УДК 519.863:338.3

І. М. Ляшенко
д-р фіз.-мат. наук, професор

Ю. П. Тадеєв
канд. екон. наук, доцент

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ДИНАМІЧНИЙ МІЖГАЛУЗЕВИЙ БАЛАНС З ВИПЕРЕДЖУЮЧИМ АРГУМЕНТОМ

Міжгалузева модель Леонтьєва «витрати-випуск» давно стала основою для різноманітних досліджень так званої «лінійної економіки» [1]. Статична міжгалузева модель Леонтьєва має вигляд:

$$x = Ax + y,\ \ y > 0,\ \ x \geq 0,$$

де $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – вектор-стовпчик повного випуску продукції, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ – вектор-стовпчик кінцевої продукції, $A = (a_{ij})_1^n \geq 0$ – матриця коефіцієнтів прямих виробничих витрат.

Як відомо, кінцевий продукт y ділиться на дві основні частини (споживання c та збереження s):

$$y = c + s.$$

Якщо збереження витрачається на розширення виробництва, то цей процес описується динамічною міжгалузевою моделлю Леонтьєва «витрати-випуск»:

$$x(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t) + c(t),\ \ c(t) \geq 0,\ \ x(t) \geq 0,\ \ \dot{x}(t) \geq 0,$$

де $t \geq 0$ – неперервний час, $\dot{x}(t) = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n)^T$ – вектор-стовпчик приросту продукції ($\dot{x}(t)$ – похідна за часом); $B = (b_{ij})_1^n \geq 0$ – матриця фондоємності продукції.

З математичної точки зору модель (2) є системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку. Модель (2) володіє одним істотним недоліком: тут будівництво та введення в дію нових потужностей $\dot{x}(t) \geq 0$ відбувається миттєво, більш того –витрати на створення нових потужностей компенсуються продукцією цих же потужностей, що зовсім не відповідає дійсності. В реальності між замовленням та введенням в дію нових потужностей проходить деякий час $\tau > 0$ – лаг будівництва. При цьому будівництво фінансується неперервно у вигляді частини наявної кінцевої продукції.

Якщо припустити, що фінанси (матеріали, ресурси) виділяються повністю на початку будівництва (тобто замовлення фінансується одразу), то замість рівняння (2) будемо мати таке співвідношення:

$$x(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t+\tau) + c(t),\ \ c(t) \geq 0,\ \ t \geq 0.$$

<u>Постановка завдання.</u> Модель (3) є системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з випереджуючим аргументом [2].

Оскільки рівняння (3) зв'язує моменти часу t та $t+\tau$, то для знаходження траєкторії $x(t)$ при $t \in [0, \infty)$ потрібні початкові умови:

$$x(t) \equiv a_0(t) \geq 0 \text{ при } -\tau \leq t < 0,$$

де $a_0(t)$ – задана неперервно диференційована функція, що є мінімальними вимогами для розв'язання задачі Коші (3)–(4).

В даній роботі не досліджуються математичні труднощі, пов'язані з розв'язуванням задачі Коші, а ставиться задача побудови магістральної траєкторії рівняння (3), що зовсім не пов'язується з використанням початкових умов (4).

Результати дослідження.В подальшому під магістральною траєкторією будемо розуміти траєкторію максимального збалансованого експоненціального зростання рівняння (3).

1. Для знаходження магістральних траєкторій необхідно спочатку знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (3).

Загальний розв'язок рівняння (3) шукаємо у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння:

$$x(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t+\tau),\ \ x(t) \geq 0,$$

та частинного розв'язку неоднорідного рівняння (3).

Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння (5) шукаємо у вигляді експоненти по часу $ze^{\lambda t}$, де $z \geq 0$ – деякий вектор-стовпчик. При $z \neq 0$ з (5) одержуємо

$$z = Az + \lambda e^{\lambda\tau} Bz \qquad (1)$$

або

$$\left(I - A - \mu B\right) z = 0,$$

де

$$\mu = \lambda e^{\lambda\tau},$$

а I – одинична матриця відповідної розмірності.

Матрицю коефіцієнтів прямих виробничих витрат A будемо вважати продуктивною матрицею, тобто такою, що $(I-A)^{-1} \geq 0$[3]. Ця умова є необхідною та достатньою для існування невід'ємного розв'язку $x \geq 0$ рівняння (1).

Після множення рівняння (7) зліва на матрицю $(I-A)^{-1} \geq 0$ будемо мати:

$$\left(I - \mu(I-A)^{-1} B\right) z = 0.$$

Як випливає з (9), випадок $\mu = 0$ відповідає випадку $z \equiv 0$, що є неприйнятним для відшукання магістральних траєкторій. Отже, нехай $\mu \neq 0$. Тоді (9) можемо переписати у вигляді:

$$\left((I-A)^{-1} B - \mu^{-1} I\right) z = 0.$$

Отже, μ^{-1}є власним числом матриці $(I-A)^{-1} B \geq 0$. Таких власних чисел n, включаючи кратні і комплексні числа. Але серед них є єдине число, якому відповідає невід'ємний власний вектор [3]. Це корінь Фробеніуса $\lambda_{(I-A)^{-1}B} > 0$ та правий вектор Фробеніуса $x_{(I-A)^{-1}B} \geq 0$, який буде строго додатнім лише для нерозкладної матриці $(I-A)^{-1} B$.

Отже, претендентом на магістральну траєкторію однорідного рівняння є $ze^{\lambda t}$, де z – правий вектор Фробеніуса матриці $(I-A)^{-1} B \geq 0$, а λ – корінь рівняння:

$$\lambda e^{\lambda\tau} = \lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}.$$

Залишається ще знайти невід'ємний частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3). Цей частинний розв'язок шукаємо, як і для звичайних диференціальних рівнянь, в залежності від вигляду вільного члена $c(t)$. Якщо вектор-функція $c(t)$ має аналітичне вираження, наприклад є експонентою в часі, то і частинний розв'язок шукається у такому ж вигляді. Найчастіше:

$$c(t) = c_0 e^{st},\ \ c_0 \geq 0,\ \ s > 0,$$

де s – деяке число.

Тоді шукаємо частинний розв'язок у вигляді:

$$x(t) = z_0 e^{st},$$

де $z_0 \geq 0$ –шуканий вектор-стовпчик.

Після підстановки виразів (12) і (13) в (3) та скорочення на e^{st} одержуємо

$$z_0 = Az_0 + se^{s\tau} Bz_0 + c_0,$$

або

$$(I - A - \nu B) z_0 = c_0,$$

де

$$\nu = se^{s\tau}.$$

Після множення рівняння (14) зліва на матрицю $(I - A)^{-1} \geq 0$ маємо:

$$\left(I - \nu (I - A)^{-1} B\right) z_0 = (I - A)^{-1} c_0. \tag{2}$$

Щоб отримати

$$z_0 = \left(I - \nu (I - A)^{-1} B\right)^{-1} (I - A)^{-1} c_0 \tag{3}$$

потрібно щоб матриця $\nu (I - A)^{-1} B \geq 0$ була продуктивною, тобто:

$$0 < \nu \lambda_{(I-A)^{-1}B} < 1.$$

Отже, маємо умову існування невід'ємного розв'язку неоднорідного рівняння (3), а саме:

$$0 < \nu < \lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B} \tag{4}$$

або

$$se^{s\tau} < \lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}.$$

Порівнюючи співвідношення (11) та (19) приходимо до висновку, що:

$$0 < s < \lambda.$$

Таким чином, магістральна траєкторія неоднорідного диференціального рівняння з випереджуючим аргументом як траєкторія максимального збалансованого експоненціального зростання визначається правим вектором Фробеніуса матриці $(I - A)^{-1} B \geq 0$ та темпом зростання λ, що є єдиним коренем рівняння (11).

Розглядаючи λ як функцію параметра τ, дослідимо функцію $\lambda(\tau)$ з тотожності:

$$\lambda(\tau) e^{\lambda(\tau)\tau} \equiv \lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}.$$

Очевидно, що $\lambda(\tau)$ є монотонно спадною функцією, причому:

$$\lambda(0) = \lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}, \tag{5}$$

що збігається з відомим результатом [4].

Продиференціюємо тотожність (21) по τ, одержуємо рівняння:

$$\lambda \tau \lambda' + \lambda^2 + \lambda' = 0,$$

звідки маємо

$$\lambda'(\tau) = -\frac{\lambda^2}{1 + \lambda\tau} < 0, \ \tau \geq 0, \ \lambda > 0. \tag{6}$$

Зокрема,

$$\lambda'(0) = -\lambda^2$$

і, отже, для малих значень τ справедливе розвинення:

$$\lambda(\tau) = \lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}\left(1 - \tau\lambda^{-1}_{(I-A)^{-1}B}\right) + o\left(\tau^2\right). \qquad (7)$$

Таким чином, затримування будівництва нових потужностей $\tau > 0$ приводить до уповільнювання темпу зростання магістральних траєкторій.

Як числовий приклад, розглянемо випадок $A = 0,5$ та $B = 10$. Тоді $(I - A)^{-1} B = 20$, отже, $\lambda_{(I-A)^{-1}B} = 0,05$ і згідно з (24) одержуємо:

$$\lambda(\tau) = 0,05(1 - 0,05\tau) + o\left(\tau^2\right).$$

2. Проведемо двоїстий аналіз моделі динамічного міжгалузевого балансу з випереджуючим аргументом.

Нехай $p(t) = (p_1, p_2, ..., p_n)$ – вектор-рядок вартості продукції. Після множення співвідношення (3) зліва на вектор $p(t) \geq 0$ одержуємо вартісний баланс на момент часу t:

$$p(t)x(t) = p(t)Ax(t) + p(t)B\dot{x}(t+\tau) + p(t)c(t). \qquad (8)$$

Основна статична гіпотеза про баланс вартостей системи «споживання-виробництво» має вигляд:

$$p(t)c(t) = r(t)x(t). \qquad (9)$$

Тут $r(t) = (r_1, r_2, ..., r_n)$ – вектор-рядок коефіцієнтів доданої вартості продукції $x(t)$, а величина $p(t)B\dot{x}(t+\tau)$ – сьогоденна вартість запланованого новостворюваного виробництва.

Пропонована нами додаткова динамічна гіпотеза

$$p(t)B\dot{x}(t+\tau) = \dot{p}(t+\tau)Bx(t) \qquad (10)$$

стверджує, що вартість майбутнього новостворюваного виробництва компенсується плановим підняттям ціни продукції. Для випадку $r = 0$ ця гіпотеза вперше запропонована в роботі [4].

Одержуємо вартісний баланс системи «споживання-виробництво» у такому вигляді:

$$p(t)x(t) = p(t)Ax(t) + \dot{p}(t+\tau)B\dot{x}(t) + r(t)x(t) \qquad (11)$$

або

$$\left(p(t) - p(t)A - \dot{p}(t+\tau)B - r(t)\right)x(t) = 0. \qquad (12)$$

Оскільки рівність повинна виконуватись при будь-яких $x(t) \geq 0$, то це можливо лише у випадку, коли:

$$p(t) = p(t)A + \dot{p}(t+\tau)B + r(t), \; r(t) \geq 0, \; p(t) \geq 0. \qquad (13)$$

Це динамічна модель цін. Вона має вигляд аналогічний основній моделі (3). Тому побудова магістральної траєкторії моделі проводиться аналогічно, як це зроблено для моделі (3).

Виявляється, що темп зростання цін (інфляція) визначається через корінь Фробеніуса матриці $B(I-A)^{-1} \geq 0$, що збігається з коренем Фробеніуса матриці $(I-A)^{-1}B \geq 0$. Тобто, темп зростання виробництва збігається з темпом інфляції продукції, що є реалістичним.

Промінь Неймана, що визначає магістральну траєкторію для цін, є лівим вектором Фробеніуса матриці $B(I-A)^{-1} \geq 0$.

Висновок. Таким чином, в даній роботі представлено модель динамічного міжгалузевого балансу, що враховує часовий лаг будівництва та введення нових виробничих потужностей. Встановлено існування єдиної магістральної траєкторії як траєкторії максимального збалансованого експоненціального зростання. На основі введення двох гіпотез про баланс вартостей системи «споживання-виробництво» проведений двоїстий аналіз динамічної моделі з випереджуючим елементом. Встановлено, що на магістралі темпи зростання виробництва та підвищення ціни продукції збігаються, а самі траєкторії виражаються через правий та лівий вектори Фробеніуса.

Одержані магістральні траєкторії доцільно використати для стратегічного планування економічного розвитку.

Література

1. Леонтьев В.В.Межотраслевая экономика / В.В. Леонтьев: [пер. с англ.] – М.: ОАО «Издательство «Экономика», 1997. – 479 с.
2. Мышкис А.Д.Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом: [монография] / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
3. Пономаренко О.І. Сучасний економічний аналіз: У 2 ч. Ч. 2. Макроекономіка: [навч. посібник] / О.І Пономаренко, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. – К.: Вища школа, 2004. – 207 с.
4. Ляшенко І.М. Економічні гіпотези та динаміка рівноважних цін в моделі Леонтьєва «витрати-випуск» / І.М. Ляшенко, О.І. Ляшенко, А.М. Онищенко // Економічна кібернетика. – №3–4(57–58). – 2009. – С. 14–18.

1. Leontiev, V.V. (1997), *Mezhotraslevaya economics*, Moscow, Publishing Economics.
2. Myshkis, A.D. (1972), *Line differential equation with retarded argument*, Moscow, Science.
3. Ponomarenko, O.I., Perestyuk, M.O., Burym, V.M. (2004), *Modern economic analysis In 2 parts, Part 2,* Macroeconomics, Kiev, High School.
4. Ljashenko, I.M., Ljashenko, O.I., Onishchenko, A.M. (2009), *"Economic hypotheses and dynamics of equilibrium prices in Leontief model "input-output""*, Economic Cybernetics, Vol. 57-58, pp. 14-18.