УДК 330.4

ЭНТРОПИЙНЫЙ ПОДХОД В АНАЛИЗЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДОВ В ОБЩЕСТВЕ

Т.В. Меркулова, д.е.н., професор

А.А. Янцевич, д.е.н., професор

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, Украина

Меркулова Т.В., Янцевич А.А. Ентропійний підхід до аналізу розподілу доходів у суспільстві.

Розглянуто особливості взаємозв'язку ентропії розподілу суб'єктів за доходом, ентропії розподілу доходу за суб'єктами, індекс Тейла та коефіцієнт Джині. Обґрунтовано припущення, що нелінійний характер змін ентропії, який супроводжується трансформацією розподілу доходів, являється фактором, який гальмує реформи в країнах, що розвиваються.

Ключові слова: ентропія, розподіл доходів, індекс Тейла, коефіцієнт Джині

Меркулова Т.В., Янцевич А.А. Энтропийный подход в анализе распределения доходов в обществе.

Рассмотрены особенности взаимосвязи энтропии распределения субъектов по доходу, энтропии распределения дохода по субъектам, индекса Тейла и коэффициента Джини. Обосновано предположение, что нелинейный характер изменения энтропии, сопровождающий трансформацию распределения доходов, является фактором, тормозящим реформы в развивающихся странах.

Ключевые слова: энтропия, распределение доходов, индекс Тейла, коэффициент Джини

Merkulova T.V., Yantshevich A.A. An Entropy approach to analysis of income distribution in society.

The relationship between income inequality measures and entropy measures, including entropy based on income distribution and entropy based on people distribution, Theil index and Gini coefficient are discussed. It can be suggested that nonlinear change of entropy accompanying changes in income distribution is a factor which slows dawn a further progress in this direction and blocks economic reforms in developing countries.

Keywords: technological policy, potential of the enterprise, competitiveness, business strategy, tools and processes

Энтропия, являясь одним из наиболее важных понятий, прежде всего, в физике, представляет выразительный пример, который характеризует междисциплинарные тенденции в современной науке, сфера ее приложений постоянно расширяется [1-6]. Энтропийный подход, который все более активно используется и в социальных науках – экономике, социологии и др. [7-13], базируется на понимании энтропии, как универсальной характеристики (меры) хаоса / упорядоченности системы: энтропия – это фундаментальное свойство произвольной системы, состоящей из многих элементов, поведение которых характеризуется случайностью [7].

В системах, которые состоят из экономических агентов (потребителей, предприятий, получателей дохода и т.д.), вопросы организованности (упорядоченности) и неопределенности состояния системы, имеют особое значение с точки зрения управления системой, что предполагает управление поведением экономических агентов. Поскольку энтропия принимает наибольшее значение при наивысшей степени беспорядка системы, неопределенности ее состояния, то возрастание энтропии может служить индикатором усиления нестабильности, ослабления прогнозируемости поведения системы, что связывается с рядом проблем в обществе, среди которых нарастание социальной напряженности и опасности социальных катаклизмов, снижение управляемости функционирования системы, усиление несбалансированности и устойчивости экономического развития, снижение его темпов.

Анализ последних исследований и публикаций

Одним из важнейших факторов, который может рассматриваться как причинный по отношению к указанным выше проблемам, является распределение доходов в обществе. Существование и характер связи между экономическим ростом и распределением дохода в обществе является предметом теоретического анализа и эмпирических исследований, которые имеют длительную историю, начиная с классической работы С. Кузнеца [14].

Эмпирические исследования последних десятилетий показали, что экономический рост может сопровождаться снижением, увеличением или консервацией неравенства [15, 16, 17]. Исследователи отмечают примеры, когда увеличение неравенства происходило на фоне не роста, а падения (страны Восточной Европы и Центральной Азии в период 1985–1995 гг.) [18], а также примеры негативного влияния неравенства на экономический рост [19].

Неравенство в распределении доходов может быть фактором, способствующим не только снижению экономической эффективности, но и усилению нестабильности в обществе, нарастанию неопределенности и хаотичности поведения социально-экономической системы, что характеризуется увеличением энтропии.

Нашей задачей является выяснение и унтерпретация характера связи между распределением доходов в обществе и энтропией. В качестве показателей неравенства распределения доходов используем индекс Тейла и коэффициент Джини, в качестве характеристики упорядоченности системы – энтропию Шеннона, которая имеет прозрачную интерпретацию применительно к нашей предметной области [20].

Изложение основного материала исследования

Энтропийный коэффициент (индекс) Тейла. Как известно, впервые энтропийный подход к измерению неравенства распределения доходов применил Г. Тейл (1967г) [21], предложив индекс:

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}\ln\frac{x_i}{\mu}\right), \quad (1)$$

где x_i – доход i-го субъекта;

n – количество субъектов;

μ – средний доход.

Впоследствии был предложен класс обобщенных энтропийных показателей неравенства (Generalised Enthropy Class) с параметром α [22]:

$$GE(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2-\alpha}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}\right)^{\alpha} - 1\right]. \quad (2)$$

Индекс Тейла является частным случаем энтропийных коэффициентов при $\alpha = 1$.

Рассмотрим связь индекса Тейла с энтропией Шеннона. Если дана дискретная случайная величина, которая принимает n значений с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то энтропия Шеннона будет иметь вид:

$$H = \sum_{i=1}^{n}\left(p_i \ln\frac{1}{p_i}\right). \quad (3)$$

Для вычисления индекса Тейла используется энтропия распределения дохода, обозначим ее H_T

$$H_T = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu n}\ln\frac{\mu n}{x_i}\right). \quad (4)$$

Энтропия H_T характеризует неопределенность попадания единицы дохода субъектам выборки: $q_i = \frac{x_i}{\mu n}$ – это вероятность получения единицы дохода i-м субъектом, или вероятность того, что i-й субъект получит q_i долю совокупного дохода.

Энтропия достигает максимального значения $H_T^* = \ln n$ при равномерном распределении $q_i = \frac{1}{n}$, т. е. при условии равенства доходов субъектов. Принимая равенство доходов за идеальное состояние, индекс Тейла определяется как показатель, который характеризует разницу между энтропией идеального и анализируемого распределений:

$$T = \ln n - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu n}\ln\frac{\mu n}{x_i}\right). \quad (5)$$

После преобразований это выражение сводится к формуле (1).

В случае, когда весь доход сосредоточен у одного субъекта, система полностью де терминирована: с вероятностью 100% известно, кому достанется дополнительная единица дохода, $H_T = 0$. Индекс Тейла при этом достигает максимального значения $T = \ln n$. Распределение дохода по субъектам характеризуется наибольшей неопределенностью при равенстве доходов (тогда вероятность получения единицы дохода одинакова для всех субъектов), $T = 0$.

Подчеркнем 2 момента в интерпретации индекса Тейла. Во-первых, за идеальное состояние принимается состояние, характеризующееся максимальной энтропией; во-вторых, показатель неравенства (индекс Тейла) и показатель не определенности (H_T) характеризуются монотонным разнонаправленным изменением: при уменьшении неравенства H_T возрастает и наоборот. Но главное, отметим, что энтропия, которая используется для определения индекса Тейла, характеризует неопределенность в распределении дохода, рассматривая экономическую систему, по сути состоящую из единиц дохода.

Однако микроэкономическая система представлена экономическими агентами (субъектами), поведение которых характеризуется вероятностью получения того или иного дохода. С этой точки зрения неопределенность системы зависит от распределения ее элементов (агентов) по доходу. Если доход агента является дискретной случайной величиной, которая принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, то для характеристики неопределенности можем непосредственно воспользоваться формулой Шеннона:

$$H = \sum_{k=1}^{m}\left(p_k \ln\frac{1}{p_k}\right) = -\sum_{k=1}^{m}\left(p_k \ln p_k\right). \qquad (6)$$

В отличие от H_T энтропия H при равенстве доходов равна 0: состояние системы является наиболее упорядоченным, и в этом смысле его можно считать идеальным.

Если выразить энтропию H_T и индекс Тейла с использованием частот $p_1, p_2, \ldots, p_m$, получим:

$$H_T = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{n_k x_k}{\mu n}\ln\frac{\mu n}{x_k}\right) = \ln n - \sum_{k=1}^{m} p_k\frac{x_k}{\mu}\ln\frac{x_k}{\mu}. \qquad (7)$$

$$T = \sum_{k=1}^{m} p_k\frac{x_k}{\mu}\ln\frac{x_k}{\mu}. \qquad (8)$$

Энтропия H принимает максимальное значение $\ln m$ при равномерном распределении субъектов по доходу $p_k = const = \frac{1}{m}$. В этом случае все значения дохода являются равновероятными для субъекта, и в этом смысле система характеризуется наибольшей неопределенностью, что с содержательной точки зрения вполне понятно. Энтропия H_T в этом случае будет иметь вид:

$$H_T = \ln n - \ln m - \sum_{k=1}^{m}\frac{x_k}{X}\ln\frac{x_k}{X}, \text{ где } \quad X = \sum_{k=1}^{m} x_k. \qquad (9)$$

При этом значения дохода x_k могут быть достаточно близкими, а могут отличаться существенно. В зависимости от этого энтропия распределения дохода НТ будет более или менее близка к своему максимальному значению $H_T^* = \ln n$, а индекс Тейла – к 0.

Если распределение субъектов по доходу задано функцией плотности распределения $p(x)$, $0 \le x \le x_{\max}$, то интересующие нас показатели будут иметь вид:

$$H = -\int_0^{x_{\max}} p(x)\ln p(x)dx, \qquad (10)$$

$$H_T = -\int_0^{x_{\max}} p(x)\frac{x}{\mu}\ln\frac{x}{\mu n}dx, \quad T = \int_0^{x_{\max}} p(x)\frac{x}{\mu}\ln\frac{x}{\mu}dx. \qquad (11)$$

В случае равномерного распределения субъектов по доходу они принимают значения:

$$H^* = \ln(x_{\max}), \quad H_T = \ln n - \ln 2 + \frac{1}{2}, \quad T = \ln 2 - \frac{1}{2} \qquad (12)$$

Отметим, что наибольшего «беспорядка» в соответствии с энтропией H система достигает не при граничных значениях индекса Тейла, т.е., ни при максимальном или минимальном неравенстве, а при $T \approx 0{,}193$.

В более общем случае, когда распределение субъектов по доходу задано степенной функцией распределения $F(x) = \left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^{\alpha}$ (при $\alpha = 1$ получаем равномерное распределение), индекс Тейла принимает значение, зависящее от параметра α:

$$T = \ln\frac{\alpha+1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1}.$$

Рассмотренные примеры демонстрируют особенности интерпретации энтропии распределения субъектов по доходу, энтропии распределения дохода по субъектам и показателя неравенства – индекса Тейла. Энтропия распределения дохода H_T, являясь показателем неопределенности, одновременно характеризует и неравенство доходов: чем меньше неравенство, тем больше энтропия и наоборот. Энтропия распределения субъектов H характеризует только неопределенность попадания субъектов в группы дохода: чем более равномерно распределено население по значениям (интервалам) дохода, тем более неопределенным становится положение субъектов в том смысле, что выравниваются вероятности попадания в бедные и богатые слои.

Коэффициент Джини и энтропия. Рассмотрим связь между энтропией распределения субъектов по доходу (H) и другим популярным показателем неравенства – коэффициентом Джини, который не относится к группе энтропийных, поэтому анализ данного случая имеет более общий характер. Для удобства используем непрерывную постановку.

Как известно, коэффициент Джини можно найти по формуле:

$$d = 1 - 2\int_0^1 L(t)dt, \qquad (13)$$

где $L(t)$ – функция Лоренца, которая выражает зависимость между долей населения t, $0 \le t \le 1$, и долей, которую составляет суммарный доход этой группы в общем доходе всего населения $0 \le L(t) \le 1$.

Если известна функция плотности распределения дохода $p(x)$, $0 \le x \le x_{\max}$, то функцию Лоренца можно задать как функцию от дохода индивида:

$$L(x) = \frac{\int_0^x tp(t)dt}{\int_0^{x_{\max}} tp(t)dt} = \frac{1}{\bar{x}}\int_0^x tp(t)dt, \qquad (14)$$

где $\bar{x}$ – средний доход. Через функцию распределения дохода $F(x)$ она выражается как:

$$L(F) = \frac{\int_0^F x(F_1)dF_1}{\int_0^1 x(F_1)dF_1}, \qquad (15)$$

где *x(F)* – функция обратная к функции распределения.

Продемонстрируем связь между коэффициентом Джини и функцией распределения дохода на примере степенного закона $F(x) = \left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^{\alpha}$. Параметр $\alpha > 0$ позволяет учесть сдвиг распределения в сторону богатых или бедных слоев (рис. 1).

Равномерное распределение, когда все значения дохода являются равновероятными, получается при $\alpha = 1$ (прямая, рис. 1.). При $\alpha > 1$ графики функций находятся ниже прямой, их условно назовем как распределение «богатых» (низкий доход является менее вероятным). При $\alpha < 1$ (область выше прямой) – это распределение «бедных»: высокий доход является более редким явлением.

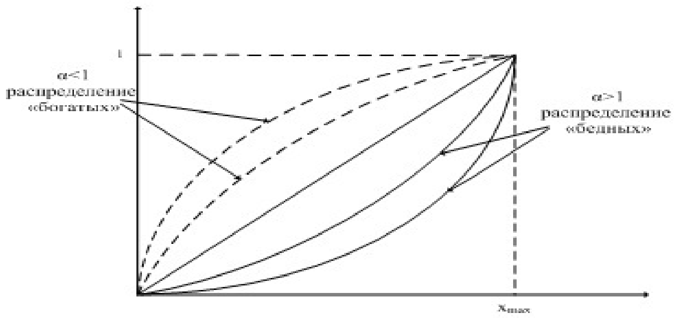

Рис. 1. Функции распределения дохода

Кривые Лоренца $L(t) = t^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$ при различных значениях параметра *α*, где *t* – доля населения, $0 \le t \le 1$, будут располагаться под прямой, которая соответствует равенству доходов (рис. 2).

Коэффициент Джини зависит от параметра α $d = \frac{1}{2\alpha + 1}$: при $\alpha \to \infty$ кривая Лоренца приближается к биссектрисе (рис. 2), и коэффициент Джини стремится к 0; при $\alpha \to 0$ показатель неравенства стремится к своему максимуму – 1.

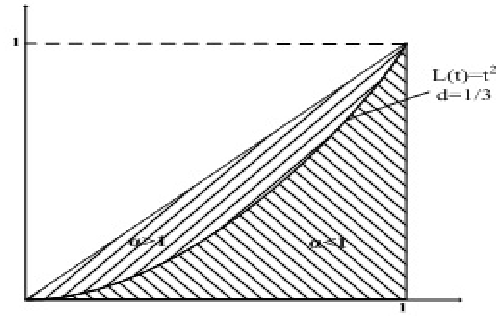

Рис. 2. Кривые Лоренца для степенного закона распределения

При равномерном распределении дохода кривая Лоренца имеет параболический вид $L(t) = t^2$. Коэффициент Джини в этом случае равен 1/3. Выше этой кривой располагаются распределения «богатых» ($\alpha > 1$), ниже – распределения «бедных» ($\alpha < 1$). Таким образом, значения коэффициента от 0 до 1/3 характеризуют степень неравенства в сообществах, где высокие значения дохода являются более частым явлением (общество «богатых»), а значения от 1/3 до 1 соответствуют уровням неравенства в обществе «бедных», когда более распространенными являются низкие доходы (рис. 2). Показатель энтропии для степенной функции распределения и соответствующей ей функции плотности p(x) будет иметь вид $H(\alpha) = \ln(x_{\max}) + 1 - \ln\alpha - \frac{1}{\alpha}$.

Максимальное значение $H^* = \ln(x_{\max})$ энтропия принимает при $\alpha = 1$, т. е. при равномерном распределении дохода. При $\alpha < 1$ энтропия увеличивается: кривым Лоренца, которые находятся выше $L(t) = t^2$, соответствуют значения энтропии, которые возрастают при приближении к этой кривой (рис. 3). Таким образом, изменение показателей неравенства и энтропии в области распределений «богатых» имеет однонаправленный характер: они возрастают по мере приближения к равномерному распределению.

При $\alpha > 1$ коэффициент Джини продолжает расти, а энтропия, напротив, уменьшается. Интерпретируя энтропию как меру упорядоченности системы, получаем, что сдвиг распределения «богатых» в сторону равномерности распределения, означающий усиление неравенства, сопровождается и усилением неопределенности, неупорядоченности системы. Однако дальнейший сдвиг в сторону бедности, т.е. деформация равномерного распределения в направлении повышения вероятности более низких значений дохода, характеризуется уменьшением неопределенности и усилением упорядоченности системы, хотя и сопровождается ростом неравенства (рис. 3).

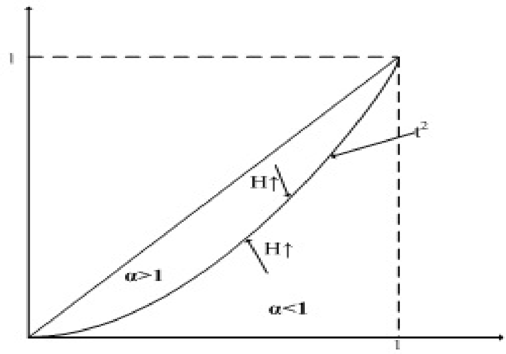

Рис. 3. Направления увеличения энтропии и неравенства

Таким образом, в соответствии с критерием энтропии любое отклонение от равномерного распределения населения по доходу (именно оно характеризуется наибольшим «беспорядком») является позитивным с точки зрения повышения упорядоченности системы. При этом с точки зрения неравенства, измеряемого коэффициентом Джини, эти сдвиги неравноценны.

Выводы

На основании этого анализа можно сделать следующие выводы, которые имеют отношение к экономической политике в области распределения доходов и регулирования неравенства. Во-первых, усиление неравенства в ситуациях, когда большинство населения сосредоточено в низкодоходных группах, может способствовать стабилизации социально-экономической системы. Концентрация доходов в малых группах населения усиливает их влияние и расширяет их возможности управления обществом, консервируя положение остальной части населения на низкодоходном уровне. Во-вторых, если в вышеуказанной исходной ситуации общество начинает проводить политику уменьшения неравенства, то оно на первом этапе столкнется с проблемой усиления хаоса и неопределенности, которые будут нарастать вплоть до выравнивания численности групп населения с разными доходами. Дальнейшая работа по уменьшению неравенства уже будет способствовать стабилизации системы, ее организованности и управляемости. Возможно, такой нелинейный характер изменения упорядоченности системы, ее устойчивости, сопровождающий трансформацию распределения доходов от концентрации населения в низких слоях до перехода в высокодоходные группы, является фактором, тормозящим реформы и препятствующим последовательному продвижению в данном направлении. Представителям правящих кругов представляется более простым и надежным обеспечение стабильности путем концентрации доходов и богатства в узком кругу лиц, и чем более неравномерным является исходное распределение дохода, тем более привлекательным представляется этот путь, поскольку выравнивание доходов будет сопровождаться ростом неопределенности, потерей управляемости и стабильности.

Список литературы:

1. Осипов А.И. Энтропия и ее роль в науке / А.И. Осипов, А.В. Уваров // Соросовский образовательный журнал. – 2004. – Т.8. – №1. – С. 70–79.
2. Шамбадаль П. Развитие и приложения понятия энтропии [Текст] / П. Шамбадаль – М.: Наука, 1967. – 283 с.

3. Крамаренко С.С. Метод использования энтропийно-информационного анализа для количественных признаков / С.С. Крамаренко // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2005. – Т.7. – №1 – С. 242–247.
4. Вильсон А.Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем / А.Дж. Вильсон ; пер. с англ. – М.: Наука, 1978. – 248 с.
5. Климентович Ю.Л. Введение в физику открытых систем / Ю.Л. Климонтович. – М.: Янус-К, 2002. – 284 с.
6. Пигнастый О.М. Статистическая теория производственных систем / О.М. Пигнастый. – Харьков, ХНУ им. Каразина, 2007. – 388 с.
7. Королев О.Л. Применение энтропии при моделировании процессов принятия решений в экономике : монография / [Королев О.Л., Куссый М.Ю., Сигал А.Ю.]. : под ред. доц. А.В. Сигала. – Симферополь: Издательство «ОДЖАКЪ», 2013. – 148 с.
8. Сергеев Н. Ранжирование стратификационных критериев методом энтропийного анализа / Н. Сергеев // Мир России. – 2002. – № 3. – С. 171–184.
9. Шкаратан О.И. Энтропийный анализ как метод безгипотезного поиска реальных (гомогенных) социальных групп: научное издание / О.И. Шкаратан, Г.А. Ястребов // СОЦИС. – 2009. – № 2. – С. 52–64.
10. Аптекар М.Д. Информационно-энтропийный подход в анализе эколого-экономических систем / М.Д. Аптекарь, С.К. Рамазанов, В.Ю. Припотень, М.А. Руденко // Вісник СНУ ім. В.Даля. – 2005. – №5 (87). – С. 265–272.
11. Романовский М.Ю. Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели / М.Ю. Романовский, Ю.М. Романовский. – М.-Ижевск: РХД, 2007. – 280 с.
12. Дербенцев В.Д. Синергетичні та еконофізичні методи дослідження динамічних та структурних характеристик економічних систем : монографія / [Дербенцев В.Д., Сердюк О.А., Соловйов В.М., Шарапов О.Д.]. – Черкаси: Брама-Україна, 2010. – 287 с.
13. Соловйов В.М. Інформаційні технології та моделювання в економіці: на шляху до міждисциплінарності : монографія / В.М. Соловйов, О.А. Сердюк ; за ред. д.ф.-м.н., проф. Соловйова В.М. – Черкаси: Брама-Україна, видавець Вовчок О. Ю., 2013. – 325 с.
14. Kuznets S. Economic Growth and Income Inequality / S. Kuznets // American Economic Review. 1955. – Vol. 45. – №1. – P. 1–28.
15. Milanovic B. Determinants of Cross-Country Income Inequality: An Augmented Kuznets Hypothesis // World Bank Policy Research Working Paper 1246. – World Bank, Washington, D.C. – 1994.
16. Ravallion M. Equity and Growth in Developing Countries: Old and New Perspectives on the Policy Issues / Ravallion M., Lyn S., Michael B. // Policy Research Working Paper 1563. – World Bank, Washington, D.C. – January. – 1996.
17. Deininger K. A New Data Set Measuring Income Inequality / Deininger K., Lyn S. // World Bank Economic Review. – 1996. – September. – №10 (3). – P. 565–591.
18. Adams R.H. Economic Growth, Inequality, and Poverty – Findings from a New Data Set / R.H. Adams // World Bank Policy Research Working Paper. February. – 2002. – №2972. – Mood access: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=636334.
19. Bigsten A. Growth, Income Distribution, and Poverty: A Review / Bigsten A., Levin J. // WIDER Discussion Paper 129. – Helsinki. – 2001.
20. Shannon C.E. A Mathematical Theory of Communication / C.E. Shannon // Bell System Technical Journal. – 1948. – V.27. – №3.
21. Theil H. Economics and information theory / H. Theil – Amsterdam: North-Holland, 1967. – 488 p.
22. Cowell F. Measuring Inequality / Cowell F., Philip A. – Oxford, UK, 1977.

Надано до редакції 17.04.2014

Меркулова Тамара Вікторівна / Tamara V. Merkulova
tamara_merkulova@yahoo.com

Янцевич Артем Артемович / Artem A. Yantshevich
cyber.khnu@gmail.com

Посилання на статтю / Reference a Journal Article:
Энтропийный подход в анализе распределения доходов в обществе [Електронний ресурс] / Т.В. Меркулова, А.А. Янцевич // Економіка: реалії часу. Науковий журнал. – 2014. – № 4 (14). – С. 5-10. – Режим доступу до журн.: http://economics.opu.ua/files/archive/2014/n4.html