было введено в работе [4] в связи с исследованием уравнений Бельтрами на плоскости, а позднее было распространено на пространственный случай в работе [5] (см. также [1, 6]).

Говорят (см. [1, разд. 9.2]), что измеримая по Лебегу функция $\rho: R^n \to [0, \infty]$ является *обобщенно допустимой* для семейства Γ $(n-1)$-мерных поверхностей S в R^n, пишут $\rho \in \operatorname{ext\,adm} \Gamma$, если $\int_S \rho^{n-1} dA \geqslant 1$ для почти всех $S \in \Gamma$, т. е. за исключением подсемейства Γ нулевого модуля.

Гомеоморфизм $f: D \to D'$ называется *нижним* Q*-гомеоморфизмом в точке* x_0, если $M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geqslant \inf_{\rho \in \operatorname{ext\,adm} \Sigma_\varepsilon} \int_{D \cap A_\varepsilon} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)}\, dm(x)$ для каждого кольца $A_\varepsilon = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, где $d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, а Σ_ε — семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D, $S(x_0, r) = \{x \in R^n : |x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to D'$ является *нижним Q-гомеоморфизмом в области D*, если f является нижним Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Понятие нижнего Q-гомеоморфизма введено в работе [7] и теория таких отображений нашла интересные приложения в изучении краевых задач для уравнений Бельтрами, а также локального и граничного поведения классов Орлича—Соболева (см., например, [8—10]).

Следующее утверждение устанавливает связь между нижними и кольцевыми Q-гомеоморфизмами в R^n (см. следствие 5 в [9]).

Предложение 1. *Пусть D и D' — области в R^n, $n \geqslant 2$, и функция $Q : R^n \to (0, \infty)$ интегрируема в степени $n-1$ в некоторой окрестности точки $x_0 \in \overline{D}$. Если $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0, то f является кольцевым Q_*-гомеоморфизмом в точке x_0 с $Q_*(x) = Q^{n-1}(x)$.*

Замечание 1. В определениях нижних и кольцевых Q-гомеоморфизмов функцию Q достаточно задать только в области D или продолжить нулем вне D. По замечанию 8 в [9], заключение предложения 1 остается в силе, если функция Q интегрируема в степени $n-1$ лишь на почти всех сферах достаточно малых радиусов с центром в точке x_0.

3. О некоторых свойствах отображений класса Соболева $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$. По теореме 1.1 из недавней работы [11] имеет место следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть D — область в R^n, $n \geqslant 2$, и $f : D \to R^n$ — непрерывное открытое дискретное отображение класса $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$ с локально интегрируемой внутренней дилатацией. Тогда отображение f дифференцируемо почти всюду.*

При $n \geqslant 3$ этот результат был новым даже для гомеоморфизмов. При $n = 2$ по известной теореме Геринга—Лехто (1959) любое непрерывное открытое отображение, имеющее п. в. частные производные, дифференцируемо п. в. Заметим, что последний результат для гомеоморфизмов был доказан еще Меньшовым (1931) и его доказательство без изменений проходит и для непрерывных открытых отображений. По теореме Вяйсяля (1961) заключение сохраняет силу для непрерывных открытых отображений класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при любых $p > n-1$ и $n \geqslant 3$. В то же время известен пример Серрина (1961) непрерывных функций f класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}} \subset W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$, которые нигде не дифференцируемы.

Следствие 1. *Если открытое дискретное отображение $f : D \to R^n$ класса $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$ имеет внешнюю дилатацию локально интегрируемую в степени $n-1$, то f дифференцируемо почти всюду.*

Далее, по теореме 1.3 работы [12] имеем следующий важный результат.

Предложение 3. *Пусть $f : C \to R^n$, $n \geqslant 2$, — гомеоморфизм класса $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(C)$ в единичном кубе $C := (0,1)^n$. Тогда f обладает N-свойством Лузина относительно $n-1$-мерной меры Хаусдорфа на почти всех гиперплоскостях P, параллельных произвольной фиксированной координатной гиперплоскости P_0, т. е. для любого множества $E \subset P$, если $H^{n-1}(E) = 0$, то $H^{n-1}(f(E)) = 0$.*

Этот результат был распространен на произвольные непрерывные открытые дискретные отображения $f : D \to R^n$ класса $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$ (см. предложение 3.3 в [11]). Более того, любое непрерывное отображение $f : D \to R^m$, $m \geqslant 1$, класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$ обладает указанным свойством (см., например, теорему 3 в [9]). Однако это неверно даже для гомеоморфизмов $f: D \to R^n$ в классах $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ ни при каком $p < n-1$. Действительно, известны примеры С.П. Пономарева гомеоморфизмов $g: R^n \to R^n$, принадлежащих классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(R^n)$ для произвольного $p < n$, и не обладающих N-свойством Лузина (см. [13]). Если теперь $g(x)$ — такой пример в R^{n-1}, то $f(x,y) := (g(x), y)$, $x \in R^{n-1}$, $y \in R$, не удовлетворяет N-свойству Лузина на всех гиперплоскостях $y = \mathrm{const}$.

Лемма 1. *Пусть D и D' — области в $R^n, n \geqslant 2$, $f: D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$ с $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Тогда $\|f'\| \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$.*

4. Основная лемма.

Лемма 2. *Пусть D — область в $R^n, n \geqslant 2$, $f: D \to R^n$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$ с $K_O(\cdot,f) \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$ и пусть C — куб в R^n с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, такой что $\overline{C} \subset D$. Тогда сужение отображения f на C абсолютно непрерывно относительно $n-1$-мерной меры Хаусдорфа на почти всех гиперплоскостях P, параллельных произвольной фиксированной координатной гиперплоскости P_0. Кроме того, на почти всех таких гиперплоскостях P выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$, как только $f' = 0$ на измеримом множестве $E \subset P$.*

Заметим тот очевидный факт, что хаусдорфовы меры квазиинвариантны при квазиизометриях, а классы Соболева $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ инвариантны (см., например, секцию 1.1.7 в [14]). По свойству Линделефа в R^n (см., например, секцию I.5.XI в [15]) множество $D \setminus \{x_0\}$ для любого $x_0 \in R^n$ может быть покрыто счетным числом открытых сегментов сферических колец в $D \setminus \{x_0\}$ с центром в точке x_0, и каждый такой сегмент может быть отображен на единичный куб в R^n посредством квазиизометрии, переводящих куски сфер в куски гиперплоскостей.

Таким образом, на основе предложений 2 и 3, а также применяя лемму 2, приходим к следующим выводам.

Следствие 2. *Пусть D — область в $R^n, n \geqslant 2$, $f: D \to R^n$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Тогда отображение f дифференцируемо почти всюду и обладает N-свойством Лузина относительно $n-1$-мерной меры Хаусдорфа на почти всех сферах S с центром в произвольной точке $x_0 \in R^n$. Более того, если дополнительно $K_O(\cdot,f) \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$, то отображение f на почти всех таких сферах S локально абсолютно непрерывно и, кроме того, $H^{n-1}(f(E)) = 0$, как только $f' = 0$ на измеримом множестве $E \subset S$.*

5. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть D и D' — области в $R^n, n \geqslant 2$, $f: D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$ с $K_O(x,f) \in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Тогда f является нижним Q-гомеоморфизмом в произвольной точке $x_0 \in \overline{D}$ с $Q = K_O(x,f)$.*

Комбинируя предложение 2 и теорему 1, получаем еще одно важное следствие.

Следствие 3. *Пусть $f: D \to D'$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$ с $K_O(\cdot,f) \in$ $\in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Тогда f является кольцевым Q_*-гомеоморфизмом с $Q_* = K_O^{n-1}(x,f)$.*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. Moduli in modern mapping theory. New York: Springer, 2009. 367 p.
2. Rado T., Reichelderfer P.V. Continuous transformations in analysis. Berlin: Springer, 1955. 442 p.
3. Сакс С. Теория интеграла. Москва: Изд-во иностр. лит., 1949, 494 с.

4. Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. On ring solutions of Beltrami equation. *J. Anal. Math.*, 2005. **96**. P. 117—150.
5. Рязанов В.И., Севостьянов Е.А. Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов. *Сиб. матем. журн.* 2007. **48**, № 6. С. 1361—1376.
6. Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E. The Beltrami equation: A geometric approach. Developments of Mathematics. Vol. 26. New York etc.: Springer, 2012. 302 p.
7. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И. К теории нижних Q-гомеоморфизмов. *Укр. мат. вестн.* 2008. **5**, № 2. С. 159—184.
8. Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанов В.И., Салимов Р.Р. Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами. *Алгебра и анализ.* 2013. **25**, № 4. С. 101—124.
9. Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории классов Орлича—Соболева. *Алгебра и анализ.* 2013. **25**, № 6. С. 50—102.
10. Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А. К теории отображений классов Соболева и Орлича—Соболева: Под общей ред. Рязанова В.И. Киев: Наук. думка, 2013. 304 с.
11. Tengvall V. Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. Calc. Var. Part. Differ. Equat. 2014. **51**, № 1—2. P. 381—399.
12. Csörnyei M., Hencl S., Maly J. Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. *J. Reine Angew. Math.* 2010. № 644. P. 221—235.
13. Пономарёв С.П. Об N-свойстве гомеоморфизмов класса W_p^1. *Сиб. матем. журн.* 1987. **28**, № 2. С. 140—148.
14. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. Ленинград: Изд-во Ленигр. ун-та, 1985. 416 с.
15. Куратовский К. Топология. Т. 1. Москва: Мир, 1966. 594 с.

Поступило в редакцию 26.03.2019

REFERENCES

1. Martio, O., Ryazanov, V., Srebro, U. & Yakubov, E. (2009). Moduli in modern mapping theory. New York: Springer.
2. Rado, T. & Reichelderfer, P. V. (1955). Continuous transformations in analysis. Berlin: Springer.
3. Saks, S. (1949). Integral teory. Moscow: Izd-vo Inostr. lit. (in Russian).
4. Ryazanov, V., Srebro, U. & Yakubov, E. (2005). On ring solutions of Beltrami equation. J. Anal. Math., 96, pp. 117-150.
5. Ryazanov, V. I. & Sevostyanov, E. A. (2007). Equicontinuous classes of ring homeomorphisms. Sib. matem. zhurn., 48, No. 6, pp. 1361-1376.
6. Gutlyanskii, V., Ryazanov, V., Srebro, U. & Yakubov, E. (2012). The Beltrami equation: A geometric approach. Developments of Mathematics, Vol. 26. New York etc.: Springer.
7. Kovtonyuk, D. A. & Ryazanov, V. I. (2008). On the theory of lower Q-homeomorphisms. Ukr. mat. vestnik, 5, No. 2, pp. 159-184 (in Russian).
8. Kovtonyuk, D. A., Petkov, I. V., Ryazanov, V. I. & Salimov, R. R. (2013). Boundary behavior and the Dirichlet problem for the Beltrami equations. Algebra i analiz, 25, No. 4, pp. 101-124 (in Russian).
9. Kovtonyuk, D. A., Ryazanov, V. I., Salimov, R. R. & Sevostyanov, E. A. (2013). On the theory of Orlich-Sobolev classes. Algebra i analiz, 25, No. 6, pp. 50-102 (in Russian).
10. Kovtonyuk, D. A., Salimov, R. R. & Sevostyanov, E. A. (2013). On the theory of mappings of classes Sobolev and Orlich-Sobolev. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
11. Tengvall, V. (2014). Differentiability in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. Calc. Var. Part. Differ. Equat., 51, No. 1-2, pp. 381-399.
12. Csörnyei, M., Hencl, S. & Maly, J. (2010). Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$. J. Reine Angew. Math., No. 644, pp. 221-235.
13. Ponomarev, S. P. (1987). On N-properties of classes W_p^1 homeomorphisms. Sib. matem. zhurn., 28, No. 2, pp. 140-148 (in Russian).
14. Mazya, V. G. (1985). Spaces S.L. Sobolev. Leningrad: Izd-vo Leningr. un-ta (in Russian).
15. Kuratovskij, K. (1966). Topology. Vol. 1. Moscow: Mir (in Russian).

Received 26.03.2019

О.С. Афанасьєва[1], *В.І. Рязанов*[1], *Р.Р. Салімов*[2]

[1] Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ
[2] Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

ДО ТЕОРІЇ КЛАСІВ СОБОЛЄВА З КРИТИЧНИМ ПОКАЗНИКОМ

Встановлено, що будь-який гомеоморфізм f класу Соболєва $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$ із зовнішньою дилатацією $K_O(x,f)\in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}$ є так званим нижнім Q-гомеоморфізмом із $Q=K_O(x,f)$ та кільцевим Q_*-гомеоморфізмом із $Q_*=K_O^{n-1}(x,f)$. Це дає можливість дослідити локальну та граничну поведінку відображень класу $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$.

Ключові слова: *класи Соболєва, критичний показник, зовнішня та внутрішня дилатації, нижні та кільцеві Q-гомеоморфізми.*

O.S. Afanas'eva[1], *V.I. Ryazanov*[1], *R.R. Salimov*[2]

[1] Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine, Slovyansk
[2] Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: es.afanasjeva@gmail.com, vl.ryazanov1@gmail.com, ruslan.salimov1@gmail.com

TOWARD THE THEORY OF THE SOBOLEV CLASSES WITH CRITICAL EXPONENT

It is established that an arbitrary homeomorphism f in the Sobolev class $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$ with the outer dilatation $K_O(x,f)\in L^{n-1}_{\mathrm{loc}}$ is the so-called lower Q-homeomorphism with $Q=K_O(x,f)$ and the ring Q_*-homeomorphism with $Q_*=K_O^{n-1}(x,f)$. These results make it possible to research the local and boundary behaviors of the mappings $W^{1,n-1}_{\mathrm{loc}}$.

Keywords: *Sobolev's classes, critical exponent, outer and inner dilatations, lower and ring Q-homeomorphisms.*