УДК 658.78+510(022)

А.Л. Маковский

кандидат технических наук, доцент
УО ФПБ «Международный університет “МИТСО”», г. Минск

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В статье рассматриваются примеры постановки задачи для решения логистических задач методами теории массового обслуживания и линейного программирования.

Ключевые слова: *логистика, системы массового обслуживания, методы линейного программирования.*

I. Вступление

Современное состояние логистики много в чем определяется бурным развитием и внедрением во все сферы информационно-компьютерных технологий. Реализация большинства логистических концепций и систем была бы невозможной без использования быстродействующих компьютеров, локальных вычислительных сетей, телекоммуникационных систем и информационно-программного обеспечения. Значение информационного обеспечения логистического процесса настолько велико, что многие специалисты выделяют особую логистику, которая имеет самостоятельное значение в бизнесе и управлении информационными потоками и ресурсами. Эту функциональную область логистики часто называют компьютерной.

II. Постановка задачи

Цель статьи – рассмотреть примеры постановки задачи для решения логистических задач методами теории массового обслуживания и линейного программирования.

III. Результати

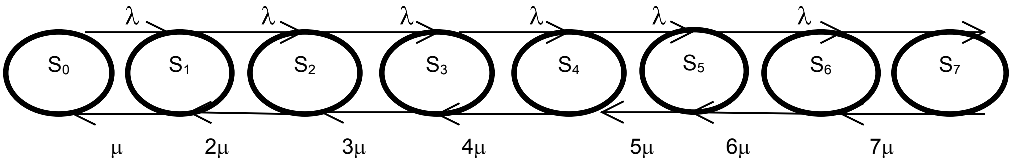
1.1 Постановка задачи с элементами систем массового обслуживания в логистических системах

Имеется склад с шестью терминалами для погрузки машин материалом.

Интенсивность потока машин для погрузки составляет четыре грузовика в час, среднее время обслуживания одной машины – 1 час 20 минут. Все потоки событий простейшие.

Найти финальную вероятность и характеристики эффективности для СМО с очередью (финальная вероятность с точностью до p_7).

Составим схему гибели и размножения многоканальной СМО с очередью:



Из условий, приведенных выше, мы имеем:

n = 6 – число каналов обслуживания;

λ = четыре грузовика в час – интенсивность потока;

$\mu = \frac{3}{4} = 0,75$ – интенсивность потока обслуживания;

$T_{об} = \frac{4}{3}$ минуты – среднее время обслуживания;

1. $P = \frac{\lambda}{\mu} \approx 5,3$ – нагрузка системы.

2. $\Psi = \frac{\rho}{n} < 1 \to 0,88$ – нормальная работа.

$$p_0 = (1+ \frac{6^1}{1!}\times 0,88^1 + \frac{6^2}{2!}\times 0,88^2 \times \frac{6^3}{3!}\times$$

3. $$\times 0,88^3 + \frac{6^4}{4!}\times 0,88^4 + \frac{6^5}{5!}\times 0,88^5 + \quad =$$

$$+\frac{6^6}{6!}\times 0,88^6 + \frac{6^6}{6!}\times\frac{0,88^7}{1 - 0,88})^{-1}$$

= 0,005 или 0,5% вероятность того, что канал свободен.

4. $p_1 = \frac{6^1}{1!}\times 0,88^1 \times 0,005 = 0,026$ или 2,6% того, что один канал занят;

$p_2 = \frac{6^2}{2!}\times 0,88^2 \times 0,005 = 0,069$ или 6,9% того, что два канала заняты;

$p_3 = \frac{6^3}{3!} \times 0,88^3 \times 0,005 = 0,073$ или 7,3% того, что три канала заняты;

$p_4 = \frac{6^4}{4!} \times 0,88^4 \times 0,005 = 0,162$ или 16,2% того, что четыре канала заняты;

$p_5 = \frac{6^5}{5!} \times 0,88^5 \times 0,005 = 0,171$ или 17,1% того, что пять каналов заняты;

$p_6 = \frac{6^6}{6!} \times 0,88^6 \times 0,005 = 0,15$ или 15% того, что шесть каналов заняты;

$p_7 = \frac{6^7}{7!} \times 0,88^7 \times 0,005 = 0,13$ или 13% того, что семь каналов заняты.

5. Вероятность отказа заявке равно нулю.

6. Вероятность того, что поступившая заявка будет принята к обслуживанию и будет принята в систему равна единице.

7. $P_{зан} = 1 - p_0 = 1 - 0,005 = 0,995$ или 99,5% вероятность того, что один канал будет занят.

8. Q = 1 – относительная пропускная способность.

9. $A = \lambda \times Q = \lambda \rightarrow 4$ – абсолютная пропускная способность.

10. $v = A = \lambda \rightarrow 4$ – интенсивность входящего потока.

11. $K_{ср} = N_{ср.об} = \rho \rightarrow 5,3$ среднее число заявок под обслуживанием/

12. $N_{ср.оч} = \frac{6^6}{6!} \times \frac{0,88^7}{(1-0,88)^2} \times 0,005 = 9,225$

среднее число заявок в очереди.

13. Nср.сис = 9,225 + 5,3 = 14,525 среднее число заявок в системе.

14. $T_{ср.оч} = \frac{9,225}{4} = 2,3$ минуты – среднее время пребывания заявки в очереди

15. $T_{ср.сис} = \frac{14,525}{4} = 3,6$ минуты – среднее число пребывания заявки в системе.

Задача практически решена и причем оптимальным образом.

1.2. Постановка задачи оптимизации работы предприятия методами линейного программирования

Предприятие выпускает три вида изделия, используя три вида ресурсов.

Ресурсы	Ед.изм.	Виды изделий			Суточный объем ресурса
		П1	П2	П3	
1. Материалы	д.е.	0,1	0,2	0,4	1 100
2. Трудовые	чел.-дней	0,05	0,02	0,02	120
3. Оборудование	ст.-час	3	1	2	8 000
Цена ед. изделия	д.е.	3	5	4	–
Себестоимость ед. изделия	д.е.	1	4	2	–

1. Определить входные и выходные потоки и построить логистическую систему производства.

2. Составить математическую модель процессов производства и найти оптимальные потоки, максимизирующий объем производства в стоимостном выражении (целевая функция F).

3. Составить математические модели процессов производства и найти оптимальные потоки, минимизирующие издержки производства (целевая функция Z).

4. Составить математические модели процессов производства и найти оптимальные потоки, минимизирующие прибыль предприятия (P).

5. Найти, как изменится план:

а) если запас сырья № 1 увеличится на четыре единицы, а запасы сырья № 3 уменьшатся на 10 единиц;

б) себестоимость продукции № 2 увеличится на три единицы, а продукции № 3 уменьшится на две единицы;

в) прибыль от продажи продукции № 1 уменьшится на две единицы, а продукции № 2 увеличится на четыре единицы.

6. Предприятие использует три вида ресурсов: материалы, трудовые ресурсы и оборудование **(входные потоки)** и может производить три вида изделий **(выходящие потоки)** (рис. 1).

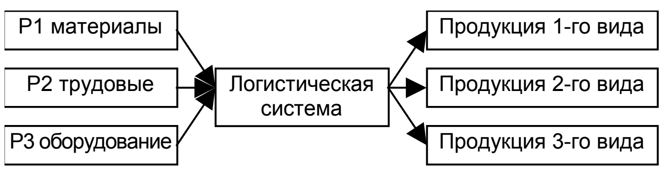


Рис.1. Структура производственной логистической системы

2. Математическая модель процесса производства для данного условия выглядит следующим образом:

Цель: максимизация прибыли.

Переменные: X1, X2, X3 – количество соответствующего вида продукции П1,П2,П3.

Целевая функция:

$$F(X)\ \max = 3x1 + 5x2 + 4x3\,.$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 0{,}1x1 + 0{,}2x2 + 0{,}4x3 \le 1100\,, \\ 0{,}05x1 + 0{,}02x2 + 0{,}02x3 \le 120\,, \\ 3x1 + x2 + 2x3 \le 8000 \\ x1,\ x2,\ x3 > 0. \end{cases}$$

Так как целевая функция и ограничения линейны, то задача может быть решена симплекс-методом.

	x1	x2	x3						
Переменные	250	5375	0						
Целевая функция	3	5	4						
	0,1	0,2	0,4	1100	<=	1100		мак	27625
	0,05	0,02	0,02	120	<=	120			
	3	1	2	6125	<=	8000			

При данной производственной программе предприятие получит следующую выручку от реализации своей продукции 27 625 д.е.

3. Математическая модель процесса производства для данного условия выглядит следующим образом:

Цель: минимизация издержек.

Переменные: X1, X2, X3 – количество соответствующего вида продукции П1, П2, П3.

Целевая функция:

$$Z(X)\ \min = x1 + 4x2 + 2x3.$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 0{,}1x1 + 0{,}2x2 + 0{,}4x3 \le 1100\,, \\ 0{,}05x1 + 0{,}02x2 + 0{,}02x3 \le 120\,, \\ 3x1 + x2 + 2x3 \le 8000 \\ x1,\ x2,\ x3 > 0. \end{cases}$$

Так как целевая функция и ограничения линейны, то задача может быть решена симплекс-методом.

	x1	x2	x3						
Переменные	1000	2000	1500						
целевая финкция	1	4	2						
	0,1	0,2	0,4	1100	=	1100		мин	12000
	0,05	0,02	0,02	120	=	120			
	3	1	2	8000	=	8000			

При данной производственной программе предприятие получит издержки в размере 12 000 д.е.

4. Математическая модель процесса производства для данного условия выглядит следующим образом:

Цель: максимизация прибыли.

Переменные: X1, X2, X3 – количество соответствующего вида продукции П1, П2, П3.

Целевая функция:

$$P(X)\ \max = 2x1 + x2 + 2x3.$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 0{,}1x1 + 0{,}2x2 + 0{,}4x3 \le 1100\,, \\ 0{,}05x1 + 0{,}02x2 + 0{,}02x3 \le 120\,, \\ 3x1 + x2 + 2x3 \le 8000 \\ x1,\ x2,\ x3 > 0. \end{cases}$$

Так как целевая функция и ограничения линейны, то задача может быть решена симплекс-методом.

	x1	x2	x3						
Переменные	1000	2000	1500						
Целевая функция	2	1	2						
	0,1	0,2	0,4	1100	<=	1100		мак	7000
	0,05	0,02	0,02	120	<=	120			
	3	1	2	8000	<=	8000			

При данной производственной программе предприятие получит следующую прибыль 7000 д.е.

5) а) **Целевая функция**:

$$P(X)\ \max\ =\ 2x1 + x2\ +\ 2x3.$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 0{,}1x1 + 0{,}2x2 + 0{,}4x3\ \le\ 1104\ , \\ 0{,}05x1 + 0{,}02x2 + 0{,}02x3\ \le\ 120\ , \\ 3x1 + x2 + 2x3\ \le\ 7990 \\ x1,\ x2,\ x3 > 0. \end{cases}$$

Так как целевая функция и ограничения линейны, то задача может быть решена симплекс-методом.

	x1	x2	x3						
Переменные	988	2034	1496						
Целевая функция	2	1	2						
	0,1	0,2	0,4	1104	<=	1104		мак	7002
	0,05	0,02	0,02	120	<=	120			
	3	1	2	7990	<=	7990			

При данной производственной программе предприятие получит следующую выручку от реализации своей продукции 7002 д.е.

б) **Целевая функция**:

$$P(X)\ \max\ =\ 2x1 - 2\ x2 + 4x3.$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 0{,}1x1 + 0{,}2x2 + 0{,}4x3\ \le\ 1100\ , \\ 0{,}05x1 +\ 0{,}02x2 + 0{,}02x3\ \le\ 120\ , \\ 3x1 + x2 + 2x3\ \le\ 8000 \\ x1,\ x2,\ x3 > 0. \end{cases}$$

Так как целевая функция и ограничения линейны, то задача может быть решена симплекс-методом.

	x1	x2	x3						
Переменные	1000	0	2500						
Целевая функция	2	-2	4						
	0,1	0,2	0,4	1100	<=	1100		мак	12000
	0,05	0,02	0,02	100	<=	120			
	3	1	2	8000	<=	8000			

При данной производственной программе предприятие получит издержки в размере 12 000 д.е.

в) **Целевая функция**:

$$P(X)\ \max\ =\ 5x2\ + 2x3.$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 0{,}1x1 + 0{,}2x2 + 0{,}4x3\ \le\ 1100\ , \\ 0{,}05x1 + 0{,}02x2 + 0{,}02x3\ \le\ 120\ , \\ 3x1 + x2 + 2x3\ \le\ 8000 \\ x1,\ x2,\ x3 > 0. \end{cases}$$

Решение: Так как целевая функция и ограничения линейны, то задача может быть решена симплекс-методом.

	x1	x2	x3						
Переменные	0	5500	0						
целевая функция	0	5	2						
	0,1	0,2	0,4	1100	<=	1100		мак	27500
	0,05	0,02	0,02	110	<=	120			
	3	1	2	5500	<=	8000			

При данной производственной программе предприятие получит следующую прибыль 27 500 д.е.

IV. Выводы

Современное состояние логистики много в чем определяется бурным развитием и внедрением информационно-коммуникационных технологий. Реализация большинства логистических концепций и систем была бы невозможной без использования быстродействующих компьютеров, локальных вычислительных сетей, телекоммуникационных систем и информационно-программного обеспечения. Значение информационного обеспечения логистического процесса настолько велико, что многие специалисты выделяют особую логистику, которая имеет самостоятельное значение в бизнесе и управлении информационными потоками и ресурсами. Эту функциональную область логистики зачастую называют компьютерной.

Математическое моделирование позволяет нам в достаточно полной мере отразить работу логистических систем. Так, с помощью систем массового обслуживания, без проблем можно выяснить и рассчитать работу, связанную с погрузкой и отправкой материала в пункт назначения; применяя задачи линейного программирования и прибегая к помощи ЭВМ, без труда можно рассчитать минимальные издержки производства, прибыль.

Статья поступила в редакцию 28.11.2012.

Маковський А.Л. Деякі аспекти застосування математичних методів під час розв'язання логістичних задач

У статті розглянуто приклади постановки завдання для розв'язання логістичних задач методами теорії масового обслуговування та лінійного програмування.

Ключові слова: *логістика, системи масового обслуговування, методи лінійного програмування.*

Makovs'kiy A. Some aspects of mathematical methods in logistics tasks

This paper discusses examples of formulation of the problem to solve logistic problems by queuing theory and linear programming.

Key words: *logistics, queuing systems, linear programming techniques.*