East Eur. J. Phys. Vol.2 No.1 (2015) 36-40

PACS: 87.63.D-, 83.63.dk

CORRELATION FUNCTION AND THE POWER SPECTRUM OF THE DOPPLER ULTRASOUND RESPONSE SIGNAL OF UNIFORMLY ACCELERATED SCATTERERS IN FLUID FLOW

E.A. Barannik, O.S. Matchenko
V.N. Karazin Kharkiv National University
4, Svobody Sq., Kharkov, 61022, Ukraine
e-mail: sasha.matchenko@gmail.com
Received January 15, 2015

Within the continuum model of the ultrasound wave scattering from inhomogeneties in fluid flow, the analytical expression for the correlation function of mass density and compressibility fluctuations has been obtained in the present work.Using the Gaussian window function, the practically important approximated closed-form expression has been derived for the Fourier transform of the correlation function. The analysis of the latter allowed to come to some conclusions about the frequency response characteristics of Doppler response power spectra. It is shown that the spectrum width, unlike its mean frequency, depends on the duration of the data sample. The relationship has been found between the optimal duration of the measurement, the acceleration of scatterers in a flow and the wave vector of the probing ultrasound field.
KEYWORDS: ultrasound, Doppler spectrum, color Doppler, fluctuation correlator, nonstationary blood flow, acceleration

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И СПЕКТР МОЩНОСТИ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ДОПЛЕРОВСКОГО ОТКЛИКА РАВНОУСКОРЕННЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Е.А. Баранник, А.С. Матченко
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина
г. Харьков, пл. Свободы 4, 61022, Украина
В рамках континуальной модели рассеяния ультразвуковых волн на неоднородностях в потоке жидкости в настоящей работе получено аналитическое выражение для корреляционной функции флуктуаций плотности и сжимаемости среды в случае равноускоренного движения рассеивателей. С использованием гауссовского весового окна найдено практически важное приближенное выражение для фурье-образа корреляционной функции в классе элементарных функций. Анализ последнего позволил сделать выводы об амплитудно-частотных характеристиках ультразвуковых доплеровских спектров мощности отклика. Показано, что ширина спектра, в отличие от его модальной частоты, зависит от длительности выборки данных. Найдена связь между оптимальной продолжительностью измерения, ускорением рассеивателей в потоке и волновым вектором зондирующего ультразвукового поля.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ультразвук, доплеровский спектр, доплеровское картирование, коррелятор флуктуаций, нестационарный кровоток, ускорение.

КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ І СПЕКТР ПОТУЖНОСТІ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ДОППЛЕРІВСЬКОГО ВІДГУКУ РІВНОПРИСКОРЕНИХ РОЗСІЮВАЧІВ У ПОТОЦІ РІДИНИ

Є.О. Баранник, О.С. Матченко
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
м. Харків, пл. Свободи 4, 61022, Україна
У межах континуальної моделі розсіювання ультразвукових хвиль на неоднорідностях в потоці рідини в даній роботі отримано аналітичний вираз для кореляційної функції флуктуацій густини і стисливості середовища в разі рівноприскореного руху розсіювачів. З використанням гаусівського вагового вікна знайдено практично важливий наближений вираз для фур’є-образу кореляційної функції в класі елементарних функцій. Аналіз останнього дозволив зробити висновки щодо амплітудно-частотних характеристик ультразвукових допплерівських спектрів потужності відгуку. Показано, що ширина спектра, на відміну від його модальної частоти, залежить від тривалості вибірки даних. Знайдено зв'язок між оптимальною тривалістю вимірювання, прискоренням розсіювачів в потоці та хвильовим вектором зондуючого ультразвукового поля.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: ультразвук, допплерівський спектр, допплерівське картування, корелятор флуктуацій, нестаціонарний кровотік, прискорення

Ультразвуковые доплеровские технологии широко используются в современной клинической практике для диагностики состояния сердечно-сосудистой системы. В частности, известно множество работ, в которых с помощью так называемого доплеровского картирования потоков исследуется движение крови по магистральным артериям как в норме, так и при различного рода патологиях (стенозы и т. д.). Данные о зависимости скорости потока крови от фазы сердечного цикла, например, в бедренной [1], легочной [2], сонной [3] артериях однозначно свидетельствуют о том, что в период начала систолы движение крови в этих магистральных сосудах с достаточной степенью точности можно считать равноускоренным. Однако, теоретические исследования особенностей, вносимых в доплеровские спектры отклика ускоренным движением рассеивателей ультразвука, опираются, как правило, на полуэмпирические подходы [4-6], которые дают общее представление об изменении спектральных характеристик, но не приводят к строгим выводам относительно их связи со свойствами зондирующего ультразвукового поля и характеристиками движения рассеивателей в потоке.

В то же время в работах [7-9] разработан подход, дающий возможность получения аналитических выражений для доплеровских спектров на основе их интегральных представлений. Его существенной чертой является введение аподизирующих как в пространстве, так и во времени функций в виде весовых окон, что позволяет при вычислении спектров доплеровских сигналов применить известные методы асимптотической оценки интегралов (см., например, [10]). Несмотря на большое количество известных методов спектрального оценивания ограниченных во времени сигналов [4,11], в практических приложениях используют, как правило, быстрое преобразование Фурье (БПФ), что приводит из-за конечности выборки данных к паразитным боковым лепесткам. Наложение различных весовых окон во временной области применяется именно для уменьшения амплитуды таких боковых лепестков [11]. Аналогичным образом, все современные диагностические устройства работают с аподизированными излучающими апертурами для подавления боковых лепестков ультразвуковых полей излучения и приема.

Целью настоящей работы было исследование с использованием такого подхода влияния ускоренного движения рассеивателей ультразвука на вид корреляционной функции, которая наряду со свойствами зондирующего ультразвукового поля определяет спектры доплеровского отклика исследуемого потока жидкости. Получены аналитические выражения для фурье-образа корреляционной функции при равноускоренном движении рассеивающих неоднородностей, сделаны выводы относительно амплитудно-частотных характеристик спектров ультразвукового доплеровского отклика и проанализированы важные с практической точки зрения соотношения, определяющие оптимальную длительность выборки сигнала при заданных параметрах ультразвукового зондирования.

МОДЕЛЬ

В работе [9] показано, что общая связь между полным спектром мощности доплеровского сигнала из области интереса, спектральными характеристиками корреляционной функции рассеивателей ультразвука и характеристиками ультразвукового поля дается выражением

$$S(\omega) = k^4 \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} C(\vec{q},\omega) \left| G(\vec{q}+2\vec{k}) \right|^2, \tag{1}$$

где $\vec{k}$ и $k = 2\pi/\lambda$ - волновой вектор и волновое число поля ультразвукового излучателя в приближении плоских волн, λ - длина волны, $C(\vec{q},\omega)$ - фурье-образ пространственно-временного коррелятора флуктуаций неоднородностей плотности и сжимаемости в области интереса, зависящий от типа движения в потоке, и $G(\vec{q}+2\vec{k})$ - фурье-образ функции чувствительности ультразвуковой системы, отражающий свойства ультразвуковых полей на пространственных гармониках в области интереса. В соответствии с (1) последовательный расчет доплеровских спектров сводится к определению корреляционной функции флуктуаций для данного типа движения, нахождению функции $G(\vec{q}+2\vec{k})$ и вычислению на этой основе полного спектра мощности.

Как отмечалось в [9], во многих практически важных с точки зрения импульсно-доплеровских приложений случаях функцию $G(\vec{q}+2\vec{k})$ можно считать достаточно острой (по сравнению с коррелятором флуктуаций) с максимумом при $\vec{q} = -2\vec{k}$. Такому идеализированному приближению отвечает случай плоских волн, излучаемых и принимаемых непрерывно [7,12]. Следовательно, в первом приближении полный спектр мощности представим в виде

$$S(\omega) \cong k^4 P \cdot C(-2\vec{k},\omega), \tag{2}$$

где P - полная мощность сигнала ультразвукового отклика из области интереса. Таким образом, полный спектр мощности в первом приближении определяется только лишь видом коррелятора флуктуаций движения рассеивателей.

В работе [9] показано, что для периодического с периодом T детерминированного нестационарного прямолинейного движения после усреднения по статистическому ансамблю и начальному моменту времени движения в пределах периода справедливо выражение

$$C(\vec{q},\omega) = \nu \left\langle (\tilde{\beta}-\tilde{\rho})^2 \right\rangle \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} dt \exp[i(\vec{q}\vec{s}(t) - \omega t)] \right|^2, \tag{3}$$

где ν - константа, зависящая от радиуса корреляции рассеивающих неоднородностей плотности и сжимаемости, которая по порядку величины равна их объему, $\tilde{\rho}(\vec{r},t) = \rho^{-1}(\vec{r},t)\left[\rho(\vec{r},t)-\rho_0\right]$ и $\tilde{\beta}(\vec{r},t) = \beta_0^{-1}\left[\beta(\vec{r},t)-\beta_0\right]$ - безразмерные флуктуации соответственно плотности и сжимаемости среды, ρ_0 и β_0 - пространственные средние значения этих величин, $\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0$ - закон движения рассеивателей в потоке;

$\langle ... \rangle$ означает усреднение по статистическому ансамблю. Заметим, что усреднение по начальной фазе движения позволяет устранить искажение спектров, обусловленное паразитным вкладом комбинационных частотных составляющих вида $\omega - \omega'$ ($\omega \neq \omega'$), на который было указано в [4].

Применительно к равноускоренному движению вида $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}t + \vec{a}t^2/2$, наблюдаемому на интервале времени $t^* - \frac{T}{2} \le t \le t^* + \frac{T}{2}$, имеем ограниченную по времени выборку доплеровского сигнала, которую можно периодически продолжить во времени. В результате в соответствии с (3) для корреляционной функции получаем выражение

$$C(\vec{q},\omega) = \nu \left\langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \right\rangle \frac{1}{T} \left| \int_{t^*-T/2}^{t^*+T/2} dt \exp[i\{\vec{q}(\vec{V}t + \frac{\vec{a}}{2}t^2) - \omega t\}] \right|^2 . \tag{4}$$

Здесь $\vec{V}$ - скорость движения неоднородностей в момент времени $t = 0$ и $\vec{a}$ - ускорение неоднородностей.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Если ось Ox направить вдоль направления движения, которое задается коллинеарными векторами скорости $\vec{V}$ и ускорения $\vec{a}$, то непосредственно из (4) для фурье-образа корреляционной функции находим

$$C(q_x,\omega) = \nu \left\langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \right\rangle \frac{\pi}{2aq_xT} \left| Erf(A_+) - Erf(A_-) \right|^2 ,$$
$$A_\pm = \frac{(1+i)(aq_x(t^* \pm T/2) + q_xV - \omega)}{2\sqrt{aq_x}}, \tag{5}$$

где Erf - функция ошибок.

Выражение (5) позволяет, вообще говоря, осуществить численное построение спектров для различных t^* и T. Такое построение могло бы быть наглядным, однако на его основании невозможно сделать строгие выводы относительно влияния ускорения рассеивателей на частотные характеристики доплеровского спектра и, в частности, доказать, что при равноускоренном движении ширина спектра при прочих равных условиях зависит только от длительности выборки, на что было указано в [9] исходя из общей теоремы Парсеваля.

Для продвижения выкладок далее и получения аналитических решений запишем формулу (4) в виде, характерном для традиционного БПФ с применением некоторого весового окна $W(t-t^*)$ с центром в момент времени t^*:

$$C(\vec{q},\omega) = \nu \left\langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \right\rangle \frac{1}{T} \left| \int_{t^*-T/2}^{t^*+T/2} dt \cdot W(t-t^*) \cdot \exp[i\{\vec{q}(\vec{V}t + \frac{\vec{a}}{2}t^2) - \omega t\}] \right|^2 . \tag{6}$$

В практических приложениях применяют различные весовые окна [11], однако все они отличаются резким спаданием амплитуды по мере удаления от центра окна, что позволяет с хорошей степенью точности распространить интегрирование в (6) до бесконечности. Далее, одним из наиболее популярных является гауссовское весовое окно вида

$$W(t) = \exp[-4t^2/T^2],$$

где T – ширина окна по уровню e^{-1}. Подстановка этого выражения в (6) и интегрирование по времени приводят к следующей формуле для Фурье-образа корреляционной функции:

$$C_G(q_x,\omega) = \nu \left\langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \right\rangle \frac{1}{T} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[i\{q_x(Vt + \frac{a}{2}t^2) - \omega t\}] \exp[-\frac{4(t-t^*)^2}{T^2}] \right|^2 =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^{3/2} \nu \left\langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-\frac{(\omega - \omega_M)^2}{2\sigma^2}]. \tag{7}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\sigma^2 = 4T^{-2} + \frac{a^2q_x^2T^2}{16}, \quad \omega_M = q_x(at^* + V).$$

По физическому смыслу фигурирующий в (7) параметр T представляет собой эффективную длительность выборки доплеровского сигнала. В этом приближении с учетом (7) полный спектр мощности (2) есть

$$S_G(\omega) \cong k^4 P \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^{3/2} \nu \left\langle (\tilde{\beta} - \tilde{\rho})^2 \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp[-\frac{(\omega - \omega_{Mk})^2}{2\sigma_k^2}], \tag{8}$$

$$\sigma_k^2 = 4T^{-2} + \frac{a^2k^2\cos^2\vartheta \cdot T^2}{4}, \;\; \omega_{Mk} = -2k\cos\vartheta(at^* + V),$$

где ϑ - доплеровский угол между осью излучателя волн и направлением движения.

ОБСУЖДЕНИЕ

Спектр (8) имеет гауссовский вид с модальной частотой ω_{Mk} и дисперсией σ_k^2. При этом модальная частота не зависит от продолжительности времени наблюдения, а определяется положением центра окна или, что равнозначно, средней в пределах времени измерения скоростью рассеивателей. Ширина же спектра, напротив, не зависит от конкретных значений скорости и момента начала измерения, а определяется только продолжительностью времени наблюдения T.

В предельном случае $T \to 0$ спектр бесконечно расширяется ввиду малой длительности доплеровского сигнала, а при увеличении продолжительности измерения – из-за его возрастающей частотной модуляции. Более того, из (8) прямо следует, что при неограниченном времени наблюдения движения равноускоренных рассеивателей выражение для полного доплеровского спектра оказывается независящим от частоты. Как показано в [9], для фурье-образа коррелятора флуктуаций в этом случае имеем

$$C_\infty(q_x,\omega) = \lim_{T\to\infty} \nu\left\langle(\tilde{\beta}-\tilde{\rho})^2\right\rangle \frac{1}{T}\left|\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[i\{q_x(Vt + \frac{a}{2}t^2) - \omega t\}]\right|^2 =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \nu\left\langle(\tilde{\beta}-\tilde{\rho})^2\right\rangle \frac{1}{T}\cdot\frac{2\pi}{aq_x}.$$

К этому же значению стремится при $T \to \infty$ выражение (7). Факт такой частотной независимости объясняется тем, что при равноускоренном движении и неограниченном времени наблюдения все скорости дают одинаковый по мощности вклад в ультразвуковой отклик и, соответственно, в полный спектр мощности. В результате частотная зависимость возникает в спектрах только при конечном времени наблюдения потоков, как это и следует из (8).

Помимо этого, анализ выражения (8) с учетом однозначной связи между моментом наблюдения и скоростью рассеивателей показывает, что любые равные между собой интервалы времени (а значит, и скоростей) при заданном ускорении соответствуют равным по полной мощности спектрам, что согласуется с утверждениями, изложенными в [9].

В работах [13-15] изложены закономерности, известные как соотношения Рао-Крамера и предел Найквиста, анализ которых приводит к критерию наивысшей точности спектральных оценок параметров движения и, в частности, скорости движения. В соответствии с этим критерием наивысшая точность измерений достигается при минимальном значении дисперсии распределения доплеровской частоты, что максимизирует отношение сигнал-шум в заданной полосе частот. Характеристики доплеровской системы могут быть оптимизированы, таким образом, исходя из условия минимальности ширины полного спектра мощности сигнала отклика. В частности, в работе [8] таким способом была вычислена оптимальная длительность зондирующих импульсов при наличии пространственных градиентов скорости движения рассеивателей ультразвука.

Аналогичным образом, пользуясь выражением (8) можно найти оптимальное значение продолжительности измерения T путем минимизации величины σ_k^2

$$\frac{\partial\sigma_k^2}{\partial T} = -8T^{-3} + \frac{a^2k^2\cos^2\vartheta\cdot T}{2} = 0 \Rightarrow T_O = \frac{2}{\sqrt{ak\,|\cos\vartheta|}}.$$

Отсюда соответствующее минимальное значение ширины спектра достигается при

$$\sigma_O^2 = 2ak\,|\cos\vartheta|. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получаем выражение для полного спектра мощности при оптимальных условиях:

$$S_{GO}(\omega) \cong k^4P\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^{3/2}\nu\left\langle(\tilde{\beta}-\tilde{\rho})^2\right\rangle\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi ak\,|\cos\vartheta|}}\exp[-\frac{(\omega-\omega_{Mk})^2}{4ak\,|\cos\vartheta|}].$$

В таком виде полученные результаты допускают как графическое построение, так и прямую экспериментальную проверку, что выходит за рамки настоящей работы.

Хорошо известны экспериментальные работы, где исследованы свойства потоков крови в аорте и других крупных артериях. В частности, в [16] доплеровским методом на частоте 2,25 МГц были определены характерные пиковые скорости и средние ускорения потока крови в легочной артерии (0,63 $м/с$ и 3,96 $м/с^2$ соответственно) и в аорте (0,92 $м/с$ и 9,4 $м/с^2$ соответственно). В такой реализации, например, при значении доплеровского угла $\vartheta = 60^0$ оптимальная длина выборки для исследования кровотока в аорте составляет величину порядка $10\,мс$, что в целом согласуется с размерами выборок, применяемых как в современной эхокардиографии, так и в других приложениях ультрасонографического метода, например, в доплеровской миографии [17].

ВЫВОДЫ

Результаты настоящей работы дополняют выводы ранее развитой теории [7-9], в рамках которой исследованы корреляционные функции и спектры мощности отклика для случаев стационарного, колебательного и турбулентного движения рассеивателей. В рамках такого подхода в настоящей работе исследован случай нестационарного равноускоренного движения рассеивателей ультразвука. Поскольку в период начала систолы движение крови в магистральных артериях с высокой точностью можно считать равноускоренным, полученные в работе результаты являются важными для исследования состояния сердечнососудистой системы и, в частности, для выбора оптимальных параметров доплеровских режимов ультразвуковой диагностики потоков крови.

Показано, что при равноускоренном движении рассеивателей ультразвука модальная частота спектрального распределения частот доплеровского сдвига не зависит от продолжительности времени наблюдения и ускорения и определяется только средней скоростью движения рассеивателей за время наблюдения. Наоборот, ширина спектра не зависит от конкретных значений скорости движения и момента начала измерения, являясь функцией продолжительности времени наблюдения и величины ускорения. Полученное аналитическое выражение для оптимальной длительности времени наблюдения фазы ускоренного движения однозначно задается величиной ускорения, длиной волны ультразвуковых пучков волн и доплеровским углом зондирования. Длительности выборки доплеровских сигналов, найденные экспериментально для использования при диагностике потоков крови в крупных артериальных сосудах, находятся в хорошем соответствии со сделанными оценками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ku D.N. Blood Flow in Arteries // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1997. – Vol. 29. – P.399–434.
2. Yared K., Noseworthy P., Weyman A.E., McCabe E., Picard M.H., Baggish A.L. Pulmonary Artery Acceleration Time Provides an Accurate Estimate of Systolic Pulmonary Arterial Pressure during Transthoracic Echocardiography // Journal of the American Society of Echocardiography. – 2011. - Vol. 24. – No.6 – P. 687-692.
3. Scoutt L.M., Grant E.G. Carotid Ultrasound // Ultrasound: Practical Sonography for the Radiologist – 2009 ARRS Categorical Course. – P.99–111.
4. Cardoso J.C.S., Ruano M.G., Fish P.J. Nonstationarity broadening reduction in pulsed Doppler spectrum measurements using time-frequency estimator // IEEE Trans. Biomed. Engineering. – 1996. – P.1176-1186.
5. Bastos C.A.C., Fish P.J., Vaz F. Spectrum of Doppler Ultrasound Signals from Nonstationary Blood Flow // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 1999. –Vol. 46. – No.5. – P. 1201-1216.
6. Fish P.J. Nonstationarity broadening in pulsed doppler spectrum measurements // Ultrasound in Medicine and Biology. – 1991. – Vol. 17. – Issue 2. – P.147-155.
7. Barannik E.A. Optimum resolution of pulsed Doppler systems // Acoustical Physics. – 1997. – Vol. 43. – No.4. – P.387-390.
8. Barannik E.A. Pulsed Doppler flow-line spectrum for focused transducers with apodized apertures // Ultrasonics. – 2001. – Vol.39. – No.2. – P.311-317.
9. Skresanova I.V., Barannik E.A. Correlation functions and power spectra of Doppler response signals in ultrasonic medical applications // Ultrasonics. – 2012. – Vol. 52. – No.5. – P.676-684.
10. Sveshnikov A. G., Tikhonov A. N. Teoriya funktsii kompleksnoi peremennoi, 5-e izd. - M.: Nauka, 1999.
11. Marple S.L. Digital Spectral Analysis: With Applications. – Prentice-Hall Series in Signal Processing, 1987.
12. Fish P.J. Doppler methods // In Hill C.R. Physical principles of medical ultrasonics. – Chichester: Ellis Horwood Limited, 1986. – P.338-376.
13. Levin B.R. Teoreticheskie osnovy statisticheskoi radiotekhniki. Kn. 2. – M.: Sovetskoe radio, 1975. – 392s.
14. Van Tris G. Teoriya obnaruzheniya, otsenok i modulyatsii. T.3. Obrabotka signalov v radio- i gidrolokatsii i priem sluchainykh gaussovykh signalov na fone pomekh. – M.: Sovetskoe radio, 1977. – 663s.
15. Gilson W., Orphanoudakis S. Error bounds for wide-band high resolution Doppler ultrasound blood flow measurement // Proc. 10th Annu. Int. Conf. IEEE Eng. Med. and Biol. Soc. – 1988. – Pt. 1/4. – P. 473-474.
16. Gardin J.M., Burn C.S., Childs W.J., Henry W.L. Evaluation of blood flow velocity in the ascending aorta and main pulmonary artery of normal subjects by Doppler echocardiography // Am. Heart J. – 1984. – Vol. 107(2).
17. Barannik E.A., Kulibaba A.A., Girnyk S.A., Tolstoluzhskiy D.A., Skresanova I.V. Displacement spectra under isometric muscle contraction: spectral Doppler study and theoretical models of ultrasound response and muscle contraction // J. Ultrasound Med. – 2012. – Vol. 31. – P. 1959-1972.