

PACS: 03.65.Xp; 29.27.Bd; 42.65.

QUANTUM ZENO EFFECT, KAPITSA PENDULUM AND WHIRLIGIG PRINCIPLE. COMPARATIVE ANALYSIS

V.A. Buts

National Science Center «Kharkiv Institute of Physics and Technology»

Akademicheskaya str. 1, 61108 Kharkiv;

V.N. Karazin Kharkiv National University

Svobody Sq. 4, 61022, Kharkiv, Ukraine

e-mail: vbuts@mail.ru

Received December 1, 2015

Comparative analysis of three stabilization mechanisms of unstable states of physical systems is presented in this review. These mechanisms are: the quantum Zeno effect, the stabilization of unstable states in an external fast oscillating field (at the example of Kapitza pendulum), and the algorithm called as the principle of whirligig. The common features of these mechanisms, as well as the differences between them, are defined in the paper. In particular, it is shown that the stabilization of quantum systems is possible without involvement of such a notion as the collapse of the wave function. For stabilization there is enough to have such a stabilizing radiation flow when the Rabi frequency of transitions does exceed some frequency. This particular frequency is a magnitude inversely proportional to the lifetime of the state under stabilization. It is shown that stabilization of unstable states by impact of rapidly oscillating forces occurs by non-self-consistent exposure, i.e. the dynamics of stabilizing field is independent of the dynamics of the stabilized state. Stabilization with the principle of whirligig does occur by self-consistent forces, and thus, in many cases stabilization by the use of the principle of whirligig can be more effective.

KEYWORDS: quantum Zeno effect, stabilization, Kapitza pendulum

КВАНТОВИЙ ЕФЕКТ ЗЕНОНА, МАЯТНИК КАПИЦІ ТА ПРИНЦИП ДЗИГИ. ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ

В.О. Буц

Національний Науковий Центр «Харківський фізико-технічний інститут»

вул. Академічна 1, м. Харків, 61108

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

61022, м. Харків, пл. Свободи 4, Україна

Дано порівняльний аналіз трьох механізмів стабілізації нестійких станів фізичних систем. Цими механізмами є: квантовий ефект Зенона, стабілізація нестійких станів у зовнішньому швидкоосцилюючому полі (на прикладі маятника Капіці), а також алгоритм, який був названий принципом дзиги. Визначено загальні риси цих механізмів, а також відмінності між ними. Зокрема, показано, що стабілізація квантових систем можлива без залучення такого поняття як колапс хвильової функції. Для стабілізації достатньо, щоб потік стабілізуючого випромінювання був таким, щоб частота Рабі переходів в цьому полі, була по можливості більшою, ніж деяка частота. Цією частотою є величина, яка обернено пропорційна часу життя стану, що стабілізується. Показано, що стабілізація нестійких станів шляхом впливу на неї швидко осцилюючих сил відбувається несамоузгодженим впливом, тобто динаміка стабілізуючого поля не залежить від динаміки стану, що стабілізується. Стабілізація при використанні принципу дзиги відбувається самоузгодженими силами. В результаті, в багатьох випадках, стабілізація з використанням принципу дзиги може бути ефективнішою.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: квантовий ефект Зенона, стабілізація, маятник Капіці

КВАНТОВИЙ ЭФФЕКТ ЗЕНОНА, МАЯТНИК КАПИЦЫ И ПРИНЦИП ЮЛЫ. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

В.А. Буц

ННЦ «Харьковский физико-технический институт НАН Украины»

61108, Харьков, Академическая, 1; Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

61022, Украина, г. Харьков, пл. Свободы 4, Украина

Дан сравнительный анализ трех механизмов стабилизации неустойчивых состояний физических систем. Этими механизмами являются: квантовый эффект Зенона, стабилизация неустойчивых состояний во внешнем быстроосциллирующем поле (на примере маятника Капицы), а также алгоритм, который был назван принципом юлы. Определены общие черты этих механизмов, а также различия между ними. В частности, показано, что стабилизация квантовых систем возможна без привлечения такого понятия как коллапс волновой функции. Для стабилизации достаточно, чтобы поток стабилизирующего излучения был таким, чтобы частота Раби переходов в этом поле, была по возможности большей, чем некоторая частота. Этой частотой является величина, которая обратно пропорциональна времени жизни стабилизируемого состояния. Показано, что стабилизация неустойчивых состояний путем воздействия на нее быстроосциллирующей силы происходит несогласованным воздействием, т.е. динамика стабилизирующего поля не зависит от динамики стабилизируемого состояния. Стабилизация при использовании принципа юлы происходит самосогласованными силами. В результате, во многих случаях, стабилизация с использованием принципа юлы может быть эффективнее.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: квантовый эффект Зенона, стабилизация, маятник Капицы

Квантовый эффект Зенона и механизм стабилизации маятника с перевернутым подвесом (маятник Капицы) – два известных механизма, позволяющих, при создании условий их реализации, сделать устойчивыми первоначально неустойчивые стационарные состояния многих физических систем. Общей характерной чертой этих механизмов является необходимость в быстром, периодическом воздействии на неустойчивую систему. Для квантового эффекта Зенона это воздействие заключается в частом наблюдении за неустойчивой квантовой системой. Неустойчивость вертикального положения математического маятника может быть подавлена быстрым изменением положения подвеса маятника. Это хорошо известные примеры стабилизации неустойчивых квантовых и классических систем. Можно сформулировать некоторый другой алгоритм стабилизации неустойчивых состояний. Этот алгоритм заключается в том, что неустойчивая система вовлекается в некоторое *дополнительное быстрое периодическое* движение. При этом можно указать на свойства этого движения, которые необходимы, чтобы система из неустойчивой стала устойчивой. Отметим, что рассматриваемый алгоритм имеет простой и наглядный образ, который отображает наиболее важные характеристики этого алгоритма. Этим образом является детская игрушка – юла. Вертикальное положение юлы без вращения неустойчиво. Причем, время ее падения (время жизни вертикального положения юлы) можно сопоставлять со временем жизни неустойчивого состояния. Если же юлу привести во вращение и период этого вращения будет значительно меньше чем время жизни вертикального положения, то это положение будет устойчивым. По аналогии с этим образом такой алгоритм подавления неустойчивостей был назван принципом (механизмом) юлы. Видно, что все три механизма имеют общую характерную черту – быстрое периодическое изменение характеристик стабилизируемых систем. Имеются, однако, и различия. Анализ этих различий и посвящена данная работа. Ниже, прежде всего, рассматривается квантовый эффект Зенона. Далее, на примере маятника Капицы, приведено сравнение принципа юлы с механизмом стабилизации во внешнем быстроосциллирующем поле. Определено различие этих механизмов. Оно заключается в том, что в принципе юлы стабилизирующее возмущение является самосогласованным с динамикой стабилизируемой системы. Стабилизирующее возмущение в маятнике с перевернутым подвесом является независимым. Показано, что в тех случаях, когда может быть использован принцип юлы, этот механизм оказывается более эффективным, чем механизм стабилизации внешним быстроосциллирующим полем. Краткое описание примеров использования принципа юлы для стабилизации различных физических систем содержится в четвертом разделе. В заключении обсуждаются основные результаты работы.

СТАБИЛИЗАЦИЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ. КВАНТОВЫЙ ЭФФЕКТ ЗЕНОНА

Квантовому эффекту Зенона посвящена обширная литература. Достаточно включить интернет, чтобы найти как описание самого эффекта, так и описание новейших экспериментальных наблюдений этого эффекта. Здесь только отметим, что в основе эффекта Зенона лежат два фундаментальных процесса: 1. Неэкспоненциальный закон распада квантовых возбужденных состояний на малых интервалах времени и 2. Коллапс волновой функции в процессе измерения. Ниже мы обращаем внимание на то, что первая фундаментальная особенность квантовых систем была описана еще в 1947 году В.А. Фоком и Н.С.Крыловым [1]. Второй процесс - процесс измерения (а, соответственно, коллапс волновых функций) не может быть описан в рамках традиционной квантовой механики. Однако для стабилизации неустойчивых состояний, как будет видно ниже, процесс измерения необязателен. Достаточно учесть некоторое внешнее возмущение, которое будет достаточно быстро и периодически переводить систему из одного состояния в другое и обратно. Такой процесс вполне описывается в рамках традиционной квантовой механики. Поэтому ниже процесс измерения (коллапс волновой функции) мы рассматривать не будем. Отметим, что часто процесс внешнего воздействия, который переводит систему в другое состояние, отождествляют с процессом измерения.

В работе [1] авторы получили общее универсальное выражение для зависимости вероятности нахождения квантовых систем в начальных (исходных) состояниях от времени ($L(t)$). Это выражение известно как теорема Крылова – Фока и имеет вид:

$$L(t) = \left| \int w(E) \cdot \exp(-i \cdot E \cdot t / \hbar) \cdot dE \right|^2, \quad (1)$$

где $w(E)$ - дифференциальная функция распределения начального состояния (плотность функции распределения); $w(E) \cdot dE$ - энергетический спектр начального состояния.

Авторы провели достаточно подробный анализ этого выражения. Отметим некоторые из результатов, которые следуют из анализа выражения (1). Прежде всего, под модулем в выражении (1) стоит характеристическая функция. Поэтому она ограничена. Более того, в нашем случае она меньше или равна единице ($L(t) = |p(t)|^2 \leq 1$). Если плотность вероятности является абсолютно интегрированной функцией, то легко видеть, что вероятность на бесконечности стремится к нулю ($\lim_{t \rightarrow \infty} L(t) \rightarrow 0$). Наиболее интересным является особенность поведения функции при малых временах. Функцию $L(t)$, как всякую характеристическую функцию, можно представить в виде ряда по моментам:

$$L(t) = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i \cdot t}{\hbar} \right)^n \cdot \frac{M_n}{n!} \right|^2 . \quad (2)$$

Здесь $M_n \equiv \langle E^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} E^n w(E) dE$.

Ограничиваясь первыми тремя слагаемыми в сумме при малых временах, получим:

$$L(t) = 1 - \left(\frac{t}{\hbar} \right)^2 \langle (\Delta E)^2 \rangle , \quad (3)$$

где $\Delta E \equiv E - E_0$, $M_1 \equiv \langle E \rangle \equiv E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} E w(E) dE$.

Это выражение совпадает с тем выражением, что получено в работе [1].

Использование принципа юлы

Выражение (3) определяет вероятность найти рассматриваемую квантовую систему в исходном возбужденном состоянии по истечении некоторого малого времени Δt . Видно, что закон распада при этом не является экспоненциальным. Если предположить, что в момент времени $\Delta t \ll \Delta E \cdot \hbar$ над системой было проведено наблюдение (система вынуждено переведена в некоторое короткоживущее ($\tau_L < \Delta t$) новое состояние, и вернулась в исходное состояние), то выражение (3) определяет вероятность найти систему в исходном состоянии. Далее, если по истечении времени $2 \cdot \Delta t$ над системой опять провести наблюдение, то вероятность нахождения ее в исходном состоянии будет определяться той же формулой. Процессы распада на каждом из интервалов Δt независимы. Поэтому полная вероятность найти систему в исходном состоянии будет определяться произведением этих двух вероятностей. Продолжая эти рассуждения, можно получить следующее выражение для вероятности найти систему в исходном возбужденном состоянии по истечении времени $T = N \cdot \Delta t$ ($N \gg 1$):

$$L_N = \prod_{i=1}^N w_i \sim \exp(\Delta t / 2T_L), \quad \lim_{\Delta t/T_L \rightarrow 0} L_N(t) \rightarrow 1, \quad (4)$$

где $w_i = \left[1 - (\Delta t_i / T_L)^2 \right]$; $T_L = \hbar / \sqrt{\langle (\Delta E)^2 \rangle}$.

Этот результат соответствует квантовому эффекту Зенона. Таким образом, в работе [1] строго был получен один из двух ключевых результатов, которые лежат в основе квантового эффекта Зенона. Что касается второго результата - необходимости проведения наблюдения над квантовой системой (коллапса волновой функции), то эта процедура может быть заменена процедурой, которая не требует выхода за рамки традиционной квантовой механики. Действительно, если необходимо сохранить возбужденное состояние, не дать системе распасться, то одной из возможностей добиться этого результата (аналог процесса наблюдения над системой) является создание условий, когда функция w будет претерпевать некоторые изменения во времени ($w = w(E, t)$). В качестве примера можно представить, что под действием внешнего возмущения эта функция периодически меняется. В простейшем случае она может выглядеть следующим образом:

$$w(E, t) = \begin{cases} w_1(E), & t \in 2n \cdot \Delta t \\ w_2(E), & t \in (2n + 1) \cdot \Delta t \end{cases} . \quad (5)$$

Будем считать, что на каждом временном интервале каждая из функций $w_i(E)$ абсолютно интегрируемые функции, а величины самих интервалов малы. Тогда вероятность найти систему в исходном состоянии на каждом из этих интервалов будет определяться формулой (3). Очевидно, что эти вероятности независимы и, как результат, конечная вероятность будет описываться формулой (4). Таким образом, мы получим результат полностью аналогичный результату квантового эффекта Зенона.

Полезно сравнить полученные результаты с теми, которые получаются при современном изложении квантового эффекта Зенона (смотри, например, [2]). Обозначим начальное состояние квантовой системы как $|\psi_0\rangle = |\psi(t=0)\rangle$, а ее состояние в момент времени t - $|\psi(t)\rangle$. Используя оператор эволюции, выражение для $|\psi(t)\rangle$ можно переписать в виде $|\psi(t)\rangle = \exp(-i\hat{H}t / \hbar) |\psi_0\rangle$. Тогда амплитуда вероятности найти систему в ее начальном состоянии будет выражаться в виде скалярного произведения этих состояний: $A(t) = \langle \psi_0 | \psi(t) \rangle$. С учетом выражения для $|\psi(t)\rangle$ эту амплитуду можно переписать в виде:

$$A(t) = \langle \psi_0 | \exp(-i\hat{H}t / \hbar) | \psi_0 \rangle .$$

Соответствующая вероятность обнаружить исследуемую систему в исходном состоянии будет иметь вид:

$$L(t) = |A(t)|^2 = \left| \langle \psi_0 | \exp(-i\hat{H}t / \hbar) | \psi_0 \rangle \right|^2 . \quad (1a)$$

Выражение (1a) эквивалентно выражению (1).

На малых интервалах времени ($Ht / \hbar \ll 1$) экспоненту удобно разложить в ряд Тейлора:

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-i\hat{H}t / \hbar) |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle - i\hat{H}t / \hbar \cdot |\psi_0\rangle - (\hat{H}t / \hbar)^2 \cdot |\psi_0\rangle / 2 + \dots$$

Оставим в этом ряду только первые три члена. Кроме того учтем, что $\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = 1$. Тогда для амплитуды вероятности и для самой вероятности можно написать такие выражения:

$$A(t) = 1 - i \frac{t}{\hbar} \langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle - \frac{t^2}{2\hbar^2} \langle \psi_0 | \hat{H}^2 | \psi_0 \rangle$$

$$L(t) = |A(t)|^2 = \left\{ 1 - \left(\frac{t}{T_z} \right)^2 \right\} . \tag{3a}$$

Здесь $T_z = \hbar / \Delta$ - величина, которая получила название «время Зенона», $\Delta = \left[\langle \psi_0 | \hat{H}^2 | \psi_0 \rangle - \langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle^2 \right]^{1/2}$.

Формулы (1), (1a), (3) и (3a) эквивалентны. Несмотря на их эквивалентность легко увидеть, что формулы (1) и (3) содержат более прозрачные физические параметры, чем формулы (1a) и (3a). Эти параметры, конечно, есть и в формулах (1a) и (3a) однако, чтобы это увидеть - нужен достаточный опыт в соответствующих вычислениях.

Полученные выше общие результаты указывают на существование общих закономерностей процесса распада. Однако они относятся к переходам, которые вызваны нулевыми колебаниями (спонтанные переходы). Для управления этими процессами важно знать особенности процесса распада, которые индуцированы внешним возмущением. Ниже рассмотрены особенности индуцированных переходов. Внимание будет обращено на те особенности таких переходов, которые позволяют использовать их для управления процессами распада. Прежде всего, рассмотрим двухуровневую систему. Нулевой уровень соответствует стационарному, невозбужденному состоянию. Первый уровень соответствует возбужденному состоянию. Пусть, теперь под действием резонансного возмущения рассматриваемая квантовая система переходит с нулевого уровня на первый и обратно. Как известно, в рамках теории возмущений такой процесс описывается следующей простой системой дифференциальных уравнений:

$$i \cdot \hbar \cdot \dot{A}_0 = V_{01} A_1; \quad i \cdot \hbar \cdot \dot{A}_1 = V_{10} A_0, \tag{6}$$

где A_i - комплексные амплитуды волновых функций.

Матричные элементы взаимодействия V_{01} и V_{10} , в общем случае, зависят как от структуры рассматриваемой квантовой системы, так и от характеристик возмущения. В простейших случаях их можно считать равными, постоянными и действительными. Пусть, в начальный момент времени квантовая система находится в возбужденном состоянии. Тогда решениями уравнений (6) будут функции:

$$A_1 = \cos(\Omega \cdot t), \quad A_0 = \sin(\Omega \cdot t), \tag{7}$$

где $\Omega = V / \hbar$ - частота Раби.

Удобно для дальнейшего весь интервал времени $T = 2\pi / \Omega$ разбить на небольшие временные интервалы $\Delta t = T / n$. Пусть, в момент времени Δt каким-то образом можно оценить положение изучаемой системы. Вероятность того факта, что она за время Δt не перейдет из возбужденного состояния в основное будет равна:

$$w(\Delta t) = 1 - (\Omega \cdot \Delta t)^2 . \tag{8}$$

Это выражение практически совпадает с выражением (3). По истечении следующего интервала времени Δt можно снова провести анализ системы. Вероятность обнаружения ее в первоначально возбужденном состоянии будет определяться формулой:

$$w(2 \cdot \Delta t) = \left(1 - (\Omega \cdot \Delta t)^2 \right)^2 . \tag{9}$$

Такая формула отражает факт независимости квантовых переходов в каждом из временных интервалов Δt . В конечном счете, после большого числа измерений вероятность нахождения системы в возбужденном состоянии выразится формулой:

$$w(n \cdot \Delta t) = \left(1 - (\Omega \cdot \Delta t)^2 \right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w(n \cdot \Delta t) = 1 . \tag{10}$$

Таким образом, процесс наблюдения за возбужденной системой не дает этой системе перейти из исходного возбужденного состояния в какое-либо другое состояние. Этот факт, также как и выражение (4), составляет содержание квантового эффекта Зенона. В данном случае для индуцированных процессов.

Следует заметить, что при наличии внешнего возмущения основное состояние (состояние системы на нулевом уровне) также является неустойчивым (возбужденным). Легко показать, что это состояние также может быть сохранено путем наблюдения над системой.

Выше не обсуждался сам стабилизирующий процесс. Рассмотрим его. Процесс измерения обсуждать не будем, а введем в рассмотрение кроме дестабилизирующего возмущения добавочное возмущение. Ниже покажем, что при определенных характеристиках этого добавочного возмущения (его можно назвать стабилизирующим возмущением) оно может играть роль процесса измерения. Для определения характеристик этого стабилизирующего возмущения рассмотрим многоуровневую квантовую систему, которая описывается гамильтонианом:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t) . \tag{11}$$

Второе слагаемое в правой части описывает возмущение. Волновая функция системы (11) подчиняется уравнению Шредингера, решение которого будем искать в виде ряда по собственным функциям невозмущенной задачи:

$$\psi(t) = \sum_n A_n(t) \cdot \varphi_n \cdot \exp(i\omega_n t) , \tag{12}$$

где $\omega_n = E_n / \hbar$; $i\hbar \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = \hat{H}_0 \varphi_n = E_n \cdot \varphi_n$.

Подставим (12) в уравнение Шредингера и обычным образом получим систему связанных уравнений для нахождения комплексных амплитуд A_n :

$$i\hbar \cdot \dot{A}_n = \sum_m U_{nm}(t) \cdot A_m , \tag{13}$$

где $U_{nm} = \int \varphi_m^* \cdot \hat{H}_1(t) \cdot \varphi_n \cdot \exp[i \cdot t \cdot (E_n - E_m) / \hbar] \cdot dq$.

Рассмотрим наиболее простой случай бигармонического возмущения $\hat{H}_1(t) = \hat{U}_0 \cdot \exp(i\omega_0 t) + \hat{U}_1 \cdot \exp(i\omega_1 t)$. Тогда матричные элементы взаимодействия приобретут следующее выражение:

$$U_{nm} = V_{nm} \exp\{i \cdot t \cdot [(E_n - E_m) / \hbar + \Omega]\} , V_{nm}^{(k)} = \int \varphi_n^* \cdot \hat{U}_k \cdot \varphi_m dq , \Omega = \{\omega_0, \omega_1\} . \tag{14}$$

Рассмотрим динамику трехуровневой системы ($|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$) . Будем считать, что частота внешнего возмущения и собственные значения энергий этих уровней удовлетворяют соотношениям:

$$m = 1, n = 0, \quad \hbar\omega_0 = E_1 - E_0 ; \quad m = 2, n = 0 \quad \hbar(\omega_0 + \omega_1) = E_2 - E_0, \quad \hbar\omega_1 = E_2 - E_1 . \tag{15}$$

Соотношения (15) указывают на тот факт, что частота ω_0 внешнего возмущения является резонансной для переходов между нулевым и первым уровнями, а частота ω_1 является резонансной для переходов между первым и вторым уровнями. Используя эти соотношения в системе (13), можно ограничиться тремя уравнениями:

$$i\dot{A}_0 = A_1 , \quad i\dot{A}_1 = A_0 + \mu A_2 , \quad i\dot{A}_2 = \mu A_1 . \tag{16}$$

Систему уравнений (16) представим в несколько другом виде:

$$\ddot{A}_1 + \Omega^2 A_1 = 0 , \quad i\dot{A}_0 = A_1 , \quad i\dot{A}_2 = \mu A_1 , \tag{16a}$$

где $\Omega^2 = (1 + \mu^2)$

Схема энергетических уровней при этом представлена на рисунке 1.

В (16) для простоты и удобства положили $V_{12} = V_{21}$; $V_{10} = V_{01}$; $\dot{A}_i = dA_i / d\tau$, $\tau = V_{10} \cdot t / \hbar$. Кроме того, введен параметр $\mu \equiv V_{12} / V_{10}$.

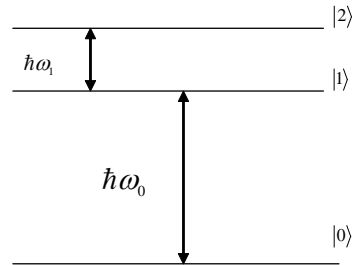


Рис.1. Схема энергетических уровней

Пусть, в начальный момент времени ($t = 0$) рассматриваемая квантовая система находится на первом, возбужденном уровне. Тогда, как легко видеть, решениями системы (16) будут функции:

$$A_0 = \frac{1}{i \cdot \Omega} \sin(\Omega \cdot t) , \quad A_1 = \cos(\Omega \cdot t) , \quad A_2 = -i \sin(\Omega \cdot t) . \tag{17}$$

Из решения (17) следует, что чем больше будет параметр μ , тем меньше будет вероятность, что система из возбужденного состояния перейдет в невозбужденное, стационарное состояние. Следует несколько слов сказать о параметре μ . Физически этот параметр определяет отношение числа квантов низкочастотного возмуще-

ния, которое ответственно за переходы между первым и вторым уровнями к числу квантов высокочастотного возмущения, которое определяет переходы между первым и нулевым уровнями. Чем больше будет это отношение, тем меньше будет вероятность того, что возбужденная система перейдет в невозбужденное состояние.

Обратим внимание, что система уравнений (16) третьего порядка, а система (16a) – четвертого. В результате, если мы будем решать задачу с начальными условиями $|A_0(0)|^2 = 1, |A_1(0)| = |A_2(0)| = 0$, т.е. в начальный момент времени система находится в основном невозбужденном уровне, а быструю динамику совершают те уровни, на которые система из исходного уровня должна перейти под влиянием внешнего ВЧ-возмущения. В этом случае запишем решение системы (16) в виде:

$$A_1 = a \cdot \exp(i \cdot \Omega \cdot t) + b \cdot \exp(-i \cdot \Omega \cdot t) .$$

Учтем начальные условия для A_1 ($A_1(0) = 0$). Тогда решениями системы уравнений (16) будут функции:

$$A_1 = a \cdot [\exp(i \cdot \Omega \cdot t) - \exp(-i \cdot \Omega \cdot t)], \quad A_0 = -\frac{a}{\Omega} \cdot [\exp(i \cdot \Omega \cdot t) + \exp(-i \cdot \Omega \cdot t)] + C_0 ,$$

$$A_2 = -\frac{a \cdot \mu}{\Omega} \cdot [\exp(i \cdot \Omega \cdot t) + \exp(-i \cdot \Omega \cdot t)] + C_2 .$$

У нас оказалось три константы a, C_0, C_2 и только два не использованных начальных условия. Такое положение возникло из-за того, что второе уравнение первого порядка в системе (16) заменили первым уравнением системы (16a), которое является уравнением второго порядка. Поэтому кроме начальных условий необходимо, чтобы полученные решения удовлетворяли еще и второму уравнению системы (16). Из начальных условий получим:

$$C_0 = 1 + a / \Omega \quad C_2 = (a \cdot \mu) / \Omega .$$

Потребуем, чтобы полученные решения удовлетворяли уравнению $i\dot{A}_1 = A_0 + \mu A_2$.

Отсюда находим следующую связь между постоянными C_0 и C_2 : $C_0 + \mu \cdot C_2 = 0$ или $1 + a / \Omega + (a \cdot \mu) / \Omega$.

В результате, находим значение постоянной a : $a = -1 / \Omega$.

Окончательно выражения для амплитуд волновых функций приобретают вид:

$$A_1 = -(2i / \Omega) \sin(\Omega t), \quad A_0 = 1 - \frac{1}{\Omega^2} [1 - \cos(\Omega t)], \quad A_2 = \frac{2\mu}{\Omega^2} [1 - \cos(\Omega t)] . \quad (17a)$$

Из вида решений (17a) следует важный и несколько неожиданный результат. Он заключается в том, что если параметр μ будет большим, то несмотря на тот факт, что внешнее стабилизирующее воздействие не оказывает влияния на основное состояние системы, однако это состояние оказывается устойчивым. Таким образом, оказывается возможным стабилизировать неустойчивые состояния квантовых систем не только, действуя на те состояния, в которых находится квантовая система, а, действуя только на те состояния (делая их динамически), в которые система должна перейти.

СРАВНЕНИЕ МЕХАНИЗМА СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМ В БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩЕМ ПОЛЕ С ПРИНЦИПОМ ЮЛЫ

Общие соображения

Выскажем вначале кратко некоторые общие соображения, которые позволяют понять механизм стабилизации, который мы называем механизмом стабилизации юлы. В подавляющем большинстве случаев неустойчивые состояния динамических систем локально характеризуются особыми точками типа "седло". Неустойчивые узлы и фокусы встречаются значительно реже. Поясним на примере неустойчивой точки типа "седло", как такая особая точка может быть трансформирована в эллиптическую точку (в точку типа "центр"). Фазовые портреты окрестности седловой точки представлены на рисунках 2-3. Уравнения на фазовой плоскости, которые описывают динамику фазовых траекторий в окрестности седловой точки, имеют вид:

$$\dot{x}_0 = \gamma \cdot x_1 \quad \dot{x}_1 = \gamma x_0 . \quad (18)$$

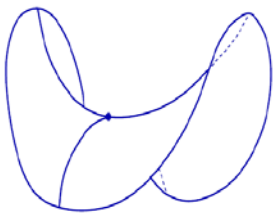


Рис.2. Фазовый портрет в окрестности особой точки типа "седло"

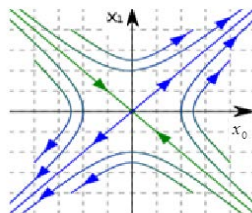


Рис.3. Фазовый портрет в окрестности особой точки типа "седло"

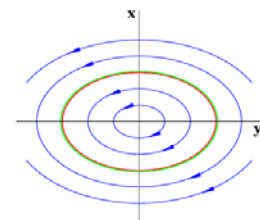


Рис.4. Фазовый портрет в окрестности особой точки типа "центр"

В большинстве реальных случаев каждая из зависимых переменных уравнений (18) представляет собой какую-то характеристику собственной степени свободы изучаемой динамической системы. Например, это могут быть комплексные амплитуды нелинейно-взаимодействующих волн. Поэтому в этой работе будем считать, что каждое такое уравнение первого порядка описывает одну из степеней свободы изучаемых систем. Пусть, теперь перед нами стоит задача, чтобы окрестность седловой особой точки преобразовать в окрестность, которая соответствует устойчивой особой точке, например, эллиптической точке (рис. 4). Для этого можно поступить таким образом. Введем в нашу изучаемую систему дополнительную степень свободы, которая связана с одной из степеней свободы изучаемой неустойчивой системы. Простейшая модель, которая будет описывать динамику системы в окрестности седловой точки при такой модификации системы, будет отличаться от уравнения (18) только добавлением еще одного уравнения:

$$\dot{x}_0 = \gamma \cdot x_1 + \delta \cdot x_2; \quad \dot{x}_1 = \gamma x_0; \quad \dot{x}_2 = -\delta \cdot x_0. \quad (19)$$

Здесь в отличие от (18) мы ввели дополнительную степень свободы. Причем, эта новая степень свободы связана с одной из степеней свободы исходной системы коэффициентом δ .

Система уравнения (19) эквивалентна уравнению линейного маятника:

$$\ddot{x}_0 + (\delta^2 - \gamma^2) x_0 = 0. \quad (20)$$

Из уравнения (20) сразу видно, что как только коэффициент, описывающий связь между степенями свободы, будет большим, чем инкремент неустойчивости ($\delta > \gamma$), неустойчивая седловая точка превратится в эллиптическую точку. Фазовое пространство, представленное на рис. 3, станет фазовым пространством, представленным на рис. 4.

Этот простой алгоритм перевода неустойчивой седловой точки в эллиптическую точку хорошо характеризует принцип юлы. Действительно, если мы не вводили дополнительную степень свободы, то наша система была неустойчивой (юла падает). Причем, время развития неустойчивости ($T \sim 1/\gamma$) можно отождествить со временем падения юлы. Включение дополнительной степени свободы, которая стабилизирует нашу систему, аналогично наличию вращения юлы. Более того, в образе юлы имеются не только качественные аналогии, но и количественные. Действительно, чтобы вертикальное положение юлы было устойчивым, необходимо, чтобы период вращения был меньше времени падения. В наших моделях (см. уравнение (20)), чтобы система стала устойчивой нам также необходимо, чтобы коэффициент связи был больше инкремента неустойчивости $\delta > \gamma$. Более того, если инкремент неустойчивости равен нулю, то система уравнений (19) или (20) описывает просто колебания с частотой $\delta = 2\pi / T_{rot}$. Таким образом, имеется качественная и количественная аналогия рассматриваемого механизма стабилизации с механизмом стабилизации вертикального положения юлы.

Сделаем следующее замечание. Мы привыкли к тому, что увеличение числа степеней свободы изучаемой динамической системы приводит к более жестким условиям для реализации ее устойчивого состояния. Действительно, пусть наша физическая система описывается следующей системой уравнений:

$$\dot{Z}_n = F_n(\vec{Z}, t). \quad (21)$$

Характер устойчивости этой системы в выбранной точке фазового пространства \vec{Z}_0 описывается линейной системой уравнений, которая описывает динамику малых отклонений $\vec{x} = \vec{Z} - \vec{Z}_0$:

$$\dot{\vec{x}} = \hat{A} \vec{x}. \quad (22)$$

Во многих случаях коэффициенты матрицы \hat{A} можно считать постоянными величинами. Тогда для определения характера особой точки, в которой написана система (22), мы должны найти корни характеристического уравнения:

$$\det(\hat{A} - \lambda \cdot \hat{I}) = 0; \quad \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0. \quad (23)$$

Критерий Рауса-Гурвица утверждает, что чем выше порядок рассматриваемых уравнений (22) и (23), тем труднее удовлетворить условиям реализации устойчивой динамики этой системы. В приведенном нами выше примере мы увеличили число степеней свободы. Но добились прямо противоположного результата. Может показаться, что это исключительный случай. Однако это не так. Ниже и более подробно в работах [3-8] было показано, что введение дополнительной степени свободы в значительно более сложных системах таких, например, которые описывают стабилизацию потоков излучения в плазме, введение такой дополнительной степени свободы также могло приводить к стабилизации неустойчивых состояний. Этот результат, похоже, является демонстрацией принципа подчинения динамики системы параметрам порядка [8].

Сравнение принципа юлы с маятником Капицы

Рассмотренные выше квантовый эффект Зенона и принцип юлы, содержат в себе основной элемент, который заключается в том, что происходят быстрые изменения каких-то характеристик стабилизируемых систем. Эта особенность напоминает особенности, которые характерны для динамики частиц в быстроосциллирующем поле. Наиболее простой алгоритм описания движения систем в таких полях был предложен Капицей при ана-

лизе динамики математического маятника, точка подвеса которого быстро осциллирует [10,11]. Этот пример содержит наиболее важные особенности динамики систем в быстроосциллирующем поле.

Воспользуемся этой простой моделью для сравнения механизма стабилизации динамики систем в быстроосциллирующем поле и принципом юлы. Найдем характеристики, которые являются похожими, а также те характеристики, которые отличают эти два механизма стабилизации.

Прежде всего, опишем кратко динамику математического маятника, параметры которого претерпевают быстрые осцилляции. При описании такой динамики будем пользоваться алгоритмом, который описан в книге Ландау [12]. Уравнение, которое описывает такой математический маятник, имеет вид:

$$\ddot{x} + (\Omega^2 + \varepsilon \cos(\omega \cdot t)) \sin x = 0 . \tag{24}$$

В уравнении (24) Ω - собственная частота малых колебаний маятника; ω - частота быстрых осцилляций параметров маятника. В частности, эта частота может быть частотой изменения положения точки подвеса математического маятника. Предполагается, что эта частота значительно больше собственной частоты маятника ($\omega \gg \Omega = 2\pi / T$). Для дальнейшего, удобно перейти к новой независимой переменной $\tau = \Omega t$. Тогда уравнение (24) можно переписать:

$$\ddot{x} + (1 + q \cos(\omega_N \cdot \tau)) \sin x = 0 , \tag{25}$$

где - $q = \varepsilon / \Omega^2$, $\omega_N = \omega / \Omega \gg 1$.

Следуя [12], уравнение (25) запишем в виде:

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} + f(x, t) , \tag{26}$$

где $\frac{dU}{dx} = \sin x$ $f(x, t) = -q \cdot \cos \omega_N \tau \cdot \sin x$.

Далее представим зависимую переменную в виде суммы медленноменяющейся ($X(t)$) и быстроменяющейся ($\xi(t)$) величин: $x(t) = X(t) + \xi(t)$. Подставим это выражение в уравнение (26). Будем считать, что быстроменяющаяся величина мала по сравнению с медленноменяющейся величиной. Разложим функции, входящие в правую часть уравнения (26) в ряд Тейлора в окрестности функции $X(t)$. Ограничиваясь первыми не исчезающими членами этого разложения, уравнение (26) можно переписать в виде:

$$\ddot{X}(t) + \ddot{\xi}(t) = -[\Omega^2 \sin X + \varepsilon \xi \cos X \cdot \cos \omega t] - \varepsilon \sin X \cdot \cos \omega t - \Omega^2 \cos X \cdot \xi . \tag{27}$$

Применим к левой и правой частям уравнения (27) процедуру усреднения по быстроменяющейся величине, т.е. проинтегрируем эти части по периоду $\tau = 2\pi / \omega$: $\langle Z \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau Z \cdot dt$.

Учитывая, что медленноменяющиеся величины "не замечают" такого усреднения, найдем следующее выражение для быстроменяющейся величины:

$$\xi = -(q / \omega_N^2) \sin X \cdot \cos \omega_N \tau \tag{28}$$

и уравнение, которое описывает медленную динамику маятника.

$$\ddot{X} = -\frac{dU_{eff}}{dX} , \tag{29}$$

где - $U_{eff} = -\cos X + \alpha \sin^2 X$, $\alpha = q^2 / 4\omega_N^2$.

Устойчивое положение математического маятника будет соответствовать минимуму эффективного потенциала, т.е. определяется равенством нулю производной от потенциала: $\partial U / \partial x = \sin x \cdot [1 + 2\alpha \cdot \cos x] = 0$. Видно, что нижнее положение маятника ($x = 0$) всегда устойчиво. Устойчивыми будут также и все те положения маятника, для которых $[1 + 2\alpha \cdot \cos x] = 0$. В частности, верхнее (вертикальное) положение маятника ($x = \pi$) будет устойчивым при выполнении условия $q^2 > 2\omega_N^2 \gg 1$. На рис. 6-7 представлен вид потенциала $U(x) = -\cos(x) + \alpha \cdot \sin^2(x)$ при значениях $\alpha = 0,5$ (рис.6) и при $\alpha = 1,2$ (рис. 7).

Из этих рисунков видно, что при малых значениях параметра α эффективный потенциал содержит только одну точку минимума ($x = 0$), которая соответствует нижнему положению маятника. Все остальные положения маятника неустойчивы. Однако, начиная с величины $\alpha > 1$, в точке $x = \pi$ появляется локальный минимум. Глубина этого локального минимума растет с увеличением параметра α . Растут при этом и степень устойчивости и область устойчивых значений угловой переменной x .

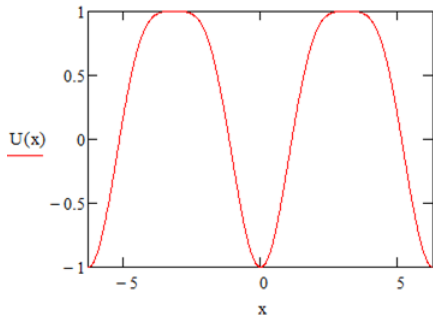


Рис. 6. Эффективный потенциал при $\alpha = 0,5$

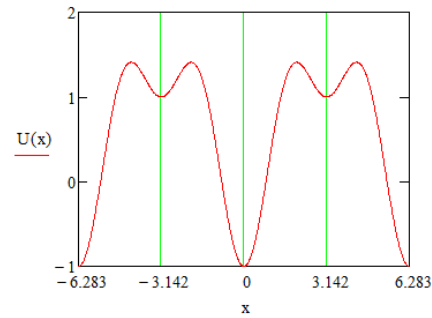


Рис. 7. Вид эффективного потенциала при $\alpha = 1,2$

Для сравнения динамики маятника Капицы с динамикой системы, которая стабилизируется с использованием принципа юлы удобно непосредственно рассмотреть динамику математического маятника в окрестности неустойчивой точки $x = \pi$. Динамику маятника в окрестности этой точки можно описать системой уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 - \Omega^2 x_0 &= \varepsilon \cos(\omega \cdot t) x_0 = x_1 \cdot x_0 \\ \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= 0, \quad x_1(0) = \varepsilon; \quad \dot{x}_1(0) = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь $x_0 = x - \pi$.

Второе уравнение – уравнение для x_1 - описывает динамику внешней стабилизирующей силы. Обратим внимание на то, что динамика этой силы не зависит от динамики стабилизируемой системы (от x_0). Таким образом, в данном случае внешнее воздействие является не самосогласованным с динамикой маятника. Эта особенность характерна для стабилизации и других систем при использовании (для стабилизации) внешних быстроосциллирующих сил. Во многих случаях эта особенность является полезной.

Перепишем уравнение (30) в тех же переменных, что и уравнение (25):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 - x_0 &= q \cdot \cos(\omega_N \cdot \tau) x_0 = x_0 x_1 \equiv f(x_0, \tau) \\ \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= 0, \quad x_1(0) = q; \quad \dot{x}_1(0) = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Систему уравнений (31) будем рассматривать как систему, которая описывает движение в постоянном (во времени) потенциале ($U(x) = -x^2 / 2$) и под влиянием внешней быстроосциллирующей силы, которая меняет параметры маятника ($q \cos(\omega \cdot t) x_0 \equiv f(x_0, t)$). Тогда для анализа такого движения можно использовать описанный выше алгоритм исследования. В результате для описания медленной динамики маятника получим уравнение, которое по форме совпадает с уравнением (29):

$$\ddot{X} = -\frac{dU_{eff}}{dX} \tag{32}$$

Здесь $U_{eff}(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2\omega_N^2} \langle f^2 \rangle = -\frac{x^2}{2} \left[1 - \frac{q^2}{2\omega_N^2} \right]$.

Устойчивое состояние соответствует минимуму этого потенциала:

$$q^2 > 2\omega_N^2 \gg 1 \tag{33}$$

Естественно, что условие (33) совпадает с полученным выше условием устойчивости вертикального положения маятника. В качестве конкретного примера рассмотрим маятник, длина которого равна l , и который колеблется в поле тяжести g , а точка подвеса которого меняется с частотой $\omega \gg \Omega = \sqrt{l/g}$. Если при этом максимальное отклонение точки подвеса равно a , то условием устойчивости вертикального положения маятника будет:

$$\omega > \sqrt{2} \cdot \Omega \cdot \frac{l}{a}; \quad \Omega = \sqrt{l/g} \tag{34}$$

По определению (по постановке задачи) это большая величина. Если смотреть только на левую часть уравнения (31), то это уравнение описывает неустойчивую стационарную точку типа "седло". Наличие быстроосциллирующей параметрической силы (правая часть уравнения (31)), как мы видели, при условии (33) приводит к преобразованию седловой точки к устойчивой точке типа "центр". Такой сценарий стабилизации вертикального положения математического маятника удобен для сравнения его со сценарием стабилизации при использовании принципа юлы. Действительно, рассмотрим неустойчивую седловую точку, которая соответствует уравнению (31) в отсутствие правой стабилизирующей силы:

$$\dot{x}_0 = \Omega \cdot x_1 \quad \dot{x}_1 = \Omega \cdot x_0 \quad . \quad (35)$$

Предположим теперь, что переменная x_0 связана линейной связью с некоторой другой переменной x_2 . Система уравнений, которая описывает такую модифицированную систему, может иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \Omega \cdot x_1 + \delta \cdot x_2 \\ \dot{x}_1 &= \Omega \cdot x_0, \quad \dot{x}_2 = -\delta \cdot x_0 \quad . \end{aligned} \quad (36)$$

Система уравнений (36) эквивалентна уравнению линейного маятника:

$$\ddot{x}_0 + (\delta^2 - \Omega^2)x_0 = 0 \quad . \quad (37)$$

Из этого уравнения следует, что как только выполняется условие $\delta > \Omega$, то неустойчивая седловая точка становится устойчивой точкой типа "центр". Сравнивая это условие стабилизации с условием стабилизации вертикального положения маятника (33), видим, что использование принципа юлы для преобразования неустойчивой седловой точки в устойчивую точку значительно более эффективно. Следует, конечно, иметь в виду, что если речь идет об обычном математическом маятнике, который колеблется в гравитационном поле, то использование принципа юлы для стабилизации вертикального положения такого маятника физически выглядит не слишком удобным. Однако модель математического маятника является одной из наиболее распространенной, наиболее удобной моделью, к которой сводится описание динамики большого числа разнообразных физических систем. Поэтому во всех тех случаях, когда принцип юлы может быть использован - он оказывается эффективнее простого параметрического воздействия на параметры неустойчивой системы. Отметим еще одно различие в механизме стабилизации маятника Капицы и при использовании принципа юлы. Это различие легко увидеть, если сравнить систему уравнений (31) и (36). В первом случае мы видим, что внешнее стабилизирующее возмущение является независимым параметром. Колебания самого стабилизируемого маятника не влияют на динамику этой внешней силы. В отличие от этого стабилизирующее воздействие в системе (36) является самосогласованным. Колебания стабилизируемой системы существенно влияют на динамику самой стабилизируемой силы.

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРИНЦИПА ЮЛЫ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМ

В этом разделе кратко опишем некоторые примеры использования принципа юлы. Более полное изложение описанных примеров можно найти в работах [3-8].

Подавление СИ

В работах [3,7] (смотри также [5,8]) было показано, что принцип юлы может быть использован для подавления синхротронного излучения (СИ), т.е. для стабилизации высоких уровней Ландау. Ниже мы опишем условия необходимые для подавления СИ. Особый интерес при этом представляет сравнение классического эффекта подавления с квантовым эффектом подавления.

Классическая оценка условий подавления СИ. Прежде всего, рассмотрим, как может быть подавлено СИ в рамках классической электродинамики. При этом будем считать, что если под действием внешней электромагнитной волны электрон будет выходить за пределы угла излучения СИ, то его излучение будет подавлено. Для оценки необходимой напряженности поля воспользуемся тем фактом, что длину формирования СИ можно оценить величиной $l \approx \lambda \gamma^2$ [13]. Здесь λ - длина излученной волны, γ - энергия частицы. Соответствующий угол излучения будет равен $\theta \approx 1/\gamma$. Время, за которое частица пройдет путь равный длине формирования, будет равно $\tau \approx l/c = \lambda \gamma^2 / c$. Для того, чтобы поле внешней стабилизирующей волны "выбивало" частицу из угла излучения, необходимо, чтобы частота этой волны была больше величины $\Omega > 2\pi / \tau = 2\pi c / \lambda \gamma^2$. С другой стороны угол, под которым движется частица, можно оценить величиной $\theta \approx r_{\perp} / r_{\parallel} = r_{\perp} / l \ll 1$. Поперечное отклонение частицы в поле внешней электромагнитной волны оценим величиной $r_{\perp} \approx \frac{eE}{m_{\perp}\Omega^2}$. Чтобы было подавление процесса излучения необходимо, чтобы частица вышла (под действием возмущения) за пределы конуса излучения: $r_{\perp} / l > 1/\gamma$. Из этого условия можно определить необходимую напряженность поля: $(eE / m_0 c \Omega) > 2\pi$.

Квантовая оценка условий подавления СИ. Оценим теперь, необходимую для стабилизации, напряженность электрического поля внешней электромагнитной волны, если будем учитывать квантовый эффект Зенона. В соответствии с принципом юлы первым шагом для определения условий подавления является определение времени жизни возбужденного состояния. Это время для СИ в синхротроне в отсутствии возмущения можно оценить формулой $T_L = \frac{\hbar \cdot R}{r_0 \cdot mc^2 \cdot \gamma}$ [14]. Здесь r_0 - классический радиус электрона; R - радиус орбиты электрона в синхротроне. Если в качестве примера взять обычные параметры синхротрона: $R = 100m$,

$E = mc^2 \cdot \gamma = 500MeV$, то время жизни окажется порядка 10^{-9} sec. Вторым шагом является нахождение частоты Раби. В уравнение Шредингера (Дирака) входит величина потенциала внешней волны. Этот потенциал оценим величиной $V \approx eE\lambda$. Соответственно, частота Раби будет равной $\Omega_R = V / \hbar = eE\lambda / \hbar$.

Мы видели, что для проявления эффекта подавления необходимо, чтобы эта частота была большей чем $2\pi / T_{LF}$ ($\Omega_R \gg 2\pi / T_{LF}$). Отсюда можно получить следующую оценку на величину напряженности поля, необходимой для подавления СИ:

$$E > \frac{10^{10} \hbar}{e\lambda} 300 \sim \frac{1}{\lambda} 10^{-5} (V/cm). \text{ Из этой оценки видно, что в квантовом случае величина напряженности}$$

поля, необходимая для стабилизации, на много порядков меньше, чем напряженность поля, полученная в рамках классической электродинамики. Этот результат легко объясняется тем фактом, что в квантово-механическом рассмотрении для подавления необходимо только, чтобы частота Раби была выше, чем обратное время жизни электронов в возбужденном состоянии. В рамках классической электродинамики такие процессы просто отсутствуют.

Описанный механизм (принцип юлы) может с успехом быть использован для стабилизации классических систем. Ниже это будет показано на примере подавления плазменно-пучковой неустойчивости и на примере подавления распадной неустойчивости при распространении потоков излучения в нелинейных средах, в частности, в плазме.

Подавление плазменно-пучковой неустойчивости

Пусть, у нас имеется плазменный цилиндр ($0 < r < R_p$). Он помещен в металлический кожух того же радиуса. Плазма помещена в сильное внешнее магнитное поле. Пучок проходит вдоль оси плазменного цилиндра. Радиус пучка совпадает с радиусом плазмы. В металлическом кожухе имеются элементы связи с внешней электродинамической структурой (например, отверстия (щели)). В качестве внешней электродинамической структуры может быть выбрана спираль радиуса R_H . Таким образом, у нас имеется три основных колебательных системы: это плазма (n_p), пучок (n) и внешняя колебательная структура (E_2). Для эффективного взаимодействия колебаний в плазме и колебаний во внешней электродинамической системе их частоты должны совпадать ($\omega_p = |k_{\perp}|c$). Должны совпадать и продольные волновые числа.

Система уравнений, которая описывает динамику такой колебательной системы, может быть представлена в виде системы трех связанных осцилляторов:

$$\begin{aligned} \ddot{n}_p + \omega_p^2 n_p &= -\omega_p^2 n + i\mu \frac{k_z n_{0p} e}{m} E_2 \\ \ddot{n} + \omega_b^2 n - 2ik_z \dot{n} - k_z^2 V^2 n &= -\omega_b^2 n_p + i\mu \frac{k_z n_0 \cdot e}{m} E_2 \\ \ddot{E}_2 - k_{\perp}^2 c^2 E_2 &= \mu_1 \frac{4\pi e}{ik_z} (n_p + n). \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь $\mu_1 = \mu / G$, G - норма поля волны во внешней структуре, $k_{\perp}^2 = (\lambda_n^2 / R_H^2 - k_z^2)$, E_2 - продольная компонента электрического поля волны во внешней электродинамической структуре λ_n - корни функций Бесселя ($J_0(\lambda_n) = 0$), μ - коэффициент связи плазменной волны с собственной волной внешней электродинамической структуры.

Из уравнений (38) можно получить следующее дисперсионное уравнение:

$$\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega^*)^2} \right] - \frac{\mu\mu_1}{(\omega^2 + k_{\perp}^2 c^2)} \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_b^2}{(\omega^*)^2} \right) = 0. \quad (39)$$

Из этого дисперсионного уравнения видно, что в отсутствии связи между полями в плазме и во внешней структуре ($\mu_k = 0$) получается обычное дисперсионное уравнение системы плазма-пучок. Наоборот, если пучок отсутствует ($\omega_b^2 = 0$), то оно переходит в дисперсионное уравнение, которое описывает перекачку энергии между плазменными волнами и волнами внешней структуры. Частота такой перекачки равна $\Omega = \sqrt{\mu\mu_1} / 2$. В соответствии с принципом юлы можно рассчитывать, что когда эта частота окажется больше инкремента пучковой неустойчивости, то такая неустойчивость будет подавлена. Аналитические и численные исследования показали, что как только выполняется неравенство $\sqrt{\mu\mu_1} / 2 > (\omega_b^2 \omega_p / 2)^{1/3}$ плазменно-пучковая неустойчивость не развивается.

Стабилизация потоков излучения в плазме

При распространении волн в плазме развивается неустойчивость (распадная неустойчивость). Она может быть полезной. Однако она может быть и нежелательной, вредной. Особенно в том случае, когда эта неустойчивость переходит в стохастический режим [15-16]. В этом случае с нею следует бороться. Ниже покажем, что такие неустойчивости могут быть подавлены. Для этого достаточно, чтобы одна из участвующих в трехволновом взаимодействии волн участвовала в некотором дополнительном периодическом процессе (стабилизирующем процессе). Простейшая система уравнений, которая описывает такие процессы, может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dA_0}{dt} &= -VA_1A_2 + \frac{\mu}{2i}A_3 & \frac{dA_3}{dt} &= \frac{\mu}{2i}A_0 \\ \frac{dA_1}{dt} &= VA_0A_2^* & \frac{dA_2}{dt} &= VA_1^*A_0. \end{aligned} \tag{40}$$

Эта система уравнений описывает взаимодействие четырех волн. Причем, две из них нулевая и третья в наших обозначениях связаны друг с другом линейной связью. Связь характеризуется коэффициентом связи μ . Если другие волны отсутствуют, то происходит периодическая перекачка энергии из основной волны в стабилизирующую (третью) волну и обратно. Частота такой перекачки равна $\Omega = \mu/2$. Три волны (нулевая, первая и вторая) взаимодействуют через нелинейность. Если коэффициент связи равен нулю ($\mu = 0$), то система (40) описывает обыкновенное трехволновое взаимодействие волн, динамика которого хорошо изучена [17,18]. Инкремент распадной неустойчивости равен $\delta = V|A_0(0)|$. Отметим, что если знак первого члена правой части первого уравнения с минуса поменять на плюс, то такая система будет описывать взрывную неустойчивость, которая также детально изучена.

При включении стабилизирующей волны при выполнении условия $\mu/2V > |A_0(0)|$ во всех случаях наблюдался процесс стабилизации распадной и взрывной неустойчивостей.

Подавление локальной неустойчивости

Ниже будет видно, что принцип юлы может быть полезным для решения проблемы подавления режимов с динамическим хаосом. Причиной возникновения режимов с динамическим хаосом является локальная неустойчивость. При этом в фазовом пространстве имеется большое число седловых точек. В частности, в гомоклинических структурах таких точек бесконечно много. В окрестности каждой такой точки близко расположенные траектории экспоненциально разбегаются друг от друга. Выше мы видели, что если одна из степеней свободы, которая участвует в нелинейном взаимодействии, окажется задействованной в некотором добавочном быстром процессе, то неустойчивая седловая точка может быть преобразована в устойчивую точку.

Можно ожидать, что аналогичное преобразование седловых точек можно реализовать в системах с динамическим хаосом. Для этого нужно организовать связь, по крайней мере, одной из независимых переменных с некоторой дополнительной зависимой переменной. Ниже мы увидим, что действительно такой алгоритм может быть реализован.

В качестве примера рассмотрим несколько измененную модель Лоренца:

$$\dot{x} = \sigma(y - z) - \mu w \quad \dot{y} = r \cdot x - y - x \cdot z \quad \dot{z} = x \cdot y - b \cdot z \quad \dot{w} = \mu x \tag{41}$$

Если коэффициент связи равен нулю ($\mu = 0$), то система уравнений (41) описывает известную модель Лоренца. При значениях параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ эта система находится в режиме с динамическим хаосом. Динамика такой системы изучена очень подробно. Можно ожидать, что если любая из компонент системы Лоренца ($x; y; z$) окажется связанной с какой-то четвертой компонентой (w), и связь между этими компонентами будет такой, что период обмена энергиями между этими компонентами будет меньшим, чем обратный инкремент локальной неустойчивости, то динамика системы Лоренца будет сложной, но регулярной. Система (41) исследовалась численными методами. Ниже приведены некоторые результаты этого исследования. На рис. 7,8 представлена динамика классической системы Лоренца (без связи с внешним дополнительным компонентом).

Из рисунков видно, что наблюдается привычная динамика системы Лоренца: спектр этой динамики широкий и корреляционная функция быстро спадает. Рассмотрим теперь ситуацию, когда внешняя динамическая переменная связана с первым компонентом системы Лоренца (41). Численные расчеты показывают, что увеличение коэффициента связи до величины порядка 5 мало сказывается на статистических характеристиках системы Лоренца. Однако, начиная где-то с пяти, шести, эта динамика становится регулярной. Эти утверждения иллюстрируются ниже приведенными рисунками.

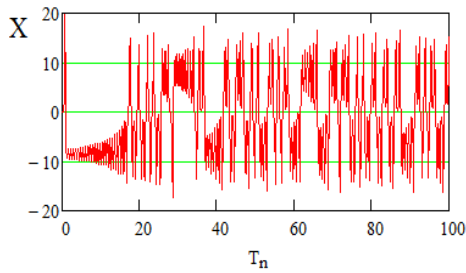


Рис. 7. Обычная динамика переменной x системы Лоренца без влияния стабилизирующей переменной $\mu = 0$

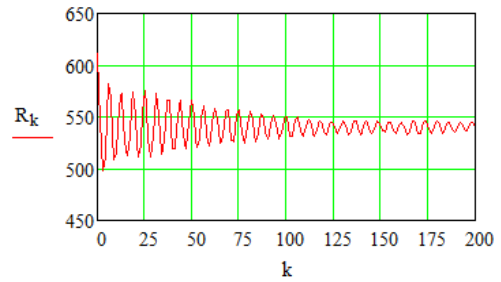


Рис. 8. Автокорреляционная функция переменной x при $\mu = 0$

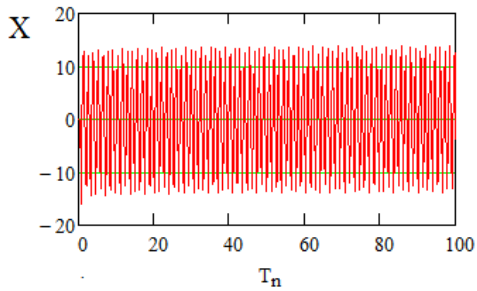


Рис. 9. Динамика переменной x системы Лоренца при наличии стабилизирующей переменной ($\mu = 6$)

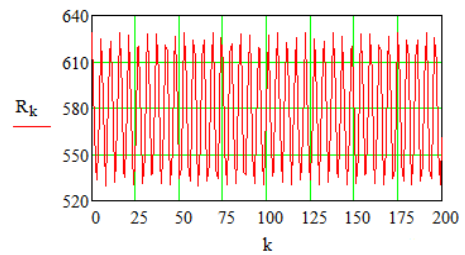


Рис. 10. Автокорреляционная функция переменной x при $\mu = 6$

Из рисунков видно, что динамика стала значительно более регулярной. Амплитуда корреляционной функции практически не меняется. Аналогичные результаты получаются и при связи внешнего стабилизирующего компонента с двумя другими компонентами (y, z) системы Лоренца. Во всех случаях при достаточно большой величине связи динамика системы Лоренца становится регулярной.

Следует отметить, что к системе (41) при $\mu = 0$ приводится большое количество разнообразных физических систем. Поэтому возникает вопрос о физической природе внешнего компонента, который может стабилизировать систему Лоренца. Ясно, что во всех конкретных случаях это будут разные физические переменные. В частности, укажем, что если система Лоренца описывает динамику одномодового лазера, то зависимая переменная x определяет амплитуду поля лазера. В этом случае легко себе представить практическую реализацию механизмов подавления. Достаточно связать поле одномодового лазера с некоторым полем другой моды. Связь может быть линейной и нелинейной. Если она окажется достаточно большой, то хаотическая динамика может стать регулярной динамикой.

Следует обратить внимание на тот факт, что коэффициент связи в рассмотренном случае, оказывается значительно большим, чем это было в предыдущих случаях ($\mu = 6$). Возникает вопрос: «Какой величины необходимо выбирать коэффициент связи для подавления режимов с динамическим хаосом?» Дело в том, что в каждой точке фазового пространства скорость разбегания фазовых траекторий различна (различны максимальные показатели Ляпунова). Анализировать все такие точки, в общем случае, малопродуктивно. Имеет смысл, по-видимому, ориентироваться на максимальные и минимальные значения показателей Ляпунова. В качестве примера найдем максимальные показания Ляпунова для невозмущенной системы Лоренца. Уравнение для этих показателей имеет вид:

$$\lambda^3 + \lambda^2(1+b) - \lambda[(b+x_0^2) + \sigma(r-z_0) - y_0] + \sigma[(r-z_0)(b-x_0) - y_0 - x_0 \cdot y_0] = 0.$$

Здесь $\{x_0, y_0, z_0\}$ - координаты точки фазового пространства, в которых определяются показатели Ляпунова.

Анализ этого уравнения показывает, что в окрестности нулевой стационарной $\{0;0;0\}$ точки максимальный показатель Ляпунова порядка 13. В окрестности стационарной точки $\{\sqrt{r-1}; \sqrt{r-1}; r-1\}$ он порядка 4.8, а в окрестности стационарной точки $\{-\sqrt{r-1}; -\sqrt{r-1}; r-1\}$ он порядка 6.6. Максимальные показатели Ляпунова при больших значениях фазовых координат $\{20;20;20\}$ порядка 21. Таким образом, мы видим, что в большинстве анализируемых точек показатели Ляпунова достаточно большие. Однако для подавления режима с динамическим хаосом оказалось достаточно ввести параметр связи равный 6 ($\mu = 6$).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В настоящее время имеется значительное количество экспериментальных доказательств существования квантового эффекта Зенона [19-22]. Кратко изложим основные идеи этих экспериментов и некоторые их результаты. В основном, рассматривается трехуровневая система. В большинстве случаев расстояние между нижним (первым) и вторым энергетическими уровнями находится в высокочастотном диапазоне (радиодиапазоне). Энергия третьего уровня значительно больше энергии нижних двух уровней. Переходы между третьим и вторым уровнями запрещены. В подавляющем большинстве случаев, переходы между первым и третьим уровнями находятся в оптическом диапазоне. Переходы же между первым и вторым уровнями находятся в высокочастотных диапазонах. В начальный момент времени населен только нижний основной уровень. На рассматриваемую квантовую систему начинают действовать ВЧ-излучением, частота которого соответствует переходам между первым и вторым уровнями. Характерное время перехода системы из первого на второй энергетический уровень в экспериментах стараются сделать как можно большим. В частности, в работе [22] между первым и вторым уровнями находится виртуальный уровень, а переходы между этими уровнями осуществляются воздействиями двумя высокочастотными импульсами. Через короткое время после воздействия высокочастотным сигналом система подвергается коротким лазерным π -импульсом. Такой импульс быстро переводит систему с первого энергетического уровня на высокий третий энергетический уровень. Время жизни на этом уровне составляет очень маленькую величину. В большинстве случаев этой величиной можно пренебречь. Поэтому система с третьего уровня практически мгновенно возвращается назад на первый исходный уровень. Предполагается, что такое воздействие лазерным импульсом представляет собой процесс измерения состояния изучаемой системы. Если оказывается, что за время перехода под воздействием высокочастотного сигнала с первого на второй уровень таких лазерных импульсов будет много, то населенность первого уровня оказывается практически неизменной. Такой сценарий проведения экспериментов, в которых был впервые обнаружен квантовый эффект Зенона, в других экспериментах отличается только несущественными деталями. Во всех случаях при обсуждении возможностей использования и реализации квантового эффекта Зенона делалось утверждение, что такие процессы не могут быть реализованы на ядерном уровне, например, на подавление или (ускорение) процессов радиоактивного распада.

В ННЦ "ХФТИ" были проведены две серии экспериментов, результаты которых могут быть объяснены на основе принципа юлы [23-24] (смотри также [5,8]). В первой серии экспериментов [23] в высокочастотном поле находился фотокатод ФЭУ. Было обнаружено достоверное, хорошо наблюдаемое уменьшение фототока при воздействии на фотокатод высокочастотного поля. Зависимость уменьшения фототока от мощности высокочастотного поля находится в хорошем качественном согласии с теоретическими предсказаниями. Причем, чем большей была мощность высокочастотного поля, тем меньшим был фототок. Этот эксперимент интересен тем, что воздействие оказывалось не на состояния электронов в потенциальной яме фотокатода, а на те состояния, на которые должен был перейти электрон в результате поглощения оптического кванта. Следует однако сказать, что в настоящее время нет строгого доказательства, что такое уменьшение фототока полностью связано с принципом юлы. Действительно, трудно оценить всю динамику электронов, которые движутся в высокочастотном поле и которые бомбардируют электроды ФЭУ.

Вторая серия экспериментов [24] относится к ядерным процессам. Суть экспериментов, которые были проведены в ННЦ "ХФТИ" и в Киевском институте ядерных исследований, заключалась в следующем. На образец материала, который содержал радиоактивный изотоп гафния-178, воздействовали потоками электронов с энергиями от 10 КэВ до 50 КэВ. На образце, как на мишени, энергия электронов конвертировалась в энергию рентгеновского излучения. По предположению несколько выше основного метастабильного состояния гафния-178 должен находиться короткоживущий триггерный уровень. Цель эксперимента заключалась в том, чтобы перевести метастабильное состояние гафния-178 на неустойчивый короткоживущий триггерный уровень. При успехе эксперимента в руках исследователей появляется идеальное ядерное топливо. Действительно, во многих экспериментах наблюдалось различное ускорение процесса радиоактивного распада под воздействием потока электронов на мишень, содержащую радиоактивный изотоп. Однако чаще авторы наблюдали противоположный эффект, когда процесс радиоактивного распада тормозился при воздействии пучка на мишень. Результаты этой серии экспериментов могут быть объяснены сформулированным выше механизмом стабилизации возбужденных состояний. Действительно, в рассматриваемой ядерной системе кроме триггерного уровня имеется большое количество других долгоживущих энергетических состояний. При воздействии пучка электронов на мишень возбуждается широкий спектр рентгеновского излучения. Такое излучение будет переводить ядерную систему не только на определенный энергетический (желательно триггерный) уровень, но и на многие другие долгоживущие уровни. Систему уравнений, которая будет описывать такие переходы, можно представить в виде:

$$i\dot{A}_0 = A_1, \quad i\dot{A}_1 = A_0 + \sum_{k=2}^N \mu_k A_k, \quad i\dot{A}_2 = \mu_2 A_1, \quad i\dot{A}_3 = \mu_3 A_1, \dots, i\dot{A}_N = \mu_N A_1. \quad (42)$$

Эта система уравнений описывает связь и переходы рассматриваемой системы с первого (A_1) метастабильного уровня на основной уровень (A_0) за счет спонтанных переходов и на другие уровни, близкорасполо-

женные к метастабильному уровню. Последние переходы являются индуцированными. Система (42) имеет аналитическое решение:

$$A_1 = \cos(\Omega \cdot t), \quad A_0 = \frac{1}{i \cdot \Omega} \sin(\Omega \cdot t), \quad A_k = \frac{\mu_k}{i \cdot \Omega} \sin(\Omega \cdot t), \quad k = 2, 3, \dots, N,$$

где $\Omega = \sqrt{1 + \sum_{k=2}^N \mu_k^2}$.

Из вида этих решений следует, что чем большим будет число энергетических уровней, на которые возможен индуцированный переход, тем меньшей будет вероятность спонтанного распада и меньшей будет вероятность перехода системы на триггерный короткоживущий уровень.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В заключение сформулируем и обсудим наиболее важные результаты, которые следует из проведенного выше сравнительного анализа механизмов стабилизации.

1. Полученные выше результаты демонстрируют тот факт, что имеется достаточно эффективный и простой механизм, который позволяет стабилизировать неустойчивые состояния. Этим механизмом является принцип юлы. Он прост, нагляден, достаточно универсален – он может быть использован как для стабилизации нестабильных квантовых систем, так и для стабилизации неустойчивых классических систем. Более того, этот принцип дает не только качественные рекомендации для стабилизации, но во многих случаях указывает и на необходимые количественные характеристики. Важным также является тот факт, что стабилизация на основе использования принципа юлы годится не только для систем с замедленным законом распада (неэкспоненциальным законом распада), но и для неустойчивых систем, для которых характерным является привычный экспоненциальный закон распада и даже для стабилизации взрывных неустойчивостей. Относительно последних – следует заметить, что в некоторых случаях численные расчеты показывают, что полной стабилизации не наступает. Происходит только задержка развития процесса неустойчивости. Иногда значительная задержка. Однако этот вопрос в настоящее время находится в состоянии изучения.

2. Как мы видели выше, стабилизация квантовых систем, прежде всего, обусловлена тем фактом, что процесс распада квантовых систем на малых интервалах времени неэкспоненциален. По-видимому, впервые этот результат был получен в работе [1]. Однако до настоящего времени автор не знает случая, когда при анализе квантового эффекта Зенона ссылались на эту работу. Второй фундаментальный процесс, который лежит в основе эффекта Зенона это процесс измерения. Описание процесса измерения в квантовой механике выходит за рамки традиционной квантовой механики. До настоящего времени нет единого мнения среди специалистов, которые занимаются основами квантовой механики, какую роль играет существующий математический аппарат, описывающий процесс измерения. Ярким примером такого неоднозначного мнения являются результаты опроса, который был проведен среди участников конференции "Quantum Physics and the Nature of Reality", которая проходила в июле 2011 в Австрии [25]. Организаторы опроса задавали вопрос: "Как Вы относитесь к существующему состоянию теории, которая описывает процесс измерения?" Ответы были самые разнообразные. От полного одобрения существующей теории до полного отрицания ее полезности.

3. Следует отметить, что многие авторы указывали на тот факт, что существующие экспериментальные результаты, которые подтверждают результаты теории квантового эффекта Зенона, могут быть объяснены в рамках традиционной квантовой механики. Так, в работе Пригожина и соавторов [26] авторам удалось сформулировать в рамках традиционной квантовой механики свойства проекционного оператора, которые оказались достаточными, чтобы объяснить основные экспериментальные результаты, полученные к тому времени относительно квантового эффекта Зенона. Как мы видели выше, стабилизация квантовых систем может вполне быть описана в рамках традиционной квантовой механики.

4. Следует отметить тот факт, что в известных экспериментальных исследованиях эффекта Зенона стабилизация осуществлялась лазерным излучением квантовых переходов, которые располагались в ВЧ-диапазоне (радиодиапазоне), т.е. осуществлялась стабилизация низкочастотных переходов с помощью излучения высоких частот. Важным результатом, полученным выше, является тот факт, что возможна наоборот стабилизация высокочастотных переходов (лазерных, рентгеновских и т.д.) с помощью воздействия низкочастотных полей. Необходимым условием для такой стабилизации является условие, чтобы частота Раби низкочастотных переходов была больше, а лучше значительно больше величины, которая равна обратному времени жизни возбужденных состояний. Это означает, что число низкочастотных квантов должно быть достаточно велико.

5. На наш взгляд, очень важным и необычным результатом является результат, представленный формулой (17а). Важность его заключается в том, что если в квантовом эффекте Зенона мы должны измерять (воздействовать) то состояние, в котором находится квантовая система, то в общем случае стабилизация может быть реализована путем воздействия и на те состояния, в которые система должна перейти. Таким образом, стабилизацию квантовой системы можно осуществить либо с помощью превращения стационарного неустойчивого состояния в устойчивое динамическое состояние, либо делать динамическими те состояния, в которые система должна перейти. Этот результат особенно важен для стабилизации таких состояний, на которые внешними си-

лами воздействовать либо затруднительно, либо просто невозможно. Примерами могут служить фотоэффект и ядерный бета-распад.

6. Стабилизация классических систем с использованием принципа юлы также оказалась достаточно эффективной. Выяснилось, что имеется разница между механизмом стабилизации неустойчивых классических систем путем воздействия на них или на их параметры внешнего высокочастотного поля и стабилизацией на основе принципа юлы. Главным различием оказался тот факт, что при стабилизации системы в быстроосциллирующем поле стабилизирующее воздействие оказывается не самосогласованным. Динамика стабилизирующей силы не зависит от динамики стабилизируемой системы. При использовании принципа юлы стабилизирующее воздействие является самосогласованным. Его динамика существенно зависит от динамики стабилизируемой системы. Их динамики самосогласованы. В результате в тех случаях, когда для стабилизации изучаемой системы можно использовать принцип юлы, он оказывается более эффективным, чем стабилизация в быстроосциллирующем поле. Этот результат был продемонстрирован на примере стабилизации верхнего (неустойчивого) положения математического маятника (маятника Капицы). Однако очевидно, что этот результат справедлив и в других случаях. Нужно, однако, отметить, что механизм стабилизации с помощью внешнего быстроосциллирующего поля в некотором смысле более универсален. Он проще при реализации и, похоже, может быть использован для более широкого круга физических систем, чем принцип юлы. Действительно, достаточно трудно представить себе физическую реализацию принципа юлы для конкретного математического маятника. В то время как физическая модель маятника Капицы эффективно работает.

7. Следует обратить внимание также на тот факт, что подавление некоторых неустойчивостей может быть объяснено не только механизмом юлы, но и другими механизмами. Так, если рассматривать подавление плазменно-пучковой неустойчивости путем наложения дополнительной связи возбуждаемой плазменной волны с волной внешней электродинамической структуры (38)-(39), то срыв неустойчивости может быть объяснен тем фактом, что такое взаимодействие приводит к расщеплению дисперсионной ветви плазменной волны. В той области, где ветви плазменной волны и волны внешней электродинамической структуры пересекаются, возникает щель, ширина которой пропорциональна коэффициенту связи между этими волнами. В результате, пучковая мода не пересекает ветвь плазменной волны. Это означает, что исчезают условия для черенковского механизма излучения частиц пучка в плазме. Это, в свою очередь, приводит к нарушению условий, необходимых для развития плазменно-пучковой неустойчивости [27]. Аналогичное объяснение можно привести и для процесса подавления распадной неустойчивости. В этом случае связь одной из волн, участвующих в трехволновом взаимодействии, нарушает условие синхронизма между ними. Это нарушение синхронизма приводит к срыву распадных неустойчивостей. Эти примеры можно продолжить. Привлекательность принципа юлы заключается в том, что он объединяет все эти, на первый взгляд, разрозненные процессы. Он позволяет подойти ко всем этим процессам с единой точки зрения.

8. Говоря о подавлении режимов с динамическим хаосом, следует обратить внимание на трудности, которые могут встретиться при определении конкретных физических механизмов, которые будут эквивалентны механизму вращения юлы. Действительно, если для системы Лоренца в том случае, когда она описывает динамику лазерного поля, найти такой механизм оказалось достаточно просто, то для случая, например, движения частиц в потенциале Хенона-Хейлса это сделать трудно. Действительно, не составляет труда формально использовать принцип юлы, и сорвать режим динамического хаоса для частиц, которые движутся в кристалле (в потенциале Хенона-Хейлса [28,29]). Однако, как только возникает вопрос, что представляет собой физическое содержание дополнительной стабилизирующей степени свободы, то здесь возникают трудности. Сделаем еще одно замечание. Очень часто режимы с динамическим хаосом анализируются с помощью сечения Пуанкаре. Однако такой способ не всегда дает правильный результат. Действительно, если посмотреть на сечение Пуанкаре для невозмущенной системы Лоренца и для возмущенной, то мы увидим, что произошло уменьшение фазового объема этих точек (в стабилизируемой системе). Однако утверждать, что динамика стала регулярной по этой картине трудно. По этой причине мы не привели ни вида фазового портрета, ни вида сечений Пуанкаре. Они могут указать только на тенденцию к регуляризации.

Автор благодарит Д.М. Ваврива, А.Л. Санина и Н.Ф.Шульгу за обсуждения результатов и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krylov N.S., Fok V.A. O dvuh osnovnyh tolkovaniyah sootnosheniya neopredelennosti dlja energii i vremeni // ZhJeTF. – 1947. – Т.17. – Вып. 2. – С. 93–107.
2. <http://physics.stackexchange.com/questions/47252/simple-explanation-of-quantum-zeno-effect>
3. Buts V.A. Modifikacija kvantovogo efekta Zenona – kvantovaja jula // Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy. – 2010. – Т.15. – No.1 – С.58-65.
4. Buts V.A. Stabilization of instable states. MIKON // 20th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications. – 2014. – Gdansk, Poland. – P.681-685.
5. Buts V.A. Mehanizmy povysheniya chastoty i stepeni kogerentnosti izlucheniya // Problemy teoreticheskoy fiziki. Serija: «Problemy teoreticheskoy i matematicheskoy fiziki. Sbornik trudov. Nauchnye trudy». HGU. – 2014. – Вып. 1. – С.82-247.

6. Buts V.A. Stabilization of classic and quantum systems //Problems of atomic science and technology. – 2012. – No.6(82). – P.146-148.
7. Buts V.A. The mechanism of suppression of quantum transitions (quantum whirligig) // Problems of atomic science and technology. – 2010. – No.4(68). – P.259-263.
8. Buts V.A. Novye mehanizmy vzbuzhdenija korotkovolnovogo kogerentnogo izluchenija. – Lambert: Academic Publishing, 2014. – 201s.
9. Haken Herman Synergetics. – Springer-Verlag, 1978. – 400 p. (Imeetsja perevod: Haken G. Sinergetika. – Moskva: Mir, 1980. – 404s.).
10. Kapitsa P.L. Dinamicheskaja ustojchivost' majatnika pri kolebljushhejsja tochke podvesa // ZhJeTF. -1951 – T. 21. – S. 588.
11. Kapitsa P.L. Majatnik s vibrirujushhim podvesom // UFN. – 1951. – T.44. – S. 7.
12. Landau L.D., Lifshits E.M. Mehanika. – M.: Nauka, 1965. – 204 s.
13. Bolotovskij B.M. Put' formirovanija i ego rol' v izluchenii dvizhushhihsja zarjadov // Tr. FIAN. – 1982. – T. 140. – S. 95-140.
14. Sokolov A. A., Ternov I. M. Reljativistskij elektron. – Moskva: Nauka, 1974. – 391 s.
15. Buts V.A., Koval'chuk I.K., Kornilov E.A., Tarasov D.V. Stabilization of Beam Instability by a Local Instability Developing due to a Wave-Wave Interaction // Plasma Physics Reports. – 2006. – Vol. 32. – No.7. – R. 563-571.
16. Antonov A.N., Buts V.A., Koval'chuk I.K., Kovpik O.F., Kornilov E.A., Svichenskij V.G., Tarasov D.V. Reguljarnye i stohasticheskie raspady voln v plazmennom rezonatore // Fizika plazmy. – 2012. – No.38. – T.8. –S. 693-708.
17. Kadomtsev B.B. Kollektivnye javlenija v plazme. – Moskva: Nauka, 1976. – 240 s.
18. Vil'hel'msson H., Vejland Ja. Kogerentnoe nelinejnoe vzaimodejstvie voln v plazme. – Moskva: Energoizdat, 1981. – 223 s.
19. Degasperis L., Fonda & Ghirardi G.C. Does the lifetime of an unstable system depend on the measuring apparatus? // Nuovo Cimento. – 1974. – Vol.A. 21 (3). – R. 471–484.
20. Itano W.M., Heinsen D.J., Bokkinger J.J., Wineland D.J. Quantum Zeno effect // PRA. – 1990. – Vol. 41. – R. 2295–2300.
21. Fischer M.C., Gutiérrez-Medina B., Raizen M.G. Observation of the Quantum Zeno and Anti-Zeno Effects in an Unstable System // Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol. 87. – 040402.
22. Eric W. Streed, Jongchul Mun, Micah Boyd, Gretchen K. Cambell, Patrick Medley, Wolfgang Ketterle, David E. Pritchard Continuous and Pulsed Quantum Zeno Effect // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 97. – 260402-4.
23. Antonov A.N., Buts V.A., Kornilov E.A., Shherbina A.N. Podavlenie fototoka FEU vneshnim VCh-polem // Voprosy atomnoj nauki i tehniki: Serija: Jaderno-fizicheskie issledovanija. – 2012. – No. 4(80) – S.100-103.
24. Dovbnja A.N., Kandybej S.S., Kirishhuk V.I., Ranjuk Ju.N., Azhazha V.M., Kovtun K.V., Starolat M.P. Triggering dolgozhivushhih izomerov $^{178m2}\text{Hf}$ by 50 KeV // The Journal of Kharkiv National University, physical series “Nuclei, Particles, Fields”. – 2009. – No.880. – Iss.4(44). – S.56-62.
25. Schlosshauer M., Koer J., ZeilingerA. A Snapshot of Foundational Attitudes Toward Quantum Mechanics // Stud. Hist. Phil. Mod. Phys. – 2013. – Vol.44. – P.222 – 230. ([quant-ph] arXiv:1301.1069).
26. Petrosky T., Tasaki S., Prigogine I. Quantum Zeno effect // Physics Letters A. – 1990. – Vol.151. – No.3,4. – P.109-113.
27. Buts V.A., Lebedev A.N., Kurilko V.I. The Theory of Coherent Radiation by Intense Electron Beams. – Springer:Berlin, Heidelberg, New York, 2006. – R. 259.
28. Shul'ga N.F. Nekotorye voprosy teorii rassejanija bystryh chastic v veshhestve i vo vneshnih poljah. – Kiev: Naukova dumka, 2010. – 199 s.
29. Tabor M. Haos i integriruemost' v nelinejnoj dinamike. – Moskva: Editorial URSS, 2001. – 320 s.