УДК 532,135; 532

Е. В. БІЛЕЦЬКИЙ, канд. техн. наук
Харківський торговельно-економічний інститут Київського національного торговельно-економічного університету, м. Харків
Ю. А. ТОЛЧИНСЬКИЙ, канд. техн. наук
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків

ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ТЕПЛОВІДДАЧІ ПРИ ТЕЧІЇ ДЕЯКИХ НЕНЬЮТОНІВСЬКИХ РІДИН У ТРУБАХ І КАНАЛАХ

В статье рассматривается проблема теплообмена при течении в трубах и каналах неньютоновских жидкостей. Предложена методика определения теплообменных величин при течении степенных, бингамовских и обобщенных жидкостей.

У статті розглядається проблема теплообміну при течії в трубах і каналах неньютонівських рідин. Запропонована методика визначення теплообмінних величин при течії степеневих, бінгамівських та узагальнених рідин.

Вступ

Теплові процеси є найбільш розповсюдженими у процесах харчової та хімічної технологій. Неізотермічні умови протікання процесів зустрічаються набагато частіше, ніж ізотермічні. Відомо багато способів підведення і відведення теплових потоків до (від) тепловіддачі поверхні машин і апаратів, що передають тепло у тому числі і за принципом: труба в трубі або в сорочці. Величина потоку тепла через деяку тверду поверхню визначається її тепловим опором і коефіцієнтами тепловіддачі зі сторін середовищ, які обмінюються теплом [1, 2, 3]. Якщо середовище є ньютонівським, то коефіцієнти тепловіддачі визначаються за допомогою відомих формул [1, 2, 3]. Теплообмін в неньютонівському середовищі вивчене значно менше. У наведеній роботі пропонується розглянути обчислення коефіцієнтів тепловіддачі при течії неньютонівської рідини в трубі або каналі. З аналізу останніх досліджень та публікацій можна зробити висновок, що з усього різноманіття неньютонівських рідин найбільш поширеними є представники трьох класів – це бінгамівська рідина, узагальнена зсувна рідина, степенева рідина. Пояснення вимагає термін – узагальнена зсувна рідина. Це така рідина, в'язкість якої залежить від швидкості зрушення довільним способом. Окремим випадком такої рідини є степенева рідина [4]. Такі ділянки течії, як труби і канали, вибрані тому, що труба є основним елементом теплообмінного апарату, а канал – основним елементом робочої камери черв'ячного екструдера [5]. Зміст цієї роботи спирається на ряд результатів про течію згаданих вище рідин у трубах і каналах [6, 7, 8, 9, 10, 11,]. Зокрема, у попередніх роботах була розглянута течія в каналах плоскої і прямокутної форм, межі яких рухаються вздовж самих себе, а також в поздовжньому і поперечному напрямах. У згаданих роботах були побудовані тривимірні поля течії зазначених неньютонівських рідин при різних граничних умовах, які складають необхідні умови обчислення коефіцієнтів тепловіддачі. Як відомо, потік рідини в трубі або каналі може бути організований таким чином, що в процесі підведення або відведення тепла утворюється (або не утворюється) тепловий пригpаничний шар. При течії самої рідини також може утворюватися (або не утворюватися) гідродинамічний пригpаничний шар. Течія, в якій гідродинамічний шар відсутній або, що те ж саме, займає весь поперечний переріз труби чи каналу, називається стабілізованою. В іншому випадку – нестабілізованою [1, 2, 3]. Те ж саме справедливо і для процесу перенесення температури [1, 2, 3]. Мірою відносини товщин гідродинамічного і теплового пригpаничного шарів є число Прандтля [1, 2, 3]. Для більшої частини течій товщини гідродинамічного пригpаничного шару більше, ніж тепловий, а число Прандтля складає більше одиниці. Це особливо правильно, якщо гідродинамічний пригpаничний шар займає весь переріз труби або каналу.

Основна частина

У даній роботі розглядаються стабілізовані течії вказаних неньютонівських рідин у гідродинамічному сенсі і нестабілізоване перенесення температури з відносно теплового пограничного шару. Остання умова означає, що число Пекле значно перевищує одиницю [1, 2]. Для обчислення коефіцієнтів тепловіддачі використовується рівняння конвективного переносу температури [1, 2, 3]. На теплообмін впливає компонента швидкості, яка може бути, як дотичною, так і нормальною відносно тепло передаючої поверхні [3], що передає тепло у прямих каналах і трубах при стабілізованій течії нормальна компонента швидкості відсутня. Дотична компонента швидкості може мати дві складові – вздовж і впоперек поздовжньої осі труби або каналу. У цьому випадку дотична компонента швидкості являє собою векторну суму цих складових, і саме ця сума визначає коефіцієнт тепловіддачі.

Рівняння конвективного переносу температури записується так:

$$\upsilon_x \frac{\partial T}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \qquad \chi = \frac{\lambda}{\rho c_p} \tag{1}$$

в якому υ_x і υ_y – дотична і нормальна складові вектора швидкості неньютонівської рідини, м/с;

T – абсолютна температура в рідині, ${}^0K$;

χ – температуропровідність рідини, $м^2/с$;

λ – теплопровідність рідини, $ВТ/м\cdot{}^0K$;

ρ – щільність рідини, $кг/м^3$;

C_p – теплоємність рідини, $Дж/кг\cdot{}^0K$.

Рівняння (1) записано в наближенні теплового пограничного шару так, що в правій його частині збережена тільки поперечна похідна по змінній y. Координата x вважається спрямованою вздовж дотичній компоненти швидкості рідини (у випадку чисто поздовжньої течії дотична компонента спрямована вздовж осі труби або каналу). Вище сказане наведено на рис 1. Розглянемо, якщо $\upsilon_y \equiv 0$.

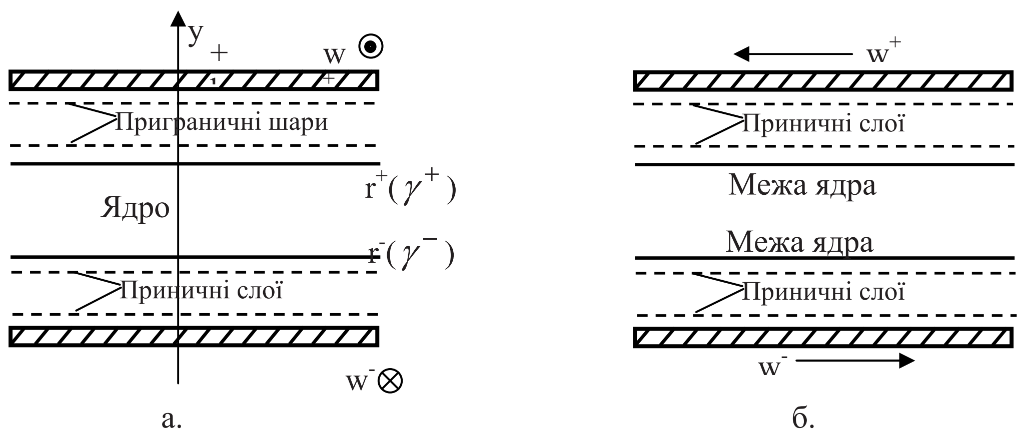


Рис. 1. Теплові пограничні шари у бінгамівській рідині:
а. вид упоперек каналу; б. вид уздовж плоского каналу

Маючи на увазі той факт, що існує тепловий пограничний шар, потік тепла біля твердої поверхні залежить від поведінки поля швидкості тільки поблизу цієї поверхні. Для бінгамівських і небінгамівських рідин слід використовувати в (1) розкладання другого і першого порядків відповідно по малій величині відстані до поверхні. Якщо обозначити цю відстань через $\widetilde{y}$ то для бінгамівської і небінгамовської рідин біля меж ділянок течії (стінок труби каналів) слід використовувати таке вираження:

$$\upsilon_x = w_\Gamma + \frac{\partial \upsilon_x}{\partial \widetilde{y}} \widetilde{y}\,, \tag{2}$$

а для бінгамівської рідини поблизу твердого ядра слід використати вираження такого виду:

$$\upsilon_x = \upsilon_\kappa + \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial \widetilde{y}} \widetilde{y}^2\,, \tag{3}$$

в яких w_Γ – швидкість стінки, м/с; υ_k - швидкість твердого ядра, м/с.

У (3) доданок, пропорційний $\widetilde{y}$ відсутній в силу умови звернення в нуль другогоінваріанта тензора швидкості деформацій [4].

Рівняння (1) з υ_x по (2) і (3) допускає автомодельні рішення за допомогою підстановок такого виду [6]:

$$\omega = \left(\frac{2}{\chi} \frac{\partial \upsilon_x}{\partial \widetilde{y}} \right)^{1/3} \frac{\widetilde{y}}{x^{1/3}} \text{ (для } \upsilon_x \text{ по формулі (2));}$$

$$\omega = \left(\frac{2}{\chi} \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial \widetilde{y}^2} \right)^{1/4} \frac{\widetilde{y}}{x^{1/4}} \text{ (для } \upsilon_x \text{ по формулі (3)),} \tag{4}$$

з яких виходить, що щільність теплового потоку зменшується вздовж напряму дотичної швидкості як $x^{-1/3}$ і $x^{-1/4}$ для першого і другого випадків відповідно. Увівши середнє значення щільності теплового потоку на деякій довжині L і зважаючи на стандартне визначення числа Нуссельта Nu для останнього отримуємо такі вирази:

$$Nu = \frac{2^{2/3}}{3} \frac{h}{L^{1/3}} \left(\frac{1}{\chi} \frac{\partial \upsilon_x}{\partial \widetilde{y}} \right)^{1/3}, \qquad Nu = \frac{8}{15} \frac{h}{L^{1/4}} \left(\frac{1}{\chi} \frac{\partial \upsilon_x}{\partial \widetilde{y}} \right)^{1/4}, \tag{5}$$

в якому h – напівширина каналу, труби, м.

Таким чином, з (5) виходить, що числа Нуссельта визначаються похідними дотичної до стінки швидкості на стінках каналів, труб і на межах твердого ядра для бінгамівської рідини. Нижче розглядаються течії бінгамівської рідини в плоскому і прямокутному каналах (див. рис. 2 і 3).

Швидкість поздовжньої течії в плоскому каналі має такий вигляд [7]

$$\upsilon_{\|} = w_{\|}^{\pm} - \frac{h}{2\mu} \frac{dP}{d\zeta_h} \left(1 - \xi_y^2\right) \pm \frac{\gamma^{\pm}}{\mu} \frac{dP}{d\zeta_h} \left(1 \mp \xi_y\right), \qquad \xi_y = y/h\,;$$

$$\gamma^{\pm} = \pm \frac{\tau_0}{dP/d\zeta_h} + \frac{\left(w_{\|}^{+} - w_{\|}^{-}\right)/2}{\frac{1}{\mu}\frac{dP}{d\zeta_h} - \frac{\tau_0}{\mu}}, \quad \xi_h = x/h, \qquad \mu_{эф} = \mu + \frac{\tau_0}{\sqrt{I_2}}, \tag{6}$$

де $\upsilon_{\|}$ – швидкість течії, м/с;

μ – в'язкість бінгамівської рідини $Па \cdot с$;

P – тиск у бінгамівській рідині $Па$;

$w_{||}^{\pm}$ – швидкості верхньої і нижньої меж каналу відповідно, м/с (рис. 2);

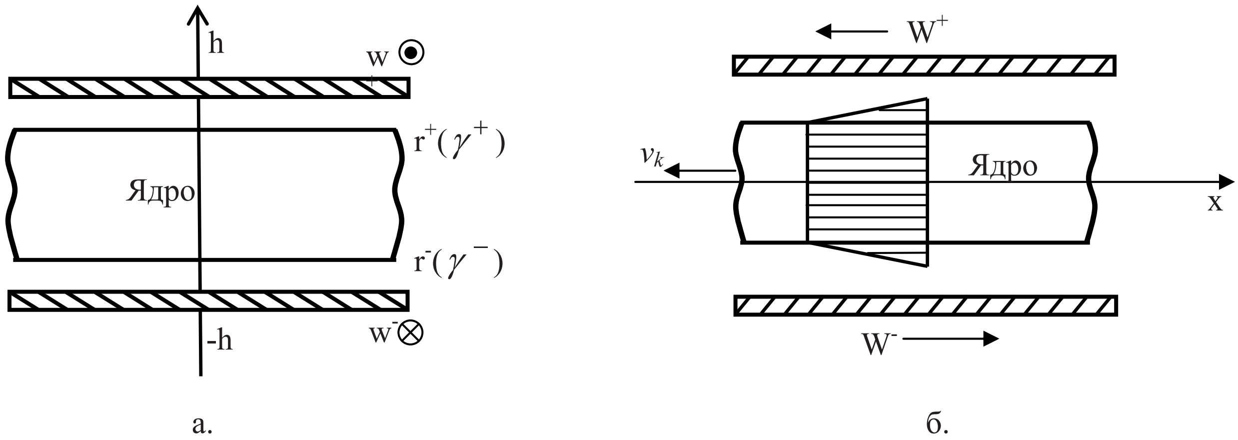


Рис. 2. Поздовжня течія бінгамівської рідини у плоскому каналі
а. вид упоперек каналу; б. вид уздовж каналу

$\gamma^{\pm}$ – безрозмірні координати твердого ядра;

τ_0 – межа течії, $Па$.

Швидкість подовжньої течії бінгамівської рідини в прямокутному каналі записується таким чином [8, 9]:

$$\upsilon_{||y}^{\pm} = -\frac{h}{2\mu}\frac{dP}{d\zeta_h}\cdot\frac{1-\xi_y^2}{1+ж^2\rho_y^{\pm}\left(1\mp\gamma_y^{\pm}\right)} \pm \frac{h}{\mu}\frac{dP}{d\zeta_h}\cdot\frac{\gamma_y^{\pm}\cdot\left(1\mp\xi_y\right)}{1+ж^2\rho_y^{\pm}\left(1\mp\gamma_y^{\pm}\right)} + w_{||y}^{\pm},$$

$$\upsilon_{||x}^{\pm} = -\frac{a}{2\mu}\frac{dP}{d\zeta_a}\cdot\frac{1-\xi_x^2}{1+\rho_x^{\pm}\left(1\mp\gamma_x^{\pm}\right)/ж^2} \pm \frac{a}{2\mu}\frac{dP}{d\zeta_a}\cdot\frac{\gamma_x^{\pm}\cdot\left(1\mp\xi_x\right)}{1+\rho_x^{\pm}\left(1\mp\gamma_x^{\pm}\right)/ж^2} + w_{||x}^{\pm}, \tag{7}$$

$$ж = h/a; \quad \xi_y = y/h; \quad \xi_x = x/a; \quad \xi_h = z/h; \quad \xi_a = z/a,$$

де a – ширина прямокутного каналу, м;

h – висота цього каналу, м;

$\gamma_y^{\pm}$ і $\gamma_x^{\pm}$ – координати безрозмірних меж твердого ядра, б/р.

Значення величин $\gamma_x^{\pm}$ і $\gamma_y^{\pm}$ визначене авторами [8, 9]. Їх конкретний вид є лінійною комбінацією виразів виду (6) для $\gamma^{\pm}$ з ваговими множниками, залежними від параметра форми каналу ж [8, 9].

Швидкість поздовжньо-поперечної течії бінгамівської рідини в прямокутному каналі зі швидкістю меж (див. рис. 3). для поздовжньої компоненти швидкості співпадає з виразами (7), а поперечні компоненти швидкості $\upsilon_{\perp y}^{\pm}$ і $\upsilon_{\perp x}^{\pm}$ представлені наступними виразами [10]:

$$\upsilon_{\perp y}^{\pm} = \frac{h}{2\mu}\frac{dP_y}{d\theta_h}\cdot\frac{\xi_y^2-\gamma_y^{\pm 2}\pm\left(1\pm\gamma_y^{\pm}\right)\left(\gamma_y^{\pm}-\xi_y\right)}{1+ж^2 r^{\pm}\cdot\left(1\mp\gamma_y^{\pm}\right)} \pm \frac{w_{\perp y}^{\pm}\cdot\left(\xi_y-\gamma_y^{\pm}\right)}{1\mp\gamma_y^{\pm}}, \tag{8}$$

$$\upsilon^{\pm}_{\perp x} = \frac{a}{2\mu}\frac{dP_x}{d\theta_a}\cdot\frac{\xi_x^2-\gamma_x^{\pm 2}\pm\left(1\pm\gamma_x^{\pm}\right)\left(\gamma_x^{\pm}-\xi_x\right)}{1+s^{\pm}\cdot\left(1\mp\gamma_x^{\pm}\right)/ж^2}\pm\frac{w^{\pm}_{\perp x}\cdot\left(\xi_x-\gamma_x^{\pm}\right)}{1\mp\gamma_x^{\pm}},$$

$$\theta_h = x/h; \qquad \xi_y = y/h;$$

$$\theta_y = y/a; \qquad \xi_x = x/a;$$

у яких $dP_y/d\theta_h$, $dP_x/d\theta_a$ – поперечні градієнти тиску в площині поперечного перерізу каналу, $Па/м$ (див. рис. 3).

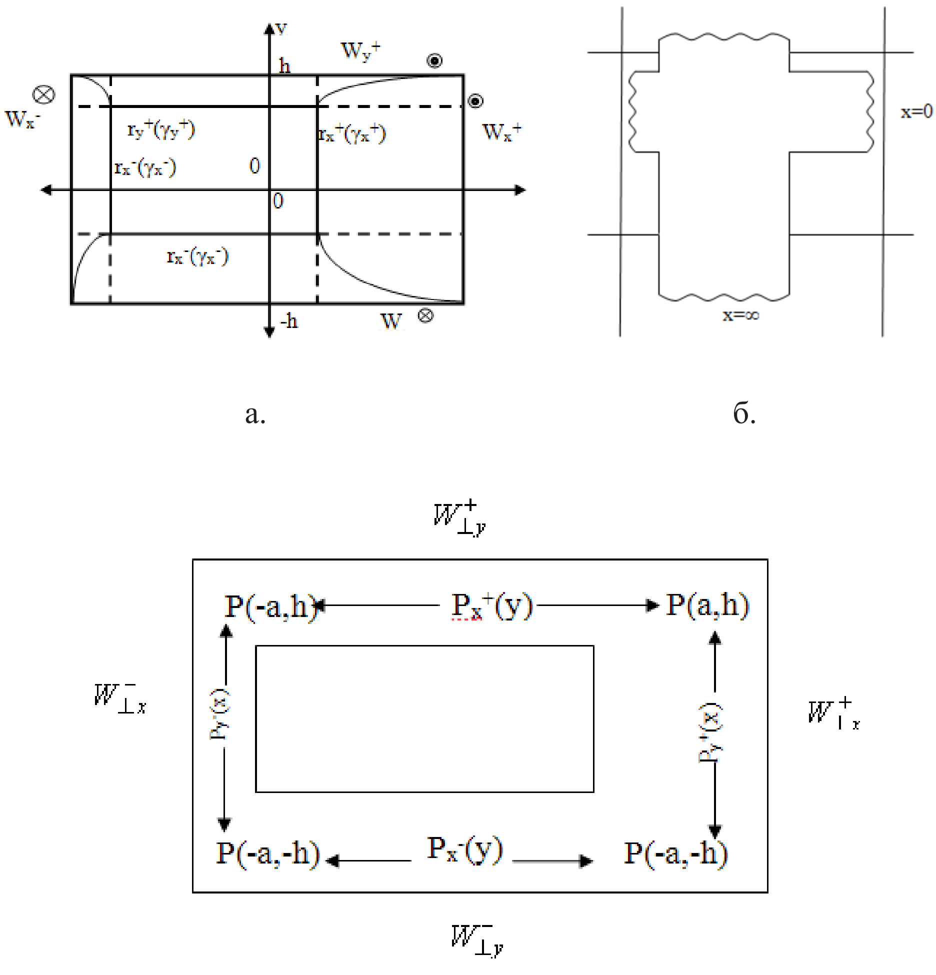


Рис. 3. Течія бінгамовської рідини: а. поздовжня течія бінгамівської рідини у прямокутному каналі; б. поздовжня течія бінгамівської рідини у прямокутному каналі як композиція плоских рідин; в. поперечна течія бінгамівської рідини у прямокутному каналі

У формулах (7) і (8) є величини $\rho^{\pm}_y$, $\rho^{\pm}_x$, $r^{\pm}$, $s^{\pm}$, які залежать від комбінацій граничних умов дробово-раціональним чином які із-за громіздкості обчислень тут не представлені [10]. Спираючись на формули (4) і (5) слід вичислити відповідні похідні. Для плоского каналу і повздовжньої течії є два коефіцієнти тепловіддачі − на верхній і нижній стінках; і два коефіцієнти тепловіддачі − на верхній і нижній межах твердого ядра. Це означає, що потрібно вичислити перші похідні вирази (6) в точках $\xi_y = \pm 1$ і другі похідні цього ж виразу в точках $\xi_y = \gamma^{\pm}$. Опускаючи прості проміжні дії можна записати такий результат:

$$\left.\frac{\partial \upsilon_{\|}^{\pm}}{\partial \tilde{y}}\right|_{\pm 1} = \frac{1}{\mu}\frac{dP}{d\zeta_h}\left(1 \mp \gamma^{\pm}\right); \left.\frac{\partial^2 \upsilon_{\|}^{\pm}}{\partial \tilde{y}^2}\right| = \frac{1}{\mu h}\frac{dP}{d\zeta_h} \quad . \tag{9}$$

Отже, числа Нуссельта пропорційні кореню кубічному з першого вираження і кореню четвертого ступеню з другого виразів (9). Враховуючи вираження (6) для $\gamma^{\pm}$ виходить, що числа Нуссельта досить складним чином залежать від усіх параметрів течії: градієнта тиску, порогу течії, різниці швидкостей стінок.

У поздовжній течії бінгамівської рідини в прямокутному каналі є вісім меж − чотири стінки і чотири межі твердого ядра. Отже, є вісім коефіцієнтів тепловіддачі. Для їх обчислення потрібно визначити чотири перші похідні від виражень (7) по y і x відповідно в точках $\xi_y = \pm 1$; $\xi_x = \pm 1$ і чотири других похідних по y і x відповідно в точках $\xi_y = \gamma_y^{\pm}$, $\xi_x = \gamma_x^{\pm}$. Опускаючи проміжні перетворення кінцевий результат можна записати так:

$$\left.\frac{\partial \upsilon_{\| y}^{\pm}}{\partial \tilde{y}}\right|_{\pm 1} = \frac{1}{\mu}\frac{dP}{d\zeta_h}\cdot\frac{\left(1 \mp \gamma_y^{\pm}\right)}{1 + x^2 \rho_y^{\pm}\cdot\left(1 \mp \gamma_y^{\pm}\right)}; \qquad \left.\frac{\partial^2 \upsilon_{\| y}^{\pm}}{\partial \tilde{y}^2}\right|_{\gamma_y^{\pm}} = \frac{1}{\mu h}\frac{dP}{d\zeta_h}\cdot\frac{1}{1 + x^2 \rho_y^{\pm}\cdot\left(1 \mp \gamma_y^{\pm}\right)}$$

$$\left.\frac{\partial \upsilon_{\| x}^{\pm}}{\partial \tilde{x}}\right|_{\pm 1} = \frac{1}{\mu}\frac{dP}{d\zeta_a}\cdot\frac{\left(1 \mp \gamma_x^{\pm}\right)}{1 + x^2 \rho_x^{\pm}\cdot\left(1 \mp \gamma_x^{\pm}\right)/x^2};$$
$$\left.\frac{\partial^2 \upsilon_{\| x}^{\pm}}{\partial \tilde{x}^2}\right|_{\gamma_x^{\pm}} = \frac{1}{\mu a}\frac{dP}{d\zeta_a}\cdot\frac{1}{1 + \rho_x^{\pm}\cdot\left(1 \mp \gamma_x^{\pm}\right)/x^2} \tag{10}$$

Нарешті, в поздовжньо-поперечній течії в прямокутному каналі є вісім коефіцієнтів масовіддачі. Обчислення повністю співпадає з обчисленням для поздовжньої течії. Потрібно використати формули (7) і (8). Єдина відмінність для поздовжньо-поперечної течії полягає в тому, що замість $\upsilon_{\|y}^{\pm}$ і $\upsilon_{\|x}^{\pm}$ слід вичислити перші і другі похідні від $\sqrt{\left(\upsilon_{\| y}^{\pm}\right)^2 + \left(\upsilon_{\perp y}^{\pm}\right)^2}$ і $\sqrt{\left(\upsilon_{\| x}^{\pm}\right)^2 + \left(\upsilon_{\perp x}^{\pm}\right)^2}$. Як приклад нижче наводиться обчислення для швидкості з індексом «y». Доречні такі вирази:

$$\frac{\partial \upsilon_y^{\pm}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{2\sqrt{\left(\upsilon_{\parallel y}^{\pm}\right)^2 + \left(\upsilon_{\perp y}^{\pm}\right)^2}} \times \left\{ 2\upsilon_{\parallel y}^{\pm} \frac{\partial \upsilon_{\parallel y}^{\pm}}{\partial \tilde{y}} + 2\upsilon_{\perp y}^{\pm} \frac{\partial \upsilon_{\perp y}^{\pm}}{\partial \tilde{y}} \right\}, \ \upsilon_y^{\pm} \equiv \sqrt{\left(\upsilon_{\parallel y}^{\pm}\right)^2 + \left(\upsilon_{\perp y}^{\pm}\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 \upsilon_y^{\pm}}{\partial \tilde{y}^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\left(\left(\upsilon_{\parallel y}^{\pm}\right)^2 + \left(\upsilon_{\perp y}^{\pm}\right)^2\right)^{3/2}} \times \left\{ 2\upsilon_{\parallel y}^{\pm} \frac{\partial \upsilon_{\parallel y}^{\pm}}{\partial y} + 2\upsilon_{\perp y}^{\pm} \frac{\partial \upsilon_{\perp y}^{\pm}}{\partial y} \right\}^2 + \frac{1}{2\sqrt{\left(\upsilon_{\parallel y}^{\pm}\right)^2 + \left(\upsilon_{\perp y}^{\pm}\right)^2}} \times$$

$$\times \left\{ 2\left(\frac{\partial \upsilon_{\parallel y}^{\pm}}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \upsilon_{\perp y}^{\pm}}{\partial y}\right)^2 + 2\upsilon_{\parallel y}^{\pm} \frac{\partial \upsilon_{\parallel y}^{\pm}}{\partial y} + 2\upsilon_{\perp y}^{\pm} \frac{\partial \upsilon_{\perp y}^{\pm}}{\partial y} \right\}. \tag{11}$$

Якщо вирази (11) взяти в точках $\xi_y = \pm 1$ і $\xi_y = \gamma_y^{\pm}$, то (11) спрощуються так, що отримуємо наступні результати:

$$\left.\frac{\partial \upsilon_y^{\pm}}{\partial \tilde{y}}\right|_{\pm 1} = \frac{1}{2\sqrt{\left(w_{\parallel y}^{\pm}\right)^2 + \left(w_{\perp y}^{\pm}\right)^2}} \cdot \left(2w_{\parallel y}^{\pm} \cdot \left.\frac{\partial \upsilon_{\parallel y}^{\pm}}{\partial y}\right|_{\pm 1} + 2w_{\perp y}^{\pm} \cdot \left.\frac{\partial \upsilon_{\perp y}^{\pm}}{\partial y}\right|_{\pm 1} \right),$$

$$\left.\frac{\partial^2 \upsilon_{н}^{\pm}}{\partial \tilde{y}^2}\right|_{\gamma_y^{\pm}} = 2\upsilon_k \left(\left.\frac{\partial^2 \upsilon_{\parallel y}^{\pm}}{\partial y^2}\right|_{\gamma_y^{\pm}} + \left.\frac{\partial^2 \upsilon_{\perp y}^{\pm}}{\partial y^2}\right|_{\gamma_y^{\pm}} \right), \tag{12}$$

в яких υ_k – швидкість твердого ядра, м/с.

Ця величина визначена в роботі авторів [10] і через громіздкість обчислень тут не наводиться. Так само обчислюються похідні від компонентів $\upsilon_x^{\pm}$ по змінній $\tilde{x}$. Результат співпадає з (12) з урахуванням заміни індексу «y» і на індекс «x» і величин $w_{\parallel y}^{\pm}$, $w_{\perp y}^{\pm}$ на $w_{\parallel x}^{\pm}$ і $w_{\perp x}^{\pm}$ (рис. 3). Самі ж перші і другі похідні, що входять в (11) і (12) обчислюються з виразів (8).

З урахуванням вищесказаного для бінгамівської рідини, слід розглянути обчислення коефіцієнтів тепловіддачі для течії узагальненої і степеневої рідин. Нижче розглядається поздовжня течія в плоскому каналі як базова, подібно до такої ж течії бінгамівської рідини. Потім розглядаються поздовжньо-поперечна течія в плоскому каналі і поздовжня течія в прямокутному каналі (рис. 4–7).

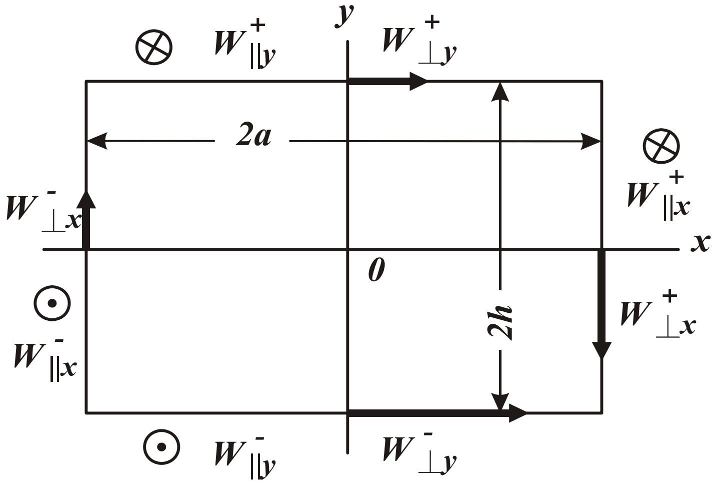


Рис. 4. Прямокутний канал і граничні умови тривимірної течії в каналі:
$W^{\pm}_{IIY}$ – значення поздовжньої швидкості на стінках каналу; нормальних до осі OY;
$W^{\pm}_{IIX}$ – значення поздовжньої швидкості на стінках каналу; нормальних до осі OX;
$W^{\pm}_{\perp X}, W^{\pm}_{\perp Y}$ – значення поперечних швидкостей на границях каналу.

Граничны умови для базової задачи куеттовскої течії відображені на рис. 5.

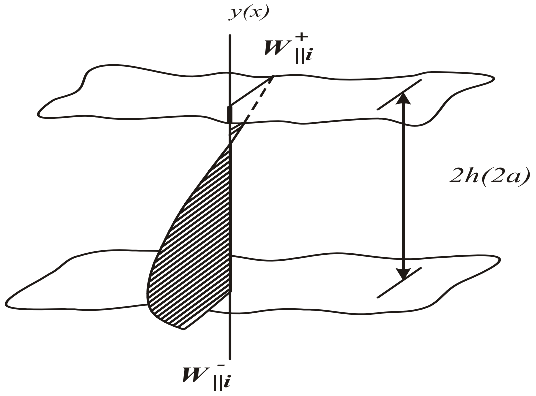
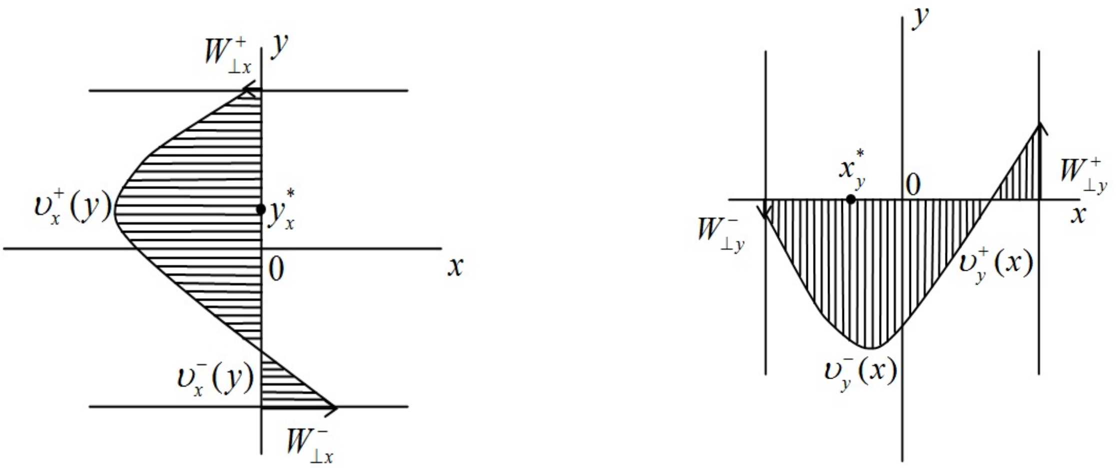


Рис. 5. Фрагмент щілинного каналу та граничні умови:
$i = x, y$; $i = x$, ширина канала – $2a$; $i = y$, ширина канала $2h$



а б

Рис. 6. Поперечна течія в щілинному каналі:
а – в залежності від координати у, б – в залежності від координати х

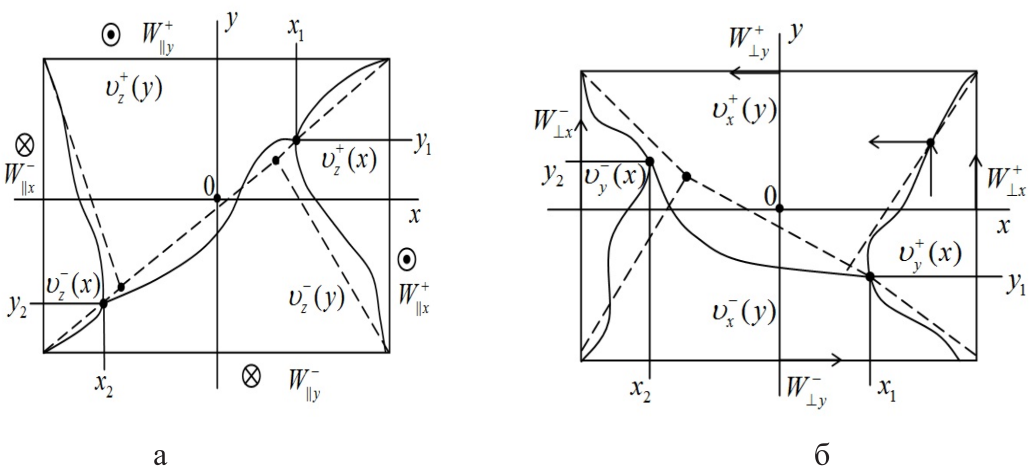


Рис. **7.** Розбивка прямокутного каналу і лінеаризація розбивки:
а – для поздовжньої течії; б – для поперечної течії

Вираження для профілю поздовжньої течії в плоскому каналі має такий вигляд [11]:

$$\upsilon_z^{\pm} = \frac{\alpha(h \mp y)}{\beta} + \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} \pm \frac{y^* - y}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\frac{\beta}{dP/dz} - \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h \mp y^*}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)\frac{2}{3}\frac{\beta}{dP/dz} + w^{\pm}$$

$$y^* = \frac{w^+ - w^-}{\dfrac{\alpha}{\beta} - 2\left(\dfrac{\alpha^2}{4\beta^2} + \dfrac{h}{\beta}\dfrac{dP}{dz}\right)^{1/2}}; \qquad \mu_{эф} = \alpha + \beta\sqrt{I_2}, \tag{13}$$

в якому $\mu_{эф}$ – в'язкість узагальненої рідини $Па \cdot с$;

α, β – параметри в'язкості;

w^+ і w^- – швидкості руху стінок каналу, м/с. (див. рис.4);

z – координата уздовж осі каналу, м.

Вираження для швидкості поздовжньо-поперечної течії в плоскому каналі в поздовжньому напрямку мають вигляд, подібний (13), але через те, що в цій течії існують дві компоненти швидкості, величина β змінюється за таким правилом: $\beta \to \beta_z = \beta\sqrt{\left(1+k^2\right)/2}$, де величина k залежить від швидкостей на межах каналу таким чином [12].

$$k = \frac{w_\perp^+ - w_\perp^-}{w_\|^+ - w_\|^-} \tag{14}$$

де $w_\perp^{\pm}$, $w_\|^{\pm}$ – швидкості стінок каналу в поздовжньому і поперечному напрямах відповідно.

Величина α в поздовжньо-поперечній течії співпадає з однойменною величиною поздовжньої течії. Поперечна компонента швидкості υ_y^+ те ж описується формулою (13), в якій градієнт поздовжнього тиску dP/dz необхідно поміняти на поперечний градієнт dP/dy; і величину β поміняти на величину β_x за правилом: $\beta \to \beta_x = \beta\sqrt{\left(1+k^2\right)/2k^2}$. При цьому величина α залишається рівною своєму значенню в поздовжній течії.

Поздовжньо-поперечна течія характеризується двома спеціальними точками y_z^* і y_y^*, вирази для яких виходять з вираження (13) для координати y^* за такими правилами:

$$y_z^*\left(w^+ - w^-, \alpha, \beta, dP/dz\right) \to y_z^*\left(w_\parallel^+ - w_\parallel^-, \alpha, \beta_z, dP/dz\right);$$
$$y_y^*\left(w^+ - w^-, \alpha, \beta, dP/dz\right) \to y_y^*\left(w_\perp^+ - w_\perp^-, \alpha, \beta_x, dP/dx\right).$$

Величина dP/dx визначається з такої формули:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{3}{2}\alpha\frac{w_\perp^+ + w_\perp^-}{h^2}\cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta_x}\right)^m + \frac{7}{2}\frac{\beta_x}{h^3}\left(w_\perp^+ - w_\perp^-\right)^2\left(\frac{\beta_x}{\alpha+\beta_x}\right)^n, \qquad (15)$$

у якій m і n - деякі числові параметри, би/р.

Поздовжня течія в прямокутному каналі також будується з профілів швидкості (13) як основних параметрів. Це робиться шляхом кускового розбиття прямокутника поперечного перерізу каналу на підобласті, в яких поздовжня швидкість залежить від координат x і y окремо [13]. Компактний запис вираження для поздовжньої швидкості має такий вигляд:

$$\upsilon_{zi}^\pm = \frac{\alpha_i}{2\beta_i}\left(l_i \mp x_i\right) + \left(\frac{\alpha_i^2}{4\beta_i^2} \pm \frac{x_i x_i^*}{\beta_i}\frac{dP}{dz}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\frac{\beta_i}{dP/dz} - \left(\frac{\alpha_i^2}{4\beta_i} + \frac{\alpha_i \mp x_i^*}{\beta_i}\frac{dP}{dz}\right)^{3/2}\frac{2}{3}\frac{\beta_i}{dP/dz};$$

$$x_i^* = \frac{w_i^+ - w_i^-}{\frac{\alpha_i}{\beta_i} - 2\left(\frac{\alpha_i^2}{4\beta_i^2} + \frac{l_i}{\beta_i}\frac{dP}{dz}\right)^{1/2}}; \qquad i = y, x; \qquad l_i = h, a; \qquad x = h/a;$$

$$(16)$$

$$\alpha_y = \alpha\left(1 + ж^2\right); \qquad \beta_y = \beta\left(1 + ж^2\right)^{3/2}/2;$$
$$\alpha_x = \alpha\left(1 + 1/ж^2\right); \qquad \beta_x = \beta\left(1 + 1/ж^2\right)^{3/2}/2,$$

у якому a – ширина прямокутного каналу, м.

При обчисленні коефіцієнтів тепловіддачі течій, швидкості яких представлені формулами (13), (14), (15) і (16), необхідно скористатися формулами (5) і при цьому взяти до уваги те, що в плоскому каналі в поздовжньому і поздовжньо-поперечному течіях є два коефіцієнти тепловіддачі, а в прямокутному каналі − чотири коефіцієнти тепловіддачі. У поздовжньо-поперечній течії в плоскому каналі потрібно складати по теорії Піфагора дві складові дотичної швидкості. Як і для течії бінгамівської рідини обчислення коефіцієнтів тепловіддачі зводиться до обчислення перших похідних швидкості біля меж каналів. Для поздовжньої течії в плоскому каналі значення похідних в точках $y = \pm h$ є рівними:

$$\left.\frac{\partial\upsilon^\pm}{\partial y}\right|_{y=\pm h} = \mp\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} \pm \frac{h \mp y^*}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)^{1/2}. \qquad (17)$$

Для поздовжньо-поперечної течії при обчисленні похідних потрібно використати правило знаходження модуля вектоара (див. формулу (17) вираження для $\upsilon_y^\pm$). У результаті проведення обчислень для похідних є правильними такі вирази:

$$\left.\frac{\partial\tilde{\upsilon}^{\pm}}{\partial y}\right|_{y=\pm h}=\frac{1}{2\sqrt{\left(w_{\parallel}^{\pm}\right)^{2}+\left(w_{\perp}^{\pm}\right)^{2}}}\left\{2w_{\parallel}^{\pm}\left.\frac{\partial\upsilon_{z}^{\pm}}{\partial y}\right|_{y=\pm h}+2w_{\perp}^{\pm}\left.\frac{\partial\upsilon_{x}^{\pm}}{\partial y}\right|_{y=\pm h}\right\},$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\upsilon}_{z}^{\pm}}{\partial y}\right|_{y=\pm h}=\mp\frac{\alpha}{2\beta_{z}}\pm\left(\frac{\alpha^{2}}{4\beta_{z}^{2}}+\frac{h\mp y_{z}^{*}}{\beta_{z}}\frac{dP}{dz}\right)^{1/2};\qquad\beta_{z}=\beta\sqrt{\left(1+k^{2}\right)/2};$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\upsilon}_{x}^{\pm}}{\partial y}\right|_{y=\pm h}=-\frac{\alpha}{2\beta_{x}}\pm\left(\frac{\alpha^{2}}{4\beta_{x}^{2}}+\frac{h\mp y_{x}^{*}}{\beta_{x}}\frac{dP}{dz}\right)^{1/2};\qquad\beta_{x}=\beta\sqrt{\left(1+k^{2}\right)/2k^{2}}.$$

$$y_{z}^{*}=\frac{w_{\parallel}^{+}-w_{\parallel}^{-}}{\dfrac{\alpha}{\beta_{z}}-2\left(\dfrac{\alpha^{2}}{4\beta_{z}^{2}}+\dfrac{h}{\beta_{z}}\dfrac{dP}{dz}\right)^{1/2}};\qquad(18)$$

$$y_{x}^{*}=\frac{w_{\perp}^{+}-w_{\perp}^{-}}{\dfrac{\alpha}{\beta_{x}}-2\left(\dfrac{\alpha^{2}}{4\beta_{x}^{2}}+\dfrac{h}{\beta_{x}}\dfrac{dP}{dx}\right)^{1/2}}$$

Обчислення похідних для поздовжньої течії в прямокутному каналі виконується за допомогою формул (16) і зводиться до формул типу (17) з відповідними значеннями α_i, β_i, x_i^*.

Окремо має сенс розглянути обчислення коефіцієнтів тепловіддачі для течії степеневої рідини. У зв'язку з тим, що цілий ряд теплоносіїв характеризується в'язкістю степеневої рідини [14]. Через те, що головні моменти обчислень абсолютно подібні до тих, які описувалися стосовно бінгамівської і узагальненої рідинам, нижче розглядається тільки поздовжня течія статечної рідини в плоскому каналі. Вираження для швидкості поздовжньої течії степеневої рідини з показником n має такий вигляд:

$$\upsilon^{\pm}=\left|\frac{y-y^{*}}{\beta}\cdot\frac{dP}{dz}\right|^{\frac{n+2}{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n+2}\frac{\beta}{dP/dz}-\left|\frac{h\mp y^{*}}{\beta}\frac{dP}{dz}\right|^{\frac{n+2}{n+1}}\cdot\frac{n+1}{n+2}\frac{\beta}{dP/dz}+w^{\pm},$$

$$y^{*}=\frac{w^{+}-w^{-}}{2\left(\dfrac{h}{\beta}\dfrac{dP}{dz}\right)^{\frac{1}{n+1}}},\qquad\mu=\beta\left|\frac{d\upsilon^{\pm}}{dy}\right|^{n}.\qquad(19)$$

Обчислення похідної від (19) для коефіцієнта тепловіддачі приводить до такого результату:

$$\left.\frac{\partial\upsilon^{\pm}}{\partial y}\right|_{y=\pm h}=\left(\frac{h\mp y^{*}}{\beta}\frac{dP}{dz}\right)^{\frac{1}{n+1}}.\qquad(20)$$

Представлені результати свідчать про те, що залежність числа Нуссельта від градієнтів тиску (поздовжнього і поперечного) реологічних і геометричних характеристик рідин і каналів є нелінійною і дуже складною. Для того, щоб зробити цю залежність простішою і наочнішою слід записати вирази для числа Нуссельта для найпростішої течії, тобто для поздовжньої течії в плоскому каналі. Більш складніші з розглянутих вище течій, також мають числа Нуссельта, але числа є більш кількісно, ніж якісно ускладнені.

Вирази для чисел Нуссельта нижче записуються відповідно до формул (5) з точністю до тривіальних множників при похідних швидкості. Для бінгамівської рідини число Нуссельта є пропорціональним наступному вираженню:

$$N_u \sim \left\{ \frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\zeta} \left[1 \mp \frac{\tau_\circ}{dP/d\zeta} - \frac{\left(w^+ - w^-\right)/2h}{dP/d\zeta \cdot (1/\mu) \cdot \left(1 - \tau_\circ / dP/d\zeta\right)} \right] \right\}^{1/3}, \text{ (на стінках)}$$

$$N_u \sim \left(\frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\zeta} \right)^{1/4}, \text{ (на межах твердого ядра)} \qquad (21)$$

З цього виразу виходить, що перші два числа Нуссельта залежать від трьох параметрів: $(1/\mu)(dP/d\zeta)$; $\tau_\circ/(dP/dz)$; $\left(w^+ - w^-\right)/2h$, останній з яких є кінематичною швидкістю зрушення куеттовської течії ньютонівської рідини.

Для узагальненої рідини вираження для чисел Нуссельта правильним є вираження:

$$N_u \sim \left\{ \pm \frac{\alpha}{2\beta} \pm \left[\frac{\alpha^2}{4\beta^2} \pm \frac{1}{\beta} \frac{dP}{d\zeta} \cdot \left(1 \mp \frac{\left(w^+ - w^-\right)/2h}{\dfrac{\alpha}{2\beta} - \left(\dfrac{\alpha^2}{4\beta^2} + \dfrac{1}{\beta} \dfrac{dP}{d\zeta} \right)^{1/2}} \right) \right]^{1/2} \right\}^{1/3}, \qquad (22)$$

З якого видно, що число Нуссельта також залежить від трьох наступних параметрів:

$$\alpha/2\beta \; ; \; (1/\beta)(dP/d\zeta); \; \left(w^+ - w^-\right)/2h \; .$$

Степенева рідина має число Нуссельта, пропорційні такому виразенню :

$$N_u \sim \left\{ \frac{1}{\beta} \frac{dP}{d\zeta} \left[1 \mp \frac{\left(w^+ - w^-\right)/h}{\left(\dfrac{1}{\beta} \dfrac{dP}{d\zeta} \right)^{\frac{1}{n+1}}} \right] \right\}^{\frac{1}{3(n+1)}} \qquad (23)$$

в яке входить два такі параметри: $(1/\beta)(dP/d\zeta)$ і $\left(w^+ - w^-\right)/2h$.

Висновки

Виходячи з вищевказаного, можна констатувати наступне. Усі представлені результати відносяться до гідродинамічно стабілізованих течій. Числа Нуссельта для бінгамівської рідини та інших неньютонівських рідин на стінках каналів, визначаються по першій похідній швидкості від змінної, спрямованої по нормам до стінки. Числа Нуссельта для бінгамівської рідини, які взяті у межах твердого ядра визначаються по другій похідній швидкості по нормам дії межі. Якщо дотична швидкість течії рідини у стінки має дві складові, то швидкість, похідна якої входить до числа Нуссельта, визначається через ці складові відповідно до теореми Піфагора. Числа Нуссельта для бінгамівської і узагальненої рідин залежать від трьох параметрів при поздовжній течії в плоскому каналі. Якщо течія має складніший характер, тобто є двох- чи трьохвимірною, то кількість параметрів зростає так, що ці параметри породжуються кожною компонентою швидкості багатовимірної течії і утворюють між собою усі можливі комбінації.

У подальшому значення чисел Нуссельта дозволяє обчислювати відповідні коефіцієнти тепловіддачі і теплопередачі між неньютонівськими рідинами, в трубах і каналах, і зовнішнім середовищем.

Список літератури

1. Кутателадзе С. С. Теплопередача и гидравлическое сопротивление. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 367 с.

2. Кутателадзе С. С. Анализ подобия в теплофизике. – Новосибирск. Наука. Саб. отд. 1982. – 280 с.

3. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. – М.: Атомиздат. 1979. – 415 с.

4. Уилкинсон У. А. Неньютоновские жидкости. – М.: Мир. 1964. – 216 с.

5. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. – М.: Химия. 1984. – 628 с.

6. Лойцянський Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука. ГРФМЛ. –1973. – 848 с.

7. Гиргидов А. Д. Механика жидкости и газа (гидравлика). – СПб.: изд-во Политехнического ин-та. – 2007. – 545 с.

8. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Изд. фирма ФМЛ. Наука. 2001. – 576 с.

9. Білецький Е. В., Толчинський Ю. А. Модель в’язкопластичного бінгамовського плину в прямокутному каналі // Обладнання та технології харчових виробництв. – 2010. – № 24. – С. 45–54.

10. Білецький Е. В., Толчинський Ю. А. Властивості сімейства функцій для опису в’язкопластичної течії і граничних умов течі // Харчова наука і технологія. – 2010. – № 1(10). – С. 104–105.

11. Билецкий Э. В. Продольное течение бингамовской жидкости с поперечной циркуляцией в прямоугольном канале червячной машины //Теория и практика инновационного развития кооперативного образования и науки: Материалы международной научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава и аспирантов., 14–16 апреля 2010 р. / Билецкий Э. В., Толчинский Ю. А.; Издательство БУПК. – Белгород. – 240 с.

CALCULATION OF HEAT-TRANSFER COEFFICIENTS FOR SOME NON-NEWTONIAN FLUID FLOWS IN PIPES AND DUCTS

E.V. BILETSKIY, Cand.Tech. Scie.
Y.A. TOLCHINSKIY, Cand.Tech. Scie.

The article deals with the problem of heat-transfer for non-Newtonian fluid flows in tubes and ducts. Methods for determining heat-transfer values are proposed for exponential, Bingamo and generalized fluids.

Поступила в редакцию 16.12 2011 г.