ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.06.003
УДК 517.95

О.О. Ванєєва [1], https://orcid.org/0000-0003-1841-0342

О.Ю. Жалій [1], https://orcid.org/0000-0002-8188-3161

О.В. Магда [2], https://orcid.org/0000-0002-4732-004X

[1] Інститут математики НАН України, Київ
[2] Київський національний економічний університет ім. Вадима Гетьмана
E-mails: vaneeva@imath.kiev.ua, zhaliy@imath.kiev.ua, olena.magda@gmail.com

Класифікація лiївських редукцій узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами

Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним

Клас узагальнених рівнянь Кавахари з коефіцієнтами, що залежать від часу, розглянуто з симетрійної точки зору. Проведено класифікацію ліївських редукцій рівнянь з такого класу. Для кожного випадку розширення ліївської симетрії визначено тип максимальної алгебри інваріантності відповідного рівняння Кавахари, побудовано оптимальну систему одновимірних підалгебр такої алгебри, які використано для знаходження ліївських анзаців. Виконано редукції рівняння Кавахари до звичайних диференціальних рівнянь, а також побудовано деякі точні ліївські інваріантні розв'язки.

Ключові слова: *ліївські симетрії, метод редукції, рівняння Кавахари, групова класифікація, точні розв'язки.*

Класичне рівняння Кавахари виду

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} + \sigma u_{xxxxx} = 0$$

було запропоновано в 1972 р. як модель у теорії солітонів [1], при цьому сталу α було зафіксовано як $3/2$, тоді як β і σ розглядались як довільні ненульові сталі, що відповідають за ефект дисперсії. Пізніше було запропоновано ряд узагальнень рівняння Кавахари (огляд літератури див. у [2]). Наскільки нам відомо, рівняння Кавахари з трьома коефіцієнтами, що залежать від часу, вперше було розглянуто в роботі [3], слід зазначити, що там не було отримано вичерпної класифікації ліївських симетрій, а наведено лише певні випадки розширення ліївської симетрії для таких рівнянь.

Цитування: Ванєєва О.О., Жалій О.Ю., Магда О.В. Класифікація ліївських редукцій узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 6. С. 3—9. https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.06.003

Найширший клас узагальнених рівнянь Кавахари із залежними від часу коефіцієнтами складається з рівнянь виду

$$u_t+\alpha(t)f(u)u_x+\beta(t)u_{xxx}+\sigma(t)u_{xxxxx}=0, \tag{1}$$

де f, α, β і σ — гладкі функції своїх змінних, причому $f_u\alpha\beta\sigma\neq 0$. Певні випадки розширення ліївської симетрії, а також закони збереження таких рівнянь було знайдено в роботі [4]. Трансформаційні властивості класу (1) вичерпно досліджено в нашій попередній роботі [5], де було доведено, що цей клас не є нормалізованим, але може бути представлений як об'єднання двох неперетинних нормалізованих підкласів, виокремлених умовами $f_{uu}\neq 0$ і $f_{uu}=0$ (строгу теорію про трансформаційні властивості класів диференціальних рівнянь було розвинено в роботі [6]). У роботі [5] також було побудовано відповідні розширені узагальнені групи еквівалентності для обох підкласів і показано, що оптимальним калібруванням довільних елементів є калібрування $\alpha=1$, яке реалізується сімейством точкових перетворень $\tilde t=\int_{t_0}^{t}\alpha(y)\mathrm{d}y$, $\tilde x=x$, $\tilde u=u$, з групи еквівалентності класу. Без втрати загальності ми можемо обмежитися дослідженням класу

$$u_t+f(u)u_x+\beta(t)u_{xxx}+\sigma(t)u_{xxxxx}=0,\quad f_u\beta\sigma\neq 0, \tag{2}$$

замість ширшого класу (1). Повну класифікацію ліївських симетрій рівнянь (2) (відповідно (1)) було виконано в [5]. Для того щоб завершити груповий аналіз узагальнених рівнянь Кавахари з коефіцієнтами, що залежать від часу, у цій статті ми виконаємо класифікацію їх ліївських редукцій і побудуємо деякі точні розв'язки.

Ліївські редукції та точні розв'язки. Метод редукції за підалгебрами максимальних алгебр ліївської інваріантності є алгоритмічним і добре відомим [7]. Оскільки рівняння (2) є (1+1)-вимірними нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними, ліївські редукції за допомогою одновимірних підалгебр їхніх максимальних алгебр ліївської інваріантності зредукують такі рівняння до звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Щоб отримати нееквівалентні редукції, слід використовувати підалгебри з так званої *оптимальної системи підалгебр* [7, §3.3].

Розглянемо загальний вигляд оператора ліївської симетрії $Q=\tau(t,x,u)\partial_t+\xi(t,x,u)\partial_x+$ $+\eta(t,x,u)\partial_u$, який утворює базис відповідної одновимірної підалгебри з побудованої оптимальної системи, тоді анзац знаходиться як розв'язок умови інваріантної поверхні $Q[u]:=\tau u_t+\xi u_x-\eta=0$. На практиці потрібно розв'язувати відповідну характеристичну систему $\dfrac{\mathrm{d}t}{\tau}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\xi}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\eta}$.

Ядром максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу (2) з $f_{uu}\neq 0$ є одновимірна алгебра $\langle\partial_x\rangle$. Розглянемо один за одним усі нееквівалентні рівняння з класу (2), що допускають розширення ліївської симетрії (кількість випадків відповідає наведеним у [5, табл. 1]). У кожному випадку разом із рівнянням L_i з класу (2) ми перераховуємо відповідну максимальну алгебру ліївської інваріантності $A^{\max}$, її тип згідно з класифікацією низькорозмірних алгебр, наведеною в [8], оптимальну систему (ОС) одновимірних підалгебр, ліївський анзац та інваріантну змінну ω, і, нарешті, редуковане ЗДР RL_i. У кожному випадку ми не наводимо редукцію за підалгеброю $\langle \mathfrak{g}_0 = \partial_x \rangle$, оскільки це призводить лише до тривіальних сталих розв'язків. Нижче a, ρ і C — довільні сталі, λ і δ — ненульові сталі, $\varepsilon = \{-1, 0, 1\}$.

Випадок 1. $L_1 : u_t + f(u)u_x + \lambda t^2 u_{xxx} + \delta t^4 u_{xxxxx} = 0$,

$A^{\max} = \langle \partial_x, t\partial_t + x\partial_x \rangle$ (неабелева алгебра A_2),

ОС: $\{\langle \mathfrak{g}_0 = \partial_x \rangle, \langle \mathfrak{g}_1 = t\partial_t + x\partial_x \rangle\}$,

$\mathfrak{g}_1$: анзац $u = \varphi(\omega)$, де $\omega = x/t$,

$RL_1 : \delta\varphi''''' + \lambda\varphi''' + f(\varphi)\varphi' - \omega\varphi' = 0$.

Випадок 2. $L_2 : u_t + f(u)u_x + \lambda u_{xxx} + \delta u_{xxxxx} = 0$,

$A^{\max} = \langle \partial_x, \partial_t \rangle$ (абелева алгебра $2A_1$),

ОС: $\{\langle \mathfrak{g}_0 = \partial_x \rangle, \langle \mathfrak{g}_2 = \partial_t + a\partial_x \rangle\}$,

$\mathfrak{g}_2$: анзац $u = \varphi(\omega)$, де $\omega = x - at$,

$RL_2 : \delta\varphi''''' + \lambda\varphi''' + f(\varphi)\varphi' - a\varphi' = 0$.

Випадок 3. $L_3 : u_t + \ln(u)u_x + \beta(t)u_{xxx} + \sigma(t)u_{xxxxx} = 0$,

$A^{\max} = \langle \partial_x, t\partial_x + u\partial_u \rangle$ (абелева алгебра $2A_1$),

ОС: $\{\langle \mathfrak{g}_0 = \partial_x \rangle, \langle \mathfrak{g}_3 = (t+a)\partial_x + u\partial_u \rangle\}$,

$\mathfrak{g}_3$: анзац $u = e^{\frac{x}{t+a}}\varphi(\omega)$, де $\omega = t$,

$RL_3 : \varphi' + \dfrac{\varphi \ln\varphi}{\omega + a} + \dfrac{\beta(\omega)\varphi}{(\omega+a)^3} + \dfrac{\sigma(\omega)\varphi}{(\omega+a)^5} = 0$.

Це ЗДР можна проінтегрувати:

$$\varphi = \exp\left(\frac{C - \displaystyle\int \frac{\beta(\omega)}{(\omega+a)^2}\mathrm{d}\omega - \int \frac{\sigma(\omega)}{(\omega+a)^4}\mathrm{d}\omega}{\omega + a} \right).$$

Відповідний точний розв'язок рівняння L_3:

$$u = \exp\left(\frac{x + C - \displaystyle\int \frac{\beta(t)}{(t+a)^2}\mathrm{d}t - \int \frac{\sigma(t)}{(t+a)^4}\mathrm{d}t}{t + a} \right).$$

Випадок 4. $L_4 : u_t + \ln(u)u_x + \lambda t^2 u_{xxx} + \delta t^4 u_{xxxxx} = 0$,

$A^{\max} = \langle \partial_x, t\partial_x + u\partial_u, t\partial_t + x\partial_x \rangle$ (алгебра типу $A_1 \oplus A_2$),

ОС: $\{\langle \mathfrak{g}_0 = \partial_x \rangle, \langle \mathfrak{g}_4^a = t\partial_t + (x+at)\partial_x + au\partial_u \rangle, \langle \mathfrak{g}_4^\varepsilon = (t+\varepsilon)\partial_x + u\partial_u \rangle\}$,

$\mathfrak{g}_4^a$: анзац $u = t^a\varphi(\omega)$, де $\omega = \dfrac{x}{t} - a\ln t$,

$RL_{4,a}: \delta\varphi''''' + \lambda\varphi''' + (\ln\varphi - \omega - a)\varphi' + a\varphi = 0$;

$\mathfrak{g}_4^{\varepsilon}$: анзац $u = e^{\frac{x}{t+\varepsilon}}\varphi(\omega)$, де $\omega = t$,

$$RL_{4,\varepsilon}: \varphi' + \frac{\varphi\ln\varphi}{\omega+\varepsilon} + \frac{\lambda\omega^2\varphi}{(\omega+\varepsilon)^3} + \frac{\delta\omega^4\varphi}{(\omega+\varepsilon)^5} = 0.$$

Рівняння $RL_{4,\varepsilon}$ є частинним випадком рівняння RL_3 і може бути проінтегрованим. Відповідний точний розв'язок рівняння L_4:

$$u = \exp\left(\frac{x + C + \lambda\left(\dfrac{\varepsilon^2}{t+\varepsilon} + 2\varepsilon\ln(t+\varepsilon) - t\right) + \delta\left(\dfrac{\varepsilon^2}{3}\dfrac{18t^2 + 30\varepsilon t + 13\varepsilon^2}{(t+\varepsilon)^3} + 4\varepsilon\ln(t+\varepsilon) - t\right)}{t+\varepsilon}\right).$$

Випадок 5. $L_5: u_t + \ln(u)u_x + \lambda u_{xxx} + \delta u_{xxxxx} = 0,$

$A^{\max} = \langle \partial_x, t\partial_x + u\partial_u, \partial_t\rangle$ (алгебра Вейля $A_{3.1}$)

ОС: $\{\langle \mathfrak{g}_0 = \partial_x\rangle, \langle \mathfrak{g}_5 = \partial_t\rangle, \langle \mathfrak{g}_5^a = a\partial_t + t\partial_x + u\partial_u\rangle\}$,

$\mathfrak{g}_5$: анзац $u = \varphi(\omega)$, де $\omega = x$,

$RL_5: \delta\varphi''''' + \lambda\varphi''' + \ln\varphi\varphi' = 0$;

$\mathfrak{g}_5^a$: анзац $u = e^{\frac{t}{a}}\varphi(\omega)$, де $\omega = x - \dfrac{t^2}{2a}$, $a \neq 0$,

$RL_{5,a}: \delta\varphi''''' + \lambda\varphi''' + \ln\varphi\varphi' + \dfrac{1}{a}\varphi = 0$;

$\mathfrak{g}_5^0$: анзац $u = e^{\frac{x}{t}}\varphi(\omega)$, де $\omega = t$,

$$RL_{5,0}: \varphi' + \frac{\varphi\ln\varphi}{\omega} + \frac{\lambda\varphi}{\omega^3} + \frac{\delta\varphi}{\omega^5} = 0.$$

Розв'язок $\varphi = \exp\left(\dfrac{C\omega^3 + 3\lambda\omega^2 + \delta}{3\omega^4}\right)$ рівняння $RL_{5,0}$ призводить до такого розв'язку рівняння L_5:

$$u = \exp\left(\frac{(3x + C)t^3 + 3\lambda t^2 + \delta}{3t^4}\right).$$

Випадок 6.1. $L_{6.1}: u_t + u^n u_x + \lambda t^{\rho} u_{xxx} + \delta t^{\frac{5\rho+2}{3}} u_{xxxxx} = 0$, $\rho \neq -1$, $\quad \neq 0$,

$A^{\max} = \langle \partial_x, 3nt\partial_t + (\rho+1)nx\partial_x + (\rho-2)u\partial_u\rangle$ (неабелева алгебра A_2),

ОС: $\{\langle \mathfrak{g}_0 = \partial_x\rangle, \langle \mathfrak{g}_{6.1} = 3nt\partial_t + (\rho+1)nx\partial_x + (\rho-2)u\partial_u\rangle\}$,

$\mathfrak{g}_{6.1}$: анзац $u = t^{\frac{\rho-2}{3n}}\varphi(\omega)$, де $\omega = xt^{-\frac{\rho+1}{3}}$,

$$RL_{6.1}: \delta\varphi''''' + \lambda\varphi''' + \varphi^n\varphi' - \frac{\rho+1}{3}\omega\varphi' + \frac{\rho-2}{3n}\varphi = 0.$$

Випадок 6.2. $L_{6.2}: u_t + u^n u_x + \lambda t^{-1} u_{xxx} + \delta t^{-1} u_{xxxxx} = 0$, $n \neq 0$,

$A^{\max} = \langle \partial_x, nt\partial_t - u\partial_u \rangle$ (абелева алгебра $2A_1$),

ОС: $\{\langle \mathfrak{g}_0 = \partial_x \rangle, \langle \mathfrak{g}_{6.2} = nt\partial_t + a\partial_x - u\partial_u \rangle\}$,

$\mathfrak{g}_{6.2}$: анзац $u = t^{-\frac{1}{n}} \varphi(\omega)$, де $\omega = x - \frac{a}{n} \ln t$,

$RL_{6.2}: \delta\varphi''''' + \lambda\varphi''' + \varphi^n \varphi' - \frac{a}{n}\varphi' - \frac{1}{n}\varphi = 0$.

Випадок 7. $L_7: u_t + u^n u_x + \lambda e^t u_{xxx} + \delta e^{\frac{5}{3}t} u_{xxxxx} = 0$, $n \neq 0$,

$A^{\max} = \langle \partial_x, 3n\partial_t + nx\partial_x + u\partial_u \rangle$ (неабелева алгебра A_2),

ОС: $\{\langle \mathfrak{g}_0 = \partial_x \rangle, \langle \mathfrak{g}_7 = 3n\partial_t + nx\partial_x + u\partial_u \rangle\}$,

$\mathfrak{g}_7$: анзац $u = e^{\frac{t}{3n}} \varphi(\omega)$, де $\omega = x e^{-\frac{t}{3}}$,

$RL_7: \delta\varphi''''' + \lambda\varphi''' + \varphi^n \varphi' - \frac{1}{3}\omega\varphi' + \frac{1}{3n}\varphi = 0$.

Випадок 8.1. $L_{8.1}: u_t + e^u u_x + \lambda t^{\rho} u_{xxx} + \delta t^{\frac{5\rho+2}{3}} u_{xxxxx} = 0$, $\rho \neq -1$,

$A^{\max} = \langle \partial_x, 3t\partial_t + (\rho+1)x\partial_x + (\rho-2)\partial_u \rangle$ (неабелева алгебра A_2),

ОС: $\{\langle \mathfrak{g}_0 = \partial_x \rangle, \langle \mathfrak{g}_{8.1} = 3t\partial_t + (\rho+1)x\partial_x + (\rho-2)\partial_u \rangle\}$,

$\mathfrak{g}_{8.1}$: анзац $u = \varphi(\omega) + \frac{\rho-2}{3}\ln t$, де $\omega = x t^{-\frac{\rho+1}{3}}$,

$RL_{8.1}: \delta\varphi''''' + \lambda\varphi''' + e^{\varphi}\varphi' - \frac{\rho+1}{3}\omega\varphi' + \frac{\rho-2}{3} = 0$.

Випадок 8.2. $L_{8.2}: u_t + e^u u_x + \lambda t^{-1} u_{xxx} + \delta t^{-1} u_{xxxxx} = 0$,

$A^{\max} = \langle \partial_x, t\partial_t - \partial_u \rangle$ (абелева алгебра $2A_1$),

ОС: $\{\langle \mathfrak{g}_0 = \partial_x \rangle, \langle \mathfrak{g}_{8.2} = t\partial_t + a\partial_x - \partial_u \rangle\}$,

$\mathfrak{g}_{8.2}$: анзац $u = \varphi(\omega) - \ln t$, де $\omega = x - a\ln t$,

$RL_{8.2}: \delta\varphi''''' + \lambda\varphi''' + e^{\varphi}\varphi' - a\varphi' - 1 = 0$.

Випадок 9. $L_9: u_t + e^u u_x + \lambda e^t u_{xxx} + \delta e^{\frac{5}{3}t} u_{xxxxx} = 0$,

$A^{\max} = \langle \partial_x, 3\partial_t + x\partial_x + \partial_u \rangle$ (неабелева алгебра A_2),

ОС: $\{\langle \mathfrak{g}_0 = \partial_x \rangle, \langle \mathfrak{g}_9 = 3\partial_t + x\partial_x + \partial_u \rangle\}$,

$\mathfrak{g}_9$: анзац $u = \varphi(\omega) + \frac{t}{3}$, де $\omega = x e^{-\frac{t}{3}}$,

$RL_9: \delta\varphi''''' + \lambda\varphi''' + e^{\varphi}\varphi' - \frac{1}{3}\omega\varphi' + \frac{1}{3} = 0$.

Редукції, виконані у випадках 2, 6.1, 6.2 і 7, справедливі також для випадку $f(u) = u$ (або $n = 1$). Згідно з [2], де цей випадок було детально досліджено, ми наводимо три додаткові нееквівалентні редукції рівнянь

$$u_t + uu_x + \beta(t)u_{xxx} + \sigma(t)u_{xxxxx} = 0, \quad \beta\sigma \neq 0, \tag{3}$$

для повноти одержаних результатів.

Анзац $u = \varphi(\omega) + \dfrac{x}{t+a}$, де $\omega = t$, побудований за допомогою підалгебри $\langle (t+a)\partial_x + \partial_u \rangle$ редукує рівняння (3) до ЗДР першого порядку $(\omega + a)\varphi' + \varphi = 0$. Його розв'язок $\varphi = \dfrac{C}{\omega + a}$ призводить до так званого "виродженого" розв'язку $u = \dfrac{x+C}{t+a}$ рівняння (3).

Анзац $u = 2t/a + \varphi(\omega)$, де $\omega = x - t^2/a$, $a \neq 0$, отримано з підалгебри $\langle a\partial_t + 2t\partial_x + 2\partial_u \rangle$, редукує рівняння

$$u_t + uu_x + \lambda u_{xxx} + \delta u_{xxxxx} = 0,$$

до ЗДР $\delta\varphi''''' + \lambda\varphi''' + \varphi\varphi' + 2/a = 0$.

Останній випадок стосується рівняння

$$u_t + uu_x + \lambda(t^2+1)^{\frac{1}{2}} e^{3\nu\arctan t} u_{xxx} + \delta(t^2+1)^{\frac{3}{2}} e^{5\nu\arctan t} u_{xxxxx} = 0, \tag{4}$$

де ν — довільна стала. Анзац $u = \dfrac{e^{\nu\arctan t}}{\sqrt{t^2+1}}\varphi(\omega) + \dfrac{xt}{t^2+1}$, де $\omega = \dfrac{xe^{-\nu\arctan t}}{\sqrt{t^2+1}}$, побудований за допомогою підалгебри $\langle (t^2+1)\partial_t + (t+\nu)x\partial_x + (x + (\nu - t)u)\partial_u \rangle$ редукує рівняння (4) до ЗДР $\delta\varphi''''' + \lambda\varphi''' + (\varphi - \nu\omega)\varphi' + \nu\varphi + \omega = 0$.

Отже, класифікацію нееквівалентних ліївських редукцій рівнянь (2) (відповідно (1)) завершено. Отримані редукції також можуть бути використані для розв'язання відповідних інваріантних крайових задач (див. [9, 10]).

Роботу виконано за підтримки гранта НАН України (НДР № 0121U110543) та стипендії імені академіка Б.Є. Патона для молодих вчених НАН України.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media. *J. Phys. Soc. Japan*. 1972. **33**. P. 260—264. https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.260
2. Kuriksha O., Pošta S., Vaneeva O. Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2014. **47**. 045201. 19 p. https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/4/045201
3. Kaur L., Gupta R.K. Kawahara equation and modified Kawahara equation with time dependent coefficients: symmetry analysis and generalized (G'/G)-expansion method. *Math. Methods Appl. Sci.* 2013. **36**, № 5. P. 584—600. https://doi.org/10.1002/mma.2617
4. Gandarias M.L., Rosa M., Recio E., Anco S. Conservation laws and symmetries of a generalized Kawahara equation. *AIP Conf. Proc.* 2017. **1836**. 020072. 6 p. https://doi.org/10.1063/1.4982012
5. Ванєєва О.О., Жалій О.Ю. Ліївські симетрії узагальнених рівнянь Кавахари. *Доп. Нац. акад. наук Укр.* 2020. № 12. С. 3—10. https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.12.003
6. Vaneeva O.O., Bihlo A., Popovych R.O. Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2020. **91.** 105419. 28 p. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105419
7. Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. 2nd ed. New York: Springer, 1993. 516 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4350-2
8. Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras. *J. Math. Phys.* 1977. **18**. P. 1449—1455. https://doi.org/10.1063/1.523441

9. Vaneeva O.O., Sophocleous C., Leach P.G.L. Lie symmetries of generalized Burgers equations: application to boundary-value problems. *J. Eng. Math.* 2015. **91**, № 1. P. 165—176. https://doi.org/10.1007/s10665-014-9741-2
10. Vaneeva O.O., Papanicolaou N.C., Christou M.A., Sophocleous C. Numerical solutions of boundary value problems for variable coefficient generalized KdV equations using Lie symmetries. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2014. **19**, № 9. P. 3074—3085. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.01.009

Надійшло до редакції 26.09.2022

REFERENCES

1. Kawahara, T. (1972). Oscillatory solitary waves in dispersive media. J. Phys. Soc. Japan, 33, pp. 260-271. https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.260
2. Kuriksha, O., Pošta, S. & Vaneeva, O. (2014). Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations. J. Phys. A: Math. Theor., 47, 045201, 19 p. https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/4/045201
3. Kaur, L. & Gupta, R. K. (2013). Kawahara equation and modified Kawahara equation with time dependent coefficients: symmetry analysis and generalized (G'/G)-expansion method. Math. Meth. Appl. Sci., 36, No. 5, pp. 584-600. https://doi.org/10.1002/mma.2617
4. Gandarias, M. L., Rosa, M., Recio, E. & Anco, S. (2017). Conservation laws and symmetries of a generalized Kawahara equation. AIP Conf. Proc., 1836, 020072, 6 p. https://doi.org/10.1063/1.4982012
5. Vaneeva, O. O. & Zhalij, A. Yu. (2020). Lie symmetries of generalized Kawahara equations. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 12, pp. 3-10 (in Ukrainian). https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.12.003
6. Vaneeva, O. O., Bihlo, A. & Popovych, R. O. (2020). Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 91, 105419, 28 p. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105419
7. Olver, P. J. (1993). Applications of Lie groups to differential equations. 2nd edn. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4350-2
8. Patera, J. & Winternitz, P. (1977). Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras. J. Math. Phys., 18, pp. 1449-1455. https://doi.org/10.1063/1.523441
9. Vaneeva, O. O., Sophocleous, C. & Leach, P. G. L. (2015). Lie symmetries of generalized Burgers equations: application to boundary-value problems. J. Eng. Math., 91, No. 1, pp. 165-176. https://doi.org/10.1007/s10665-014-9741-2
10. Vaneeva, O. O., Papanicolaou, N. C., Christou, M. A. & Sophocleous, C. (2014). Numerical solutions of boundary value problems for variable coefficient generalized KdV equations using Lie symmetries. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 19, No. 9, pp. 3074-3085. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.01.009

Received 26.09.2022

O. O. Vaneeva [1], https://orcid.org/0000-0003-1841-0342
O. Yu. Zhalij [1], https://orcid.org/0000-0002-8188-3161
O. V. Magda [2], https://orcid.org/0000-0002-4732-004X

[1] Institute of mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv

[2] Vadym Hetman Kyiv National Economic University

E-mails: vaneeva@imath.kiev.ua, zhaliy@imath.kiev.ua, olena.magda@gmail.com

CLASSIFICATION OF LIE REDUCTIONS
OF GENERALIZED KAWAHARA EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

A class of generalized Kawahara equations with time-dependent coefficients is studied from Lie symmetry point of view. A classification of Lie reductions of equations from this class has been carried out. For each case of Lie symmetry extension, the type of the maximal invariance algebra of the corresponding Kawahara equation is determined, and the respective optimal system of one-dimensional subalgebras is found, which are further used to construct Lie ansatzes. Lie reductions of Kawahara equations to ordinary differential equations are performed, some exact Lie invariant solutions are also constructed.

Keywords: *Lie symmetries, reduction method, Kawahara equations, group classification, exact solutions.*