МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 681.518.3

ДОСЛІДЖЕННЯ СУПЕРПОЗИЦІЇ ПУАССОНІВСЬКОГО ТА РЕГУЛЯРНОГО ПОТОКІВ ТРАНЗАКЦІЙ ©

О.І. ПІДГУРСЬКИЙ,
кандидат технічних наук,
доцент кафедри моделювання та інформаційних технологій в економіці,

Л.О. ВОЛОНТИР,
кандидат технічних наук,
доцент кафедри моделювання та інформаційних технологій в економіці,
Вінницький національний аграрний університет
(м. Вінниця)

В роботі на основі методів математичного моделювання досліджується гібридний потік транзакцій, що утворюється шляхом суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків і є одним з різновидів неоднорідних потоків. Досліджені існуючі підходи до математичного моделювання неоднорідних потоків та результати їх моделювання. Математична модель гібридного потоку подана у вигляді функції розподілу ймовірностей тривалості інтервалів часу між транзакціями, функції щільності розподілу та перших двох початкових моментів розподілу. З метою верифікації математичної моделі гібридного потоку були розглянуті граничні значення параметрів пуассонівського та регулярного потоків, при яких аналітичні вирази моделі зводяться до відомих рішень. Для різних значень інтервалів регулярного потоку були побудовані та проаналізовані графіки функції розподілу та функції щільності розподілу, а також досліджені графічні залежності математичного сподівання, дисперсії та середньоквадратичного відхилення.

Ключові слова: потоки транзакцій, гібридні потоки, математичні моделі, імітаційне моделювання, генератор псевдовипадкових чисел, закони розподілу ймовірностей, верифікація моделей.

Рис. 7. Літ. 9.

Постановка проблеми. Розробка та модернізація сучасних складних систем масового обслуговування (СМО) потребують ретельного аналізу ймовірнісних процесів їх функціонування. Універсальним інструментом дослідження таких процесів є математичне та імітаційне моделювання, що дозволяє аналізувати складні СМО з урахуванням різноманітних чинників, що впливають на їх роботу, зокрема видів та параметрів потоків подій (транзакцій), та характеристик обслуговуючих пристроїв. [1], [2].

Особливе місце при побудові моделей належить задачі моделювання потоків транзакцій, що надходять до системи. Імітаційне моделювання таких потоків здійснюється на основі послідовності псевдовипадкових чисел із заданими функціями розподілу ймовірностей. Такі послідовності формуються спеціальними програмними засобами – генераторами псевдовипадкових чисел (ГПВЧ). Вони реалізують математичні моделі потоків, які будуються на основі функцій розподілу ймовірностей випадкових інтервалів часу між двома суміжними подіями $F(t)$. Від таких математичних моделей в значній мірі залежить продуктивність підсистем моделювання потоків транзакцій. Так, наприклад, у випадку моделювання сумарного потоку транзакцій від декількох джерел потрібно застосовувати відповідну кількість ГПВЧ. Такий підхід веде до зниження ефективності імітаційного моделювання через збільшення часу на виклики генераторів і збільшує загальну кількість часу на сеанс моделювання. Оскільки кількість таких викликів пропорційна кількості ГПВЧ, то підвищення ефективності моделювання потоків транзакцій можна досягти шляхом еквівалентної заміни декількох генераторів одним. Для цього потрібно створювати математичні моделі сумарних потоків, що дозволить для їх генерації використовувати лише один ГПВЧ. Тому питання розробки ефективних методів генерації псевдовипадкових чисел є актуальними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженням потоків випадкових подій присвячені фундаментальні роботи таких науковців, як Т. Сааті [1], Л. Клейнрок [2], О. Хінчін [3], Б. Гнеденко, Н. Коваленко [4] та інших. В цих роботах було системно і докладно вивчено будову найпростішого потоку випадкових подій, що характеризується властивостями стаціонарності, ординарності та відсутності післядії. Найпростіший (пуассонівський) потік є окремим випадком потоків Пальма та потоків Ерланга, для якого розроблена строга математична модель, що знайшла своє застосування при аналізі процесів функціонування різноманітних СМО. Тому переважна більшість аналітичних моделей СМО має в своїй основі припущення про пуассонівську природу вхідного потоку транзакцій, не зважаючи на адекватність таких припущень. Оскільки невідповідність природи потоків в реальних системах та в їх математичних моделях негативно впливає на точність результатів моделювання, то вчені продовжують дослідження потоків випадкових подій з метою побудови адекватних моделей.

Одним з напрямків сучасних досліджень потоків випадкових подій є вивчення неоднорідних та непуассонівських потоків. Під цим загальним терміном розуміють потоки, які містять різнотипні події, є нестаціонарними в часі, характеризуються властивістю обмеженої післядії та ін.

Так в роботі [5] досліджуються нестаціонарні в часі потоки однорідних подій і стверджується, що побудова однозначної оцінки нестаціонарних потоків є неможливою, коли інтенсивність залежить від двох чи більше параметрів, а є можливою лише на окремих інтервалах нестаціонарного потоку, на яких потік є стаціонарним.

В роботі [6] вивчаються потоки неоднорідних подій, розглядається узагальнення моделі Пуассона з нескінченною кількістю джерел таких подій і вказуються умови, за яких кожне таке джерело нетривіальним чином впливає на сумарний потік.

В роботі [7] розроблена математична модель гібридного потоку з обмеженою післядією, що утворюється шляхом суперпозиції пуассонівського потоку та потоку з довільною функцією розподілу ймовірностей інтервалів часу між подіями. В явному вигляді отримана функція розподілу *F(t)* для комбінації пуассонівського і регулярного потоків, а також у вигляді перетворення Лапласа отримана функція щільності розподілу для комбінацій пуассонівського та інших потоків, моделі яких можна задати в області комплексної змінної *s*.

Ці та інші роботи поповнюють теоретичну базу проведених досліджень потоків випадкових подій, але питанням верифікації отриманих математичних моделей в сучасних публікаціях приділяється не достатньо уваги. Тому проблема розробки нових математичних моделей неоднорідних потоків та їх верифікації і досі залишається актуальною.

Метою даного дослідження є перевірка придатності математичної моделі гібридного потоку [7] для побудови ГПВЧ і використання його в системах імітаційного моделювання СМО.

Формулювання цілей статті. Для побудови адекватної моделі СМО з неоднорідним гібридним потоком транзакцій важливим завданням є реалізація математичної моделі такого потоку в ГПВЧ, а також її верифікація шляхом використання такого ГПВЧ при дослідженні процесів функціонування СМО.

Виклад основного матеріалу дослідження. В даній роботі розглядається спосіб, що дозволяє моделювати неоднорідний гібридний потік транзакцій одним ГПВЧ. Гібридним будемо вважати потік, що утворюється шляхом суперпозиції пуассонівського потоку та непуассонівського потоку з довільною функцією розподілу ймовірностей інтервалів часу між транзакціями. Спосіб полягає у використанні математичної моделі гібридного потоку, що була отримана в роботі [7] у вигляді перетворення Лапласа функції щільності розподілу інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку:

$$f^*(s)=\frac{\lambda}{p}+\frac{\lambda+s\cdot V^*(p)}{(1+\lambda\bar{v})\cdot p^2}\cdot s \quad , (1)$$

де λ – інтенсивність пуассонівського потоку;

$V^*(p)$ – перетворення Лапласа функції щільності розподілу інтервалів часу між транзакціями непуассонівського потоку в області комплексної змінної $p=s+\lambda$;

$\bar{v}$ – математичне сподівання розподілу $V^*(p)$.

В даній роботі в якості гібридного потоку розглянемо суперпозицію пуассонівського та регулярного потоків. Для регулярного потоку інтервали часу між транзакціями є постійною величиною *b*, для якої функція щільності розподілу ймовірностей інтервалів часу є δ-функцією Дірака у точці *b*. Перетворення Лапласа функції щільності розподілу $V^*(s)$ має вигляд [8]:

$$V^*(s)=e^{-sb} \quad (2)$$

Підставивши вираз (2) у вираз (1) (враховуючи що $p=s+\lambda$), отримаємо перетворення Лапласа функції щільності розподілу ймовірностей інтервалів часу гібридного потоку у вигляді:

$$f^*(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}+\frac{\lambda+s\cdot e^{-(\lambda+s)b}}{(1+\lambda b)\cdot(\lambda+s)^2}\cdot s \quad (3)$$

Застосувавши зворотне перетворення Лапласа для виразу (3) отримаємо оригінал для функції щільності розподілу ймовірностей інтервалів часу гібридного потоку:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2+\lambda\cdot(b-t)}{1+\lambda b}\cdot\lambda e^{-\lambda t},0\le t<b\\ \dfrac{\delta(t-b)}{1+\lambda b}\cdot e^{-\lambda b},t=b\end{cases} \quad (4)$$

Вираз (4) дозволяє шляхом інтегрування отримати в явному вигляді функцію розподілу тривалості інтервалів часу між транзакціями гібридного потоку:

$$F(t)=\begin{cases}0,t<0,\\ 1-e^{-\lambda t}+\dfrac{\lambda te^{-\lambda t}+H(t-b)e^{-\lambda b}}{1+\lambda b},0\le t\le b,\\ 1,t>b\end{cases} \quad (5)$$

де $H(t-b)$ – функція Гевісайда.

Вирази (4) та (5) дозволяють отримати значення моментів розподілу випадкової величини *t* та дисперсію:

$$\overline{\alpha}_t=\int_0^b t\cdot f(t)dt=\frac{b}{1+\lambda b}, \quad (6)$$

$$\overline{\alpha}_t^{(2)}=\int_0^b t^2\cdot f(t)dt=2\frac{\lambda b-(1-e^{-\lambda b})}{\lambda^2(1+\lambda b)}, \quad (7)$$

$$D_t=\overline{\alpha}^{(2)}-(\overline{\alpha})^2=\frac{(\lambda b)^2+2\lambda be^{-\lambda b}-2(1-e^{-\lambda b})}{[\lambda(1+\lambda)]^2}. \quad (8)$$

Приймемо вирази (4) - (8) як математичну модель гібридного потоку та проаналізуємо їх з метою їх верифікації. Для цього спробуємо вилучити з гібридного потоку транзакцій одну з двох його складових. В результаті маємо отримати вирази для іншої складової цього потоку.

Спочатку вилучимо регулярну компоненту гібридного потоку і з'ясуємо, як це позначиться на виразах (4)-(8), і чи будуть вони відображати характеристики пуассонівського потоку. Для цього спрямуємо величину інтервалів регулярного потоку b до нескінченності. Тоді вплив регулярного потоку на гібридний потік стане зникаюче малим, а вираз (4) набуде такого вигляду:

$$\lim_{b\to\infty} f(t) = \lim_{b\to\infty} \frac{2+\lambda\cdot(b-t)}{1+\lambda b}\cdot\lambda e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t}$$, коли $0\le t\le b$ (9)

$$\lim_{b\to\infty} f(t) = \lim_{b\to\infty} \frac{\delta(t-b)}{1+\lambda b}\cdot e^{-\lambda b} = 0$$, коли $t=b$

Отриманий вираз (9) відповідає функції щільності розподілу ймовірностей тривалості інтервалів пуассонівського потоку, що є необхідною умовою вірності виразу (4).

Перевіримо у той самий спосіб вирази (5) - (8):

$$\lim_{b\to\infty} F(t) = \lim_{b\to\infty}(1-e^{-\lambda t} + \frac{\lambda t e^{-\lambda t} + H(t-b)e^{-\lambda b}}{1+\lambda b}) = 1-e^{-\lambda t}$$, (10)

$$\lim_{b\to\infty} \overline{\alpha}_t = \lim_{b\to\infty}\frac{b}{1+\lambda b} = \frac{1}{\lambda}$$, (11)

$$\lim_{b\to\infty} \overline{\alpha}_t^{(2)} = \lim_{b\to\infty} 2\frac{\lambda b-(1-e^{-\lambda b})}{\lambda^2(1+\lambda b)} = \frac{2}{\lambda^2}$$, (12)

$$\lim_{b\to\infty} D_t = \lim_{b\to\infty}\frac{(\lambda b)^2+2\lambda b e^{-\lambda b}-2(1-e^{-\lambda b})}{[\lambda(1+\lambda)]^2} = \frac{1}{\lambda}$$ (13)

Вирази (10) - (13) також характеризують пуассонівський потік транзакцій, що є необхідною умовою вірності виразів (5) - (8).

Тепер вилучимо з гібридного потоку пуассонівський потік. Для цього у виразах (4) - (8) встановимо параметр λ=0 і перевіримо, чи будуть дані вирази відображати характеристики регулярного потоку.

$$f(t)\big|_{\lambda=0} = \frac{2+\lambda\cdot(b-t)}{1+\lambda b}\cdot\lambda e^{-\lambda t}\big|_{\lambda=0} = 0$$, коли $0\le t\le b$ (14)

$$f(t)\big|_{\lambda=0} = \frac{\delta(t-b)}{1+\lambda b}\cdot e^{-\lambda b}\big|_{\lambda=0} = \delta(t-b)$$, коли $t=b$

Як видно з виразу (14) функція *f(t)* перетворюється на δ-функцію Дірака, що є необхідною умовою вірності виразу (4).

Перевіримо у той самий спосіб вирази (5) - (8):

$$F(t)\big|_{\lambda=0} = 1-e^{-\lambda t} + \frac{\lambda t e^{-\lambda t} + H(t-b)e^{-\lambda b}}{1+\lambda b}\big|_{\lambda=0} = H(t-b)$$, (15)

$$\overline{\alpha}_t\big|_{\lambda=0} = \frac{b}{1+\lambda b}\big|_{\lambda=0} = b$$ (16)

Отже, математичне очікування сталої величини дорівнює самій величині, що характерно для регулярного потоку транзакцій:

$$\overline{\alpha}_t^{(2)}\Big|_{\lambda=0} = 2\frac{\lambda b-(1-e^{-\lambda b})}{\lambda^2(1+\lambda b)}\Big|_{\lambda=0} = \frac{0}{0} \quad (17)$$

Вираз (17) містить невизначеність типу 0/0. Розкриємо її за допомогою правила Лопіталя [9]:

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{2(\lambda b-(1-e^{-\lambda b}))''}{(\lambda^2+\lambda^3 b)''} = \frac{2b^2}{2} = b^2 \quad (18)$$

Таким чином, другий момент розподілу для сталої величини дорівнює квадрату цієї величини, що випливає з визначення другого моменту розподілу, а отже, також характеризує регулярний потік транзакцій.

Розглянемо тепер вираз для дисперсії

$$D_t\Big|_{\lambda=0} = \frac{(\lambda b)^2+2\lambda b e^{-\lambda b}-2(1-e^{-\lambda b})}{[\lambda(1+\lambda)]^2} = \frac{0}{0} \quad (19)$$

Знову маємо невизначеність типу 0/0. Розкриємо її аналогічно:

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{((\lambda b)^2+2\lambda b e^{-\lambda b}-2(1-e^{-\lambda b}))'''}{((\lambda+\lambda^2)^2)'''} = 0 \quad (20)$$

Отже, дисперсія інтервалів часу між транзакціями регулярного потоку дорівнює нулю, що і має бути для сталої величини.

Таким чином, вирази (9) - (20) як мінімум не заперечують вірність виразів (4) - (8).

Розглянемо тепер графічну інтерпретацію математичної моделі гібридного потоку транзакцій.

На рисунку 1 зображені графіки функції розподілу *F(t)* за виразом (5) при значенні параметра λ=1 і при різних значеннях тривалості інтервалів *b*.

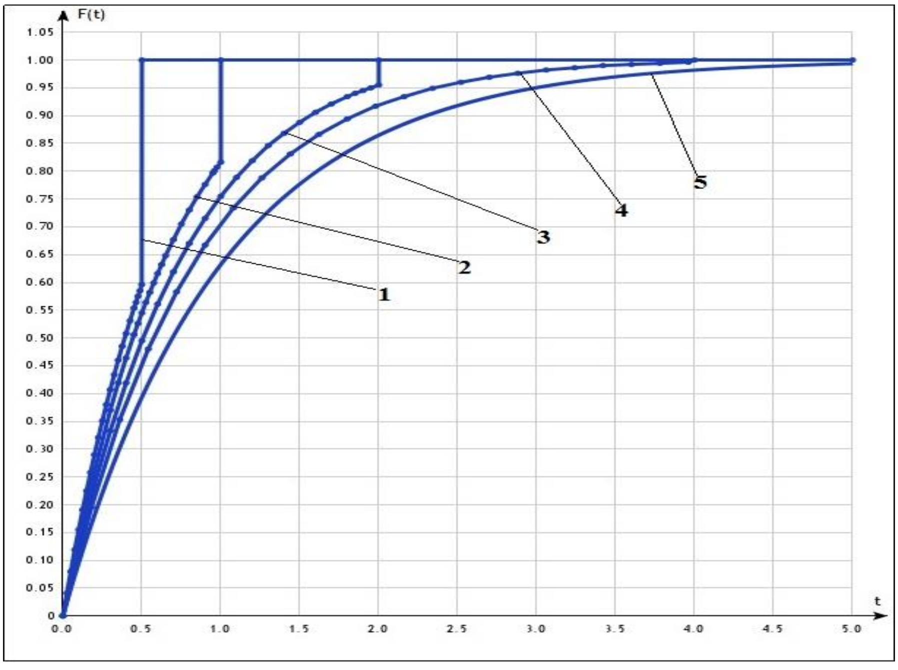

Рис. 1. **Графік функції *F(t)***

На рисунку залежність 1 відповідає графіку функції *F(t)* при *b*=0,5. Як видно, функція монотонно зростає на відрізку *t* від 0 до *b*. В точці *t*= *b* значення функції стрибком зростає до 1. Це зумовлено присутністю у виразі (5) одиничної функції Гевісайда і відповідає тому факту, що при наявності в гібридному потоці регулярної складової максимальна довжина інтервалу не може бути більшою, ніж значення *b*. Максимальні інтервали в такому потоці будуть виникати з ймовірністю

$$p_b = \frac{e^{-\lambda b}}{1+\lambda b}$$

Для залежності 1 значення $p_b \approx 0{,}4044$, що відповідає висоті вертикальної прямої в точці ***t***=***b***. З ймовірністю $1-p_b \approx 0{,}5956$ тривалість інтервалів гібридного потоку буде меншою від *b*.

Залежності 2, 3 та 4 відповідають графіку функції *F(t)* при *b*=1; *b*=2 та *b*=4 відповідно. Залежність 5 є графіком функції розподілу ймовірностей тривалості інтервалів пуассонівського потоку

$$F_n(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (21)$$

при значенні параметра λ=1.

Не важко помітити, що зі зростанням значення *b* графік функції *F(t)* поступово наближається до графіка функції $F_n(t)$ і при *b*→∞ має з ним зійтися. Це означає, що при суперпозиції пуассонівського і регулярного потоків вплив регулярного потоку на гібридний буде нівелюватися при зростанні тривалості інтервалів регулярного потоку *b*.

Більш детально процес наближення графіка функції *F(t)* до графіка функції $F_n(t)$ можна побачити на рисунку 2, де залежності 1, 2, 3, 4, 5 та 6 відповідають графіку функції *F(t)* при *b*=0,5; *b*=1; *b*=2; *b*=4; *b*=8 та *b*=20 відповідно, а залежність 7 є графіком функції $F_n(t)$ при значенні параметра λ=1.

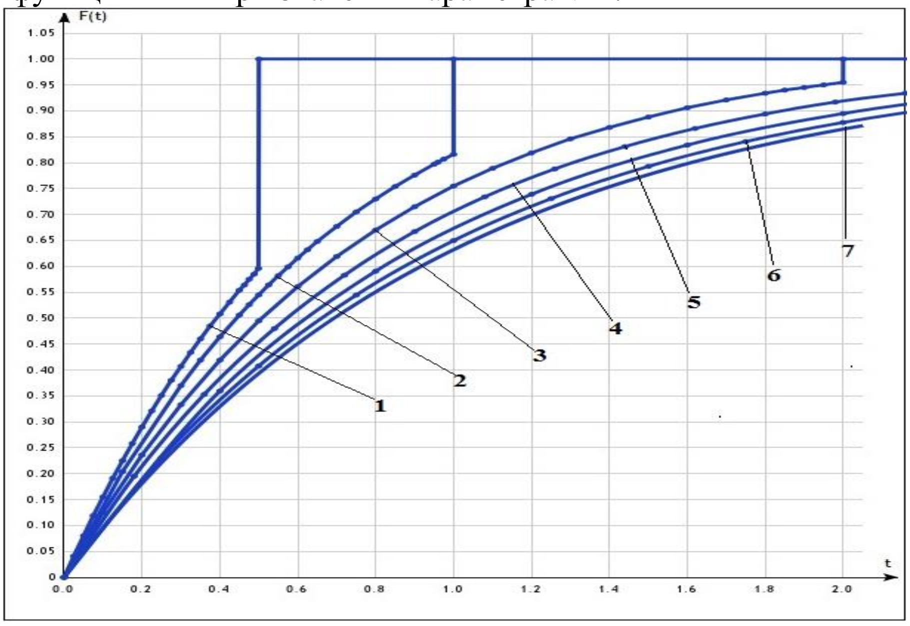

Рис. 2. **Процес наближення графіка функції *F(t)* до графіка функції** $F_n(t)$

Отже, поведінка графіка функції *F(t)*, що графічно ілюструє вирази математичної моделі, як мінімум не суперечить фізичній природі суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків.

На рисунку 3 зображений графік функції щільності розподілу тривалості інтервалів часу гібридного потоку *f(t)*, що побудований за виразом (4) при значеннях λ=1 і *b*=0,5 (залежність 1). Для порівняння на рисунку також показаний графік функції щільності розподілу тривалості інтервалів часу пуассонівського потоку

$$f_n(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (22)$$

при значенні параметра λ=1 (залежність 2).

Функція *f(t)* визначена на відрізку *t* від 0 до *b*. Це відповідає тому факту, що при наявності в гібридному потоці регулярної складової максимальна довжина інтервалу не може бути більшою, ніж значення *b*. На цьому інтервалі функція монотонно спадає, а в точці *t*=*b* містить нескінчений імпульс. Це пояснюється наявністю у виразі (4) δ-функції Дірака і присутністю в гібридному потоці інтервалів з максимальною тривалістю *b*.

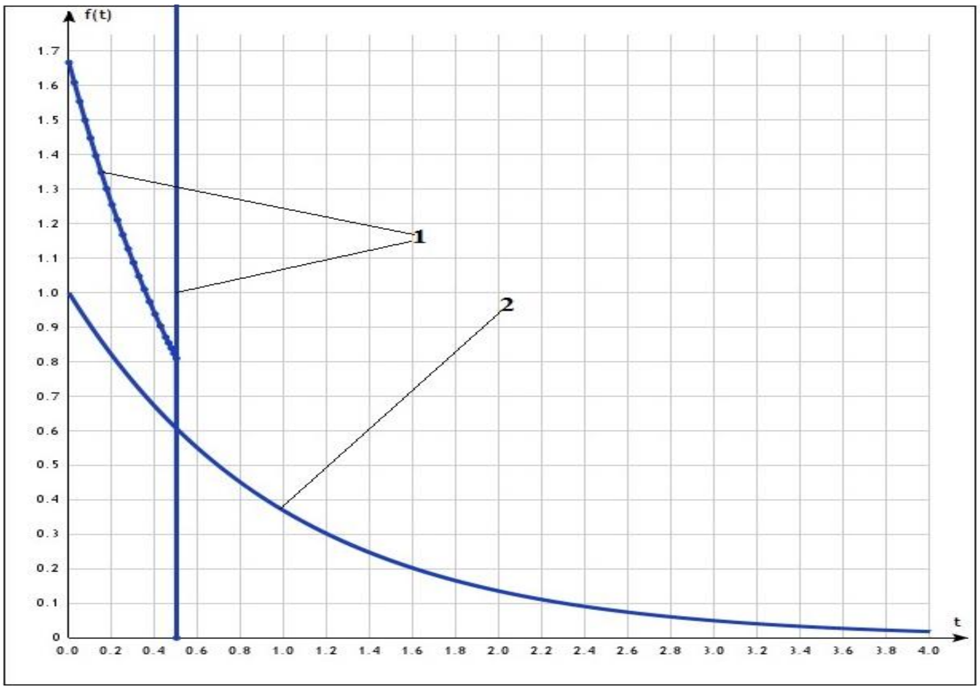

Рис. 3. **Графік функції *f(t)* при *b*=0,5**

На рисунках 4, 5, 6 показані графіки функції *f(t)* при *b*=1,5; *b*=3; та *b*=8 відповідно (залежність 1) та графік функції $f_n(t)$ при значенні параметра λ=1 (залежність 2).

Можна помітити, що зі зростанням значення *b* графік функції *f(t)* поступово наближається до графіка функції $f_n(t)$ і при *b*→∞ має з ним зійтися. Це означає, що при зростанні тривалості інтервалів регулярного потоку *b* вплив цього потоку на гібридний потік буде зменшуватися.

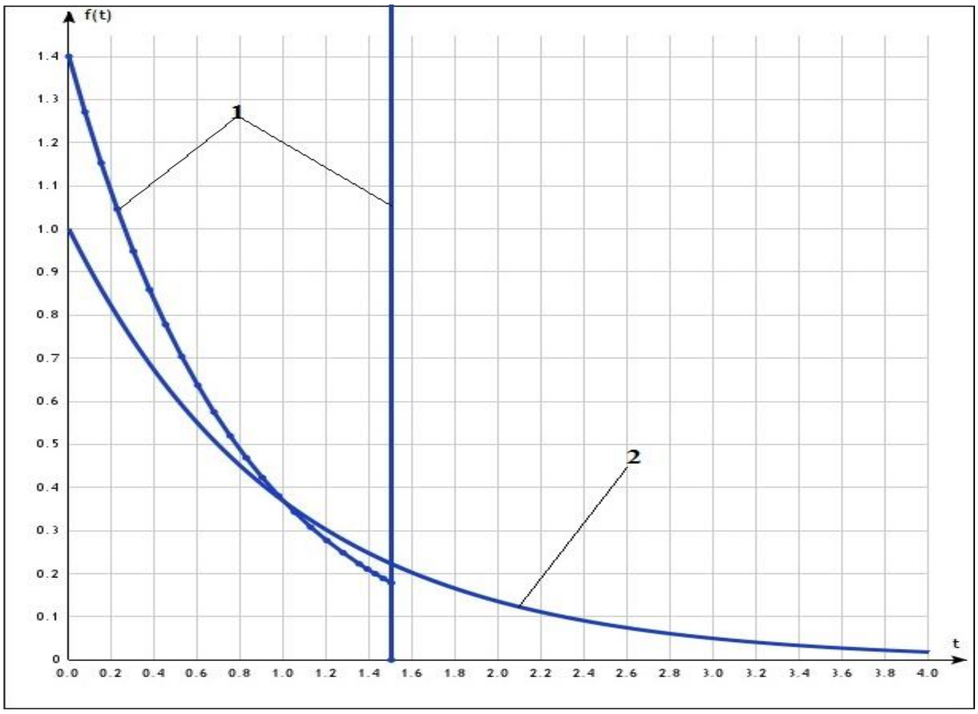

Рис. 4. **Графік функції *f(t)* при *b*=1,5**

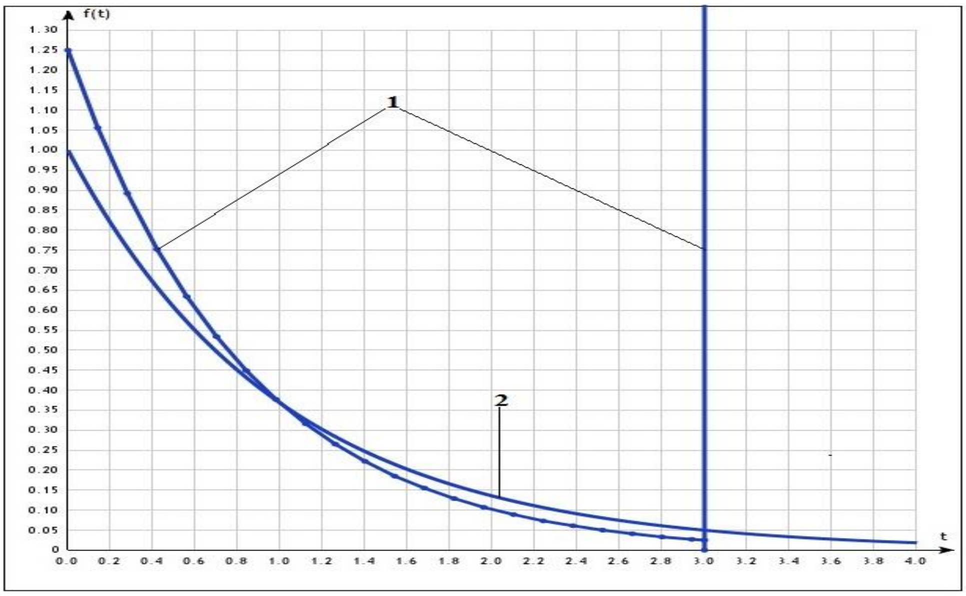

Рис. 5. **Графік функції *f(t)* при *b*=3**

Отже, поведінка графіка функції *f(t),* що графічно ілюструє вирази математичної моделі, як мінімум не суперечить фізичній природі досліджуваного гібридного потоку.

Розглянемо тепер графіки залежностей математичного сподівання *Mc(b)* та середньоквадратичного відхилення *Скв(b)* тривалості інтервалів гібридного потоку (при λ=1) від тривалості інтервалів регулярного потоку *b* (Рис.7).

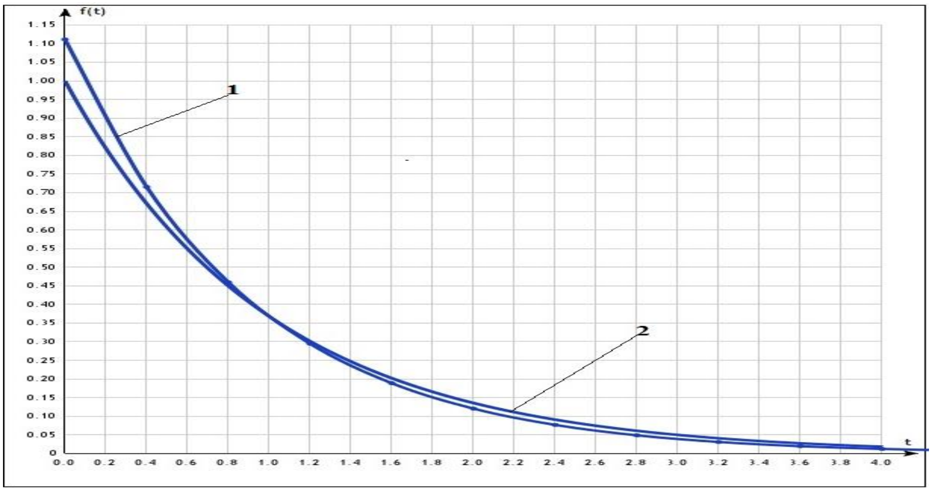

Рис. 6. Графік функції *f(t)* при b=8

Функції *Mc(b)* (залежність 1) та *Скв(b)* (залежність 2) побудовані на основі виразів (6) та (8). Лінія 3 позначає математичне сподівання m_t та середньоквадратичне відхилення σ_t тривалості інтервалів пуассонівського потоку при значенні параметра λ=1. Для пуассонівського потоку ці величини є рівними між собою [3] і не залежать від значення b:

$$m_t = \sigma_t = \frac{1}{\lambda} \quad (23)$$

Розміщення залежностей *Скв(b)* та *Скв(b)* на одній системі координат є припустимим, оскільки вони мають однакову розмірність, і цікавим тому, що зі збільшенням значення b вони монотонно зростаючи мають асимптотично наближатись до лінії 3 при $b\to\infty$.

Дійсно, при $b\to\infty$ гібридний потік буде поступово перероджуватись у потік пуассонівський, для якого математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення визначаються виразом (23).

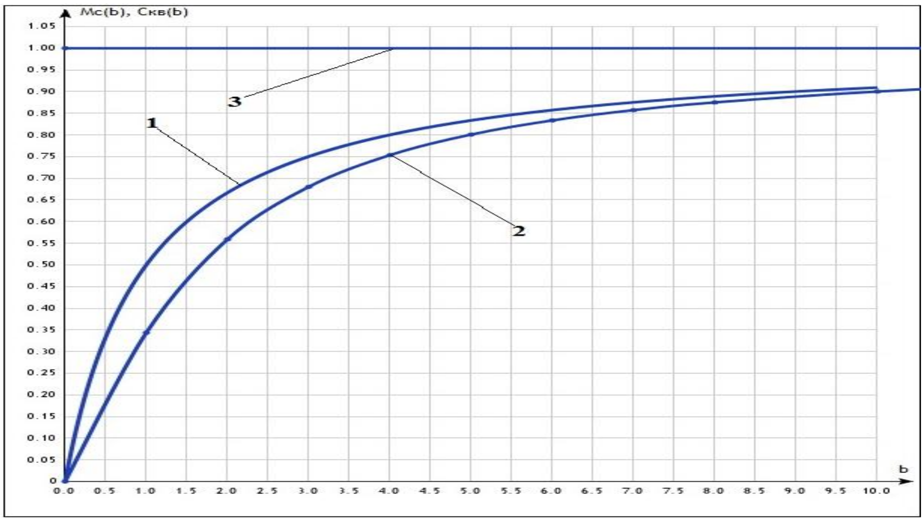

Рис. 7. **Графіки залежностей математичного сподівання та середньоквадратичного відхилення інтервалів гібридного потоку**

Таким чином графіки функцій *Мс(b)* та *Скв(b)* також наочно ілюструють справедливість математичних виразів моделі гібридного потоку і як мінімум не суперечать принципу суперпозиції стосовно пуассонівського та регулярного потоків транзакцій.

Висновки. Результати проведених досліджень математичної моделі суперпозиції пуассоніського та регулярного потоку транзакцій свідчать про відсутність суперечностей і протиріч між отриманими математичними залежностями (4)-(8) і фізичною природою такого гібридного потоку. Проведена верифікація дозволяє висунути припущення про спроможність математичної моделі досліджуваного потоку адекватно відображати процеси суперпозиції пуассонівського та регулярного потоків.

Для висновків про практичну цінність моделі в перспективі планується побудувати на основі виразу (5) ГПВЧ і застосувати його в імітаційній моделі СМО. Результати такого моделювання потрібно потім порівняти з результатами моделювання СМО з двома генераторами відповідно пуассонівського та регулярного потоків. Подібність результатів моделювання зазначених СМО дозволить сформулювати оціночні судження про можливість використання математичної моделі гібридного потоку для досліджень випадкових процесів.

Список використаних джерел

1. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. 2-е изд. – М.: Советское радио, 1971. – 520 с.
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: Пер с ан. А.И.Грушко /Под ред В.И.Неймана. - М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
3. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963. – 236 с.
4. Гнеденко Б.В., Коваленко Н.Н. Введение в теорию массового обслуживания. 2-е изд. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
5. Маєвський О.В. Пуассонівські періодичні кусково стаціонарні потоки та оцінка їх інтенсивності / О.В. Маєвський, О.В. Мацюк, М.В. Приймак, О.М. Приймак // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, 2016. с. 87-99.
6. Сидорова О.И. Пуассоновская модель трафика с бесконечным числом неоднородных источников //Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. с. 47-66.
7. Підгурський О.І. Імітаційне моделювання неоднорідних потоків інформації в управлінських системах / О.І. Підгурський, Л.О. Волонтир // Збірник наукових праць Вінницького національного аграрного університету. Серія економічні науки / Редколегія Калетнік Г.М. та ін. – Вінниця: ВНАУ, 2012. Випуск 4 (70). – Том 2. с. 183-192.
8. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2: Учебное пособие для втузов – 13-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560 с.
9. Абрамчук І.В. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної : навчальний посібник / І.В. Абрамчук, Н.В. Сачанюк-Кавецька, Л.І. Педорченко // – Вінниця: ВНТУ, 2010. – 152 с.

Список використаних джерел у транслітерації/References

1. Saati T.L. Elementyi teorii massovogo obsluzhivaniya i ee prilozheniya. 2-e izd. – M.: Sovetskoe radio, 1971. – 520 s.

2. Kleynrok L. Teoriya massovogo obsluzhivaniya: Per s an. A.I.Grushko /Pod red V.I.Neymana. - M.: Mashinostroenie, 1979. – 432 s.

3. Hinchin A.Ya. Rabotyi po matematicheskoy teorii massovogo obsluzhivaniya – M.: FIZMATLIT, 1963. – 236 s.

4. Gnedenko B.V., Kovalenko N.N. Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya. 2-e izd. – M.: Nauka, 1987. – 336 s.

5. Maievskyi O.V. Puassonivski periodychni kuskovo statsionarni potoky ta otsinka yikh intensyvnosti / O.V. Maievskyi, O.V. Matsiuk, M.V. Pryimak, O.M. Pryimak // Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu imeni V.N.Karazina, 2016. s. 87-99.

6. Sidorova O.I. Puassonovskaya model trafika s beskonechnyim chislom neodnorodnyih istochnikov //Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika. 2015. № 1. s. 47-66.

7. Pidhurskyi O.I. Imitatsiine modeliuvannia neodnoridnykh potokiv informatsii v upravlinskykh systemakh / O.I. Pidhurskyi, L.O. Volontyr // Zbirnyk naukovykh prats Vinnytskoho natsionalnoho ahrarnoho universytetu. Seriia ekonomichni nauky / Redkolehiia Kaletnik H.M. ta in. – Vinnytsia: VNAU, 2012. Vypusk 4 (70). – Tom 2. s. 183-192.

8. Pyskunov N. S. Dyfferentsyalnoe y yntehralnoe yschyslenyia dlia vtuzov, t. 2: Uchebnoe posobye dlia vtuzov – 13-e yzd. – M.: Nauka, Hlavnaia redaktsyia fyzyko-matematycheskoi lyteraturы, 1985. – 560 s.

9. Abramchuk I.V. Vstup do matematychnoho analizu. Dyferentsialne chyslennia funktsii odniiei zminnoi : navchalnyi posibnyk / I.V. Abramchuk, N.V. Sachaniuk-Kavetska, L.I. Pedorchenko // – Vinnytsia: VNTU, 2010. – 152 s.

ANNOTATION
THE STUDY OF SUPERPOSITION OF POISSON AND REGULAR FLOW OF TRANSACTIONS

PIDHURSKYI Oleksandr,
Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor of the Department of Modelling and Information Technologies in Economics,

VOLONTYR Ludmila,
Candidate of Technical Sciences,
Associate Professor of the Department of Modelling and Information Technologies in Economics,
Vinnytsia National Agrarian University,
(Vinnytsia)

Based on mathematical simulation methods the hybrid transaction flow formed by superposition of Poisson and regular flows has been analyzed while being one of the sub-type of heterogeneous flow. The existing approaches to both mathematical modeling of such flows and simulation results analysis have been studied. The hybrid flow mathematical model has been provided in the form of probability distribution functions of duration intervals between transactions, the density function and first two time references of the initial distribution. In order to verify the hybrid flow mathematical model the boundary values of Poisson and regular flows' parameters have been considered for which the analytical model expressions are reduced to the known solutions. For different interval *values of the regular flow both the distribution function and density function graphs have been plotted and analyzed as well as the characteristic curves of mathematical expectation, variance and standard deviation have been studied.*

Key words: transaction flows, hybrid flows, mathematical models, simulation modeling, random number generator, probability distribution, verification of models.

Fig. 7. Lit. 9.

АННОТАЦИЯ
ИССЛЕДОВАНИЕ СУПЕРПОЗИЦИИ ПУАССОНОВСКОГО И РЕГУЛЯРНОГО ПОТОКОВ ТРАНЗАКЦИЙ

ПОДГУРСКИЙ Александр Игоревич,
кандидат технических наук,
доцент кафедры моделирования и
информационных технологий в экономике,
Винницкий национальный аграрный университет ,

ВОЛОНТЫРЬ Людмила Алексеевна,
кандидат технических наук,
доцент кафедры моделирования и
информационных технологий в экономике,
Винницкий национальный аграрный университет
(г. Винница)

В работе на основе методов математического моделирования исследуется гибридный поток транзакций, который образуется путем суперпозиции пуассоновского и регулярного потоков и является одной из разновидностей неоднородных потоков. Исследованы существующие подходы к математическому моделированию неоднородных потоков и результаты их моделирования. Математическая модель гибридного потока представлена в виде функции распределения вероятностей длительности интервалов времени между транзакциями, функции плотности распределения и первых двух начальных моментов распределения. С целью верификации математической модели гибридного потока были рассмотрены предельные значения параметров пуассоновского и регулярного потоков, при которых аналитические выражения модели сводятся к известным решениям. Для разных значений интервалов регулярного потока были построены и проанализированы графики функции распределения и функции плотности распределения, а также исследованы графические зависимости математического ожидания, дисперсии и среднеквадратичного отклонения.

Ключевые слова: потоки транзакций, гибридные потоки, математические модели, имитационное моделирование, генератор псевдослучайных чисел, законы распределения вероятностей, верификация моделей.

Рис. 7. Лит. 9.

Інформація про авторів

ПІДГУРСЬКИЙ Олександр Ігорович – кандидат технічних наук, доцент кафедри моделювання та інформаційних технологій в економіці, Вінницький національний аграрний університет (e-mail: pidgursk@mbox.vn.ua).

ВОЛОНТИР Людмила Олексіївна – кандидат технічних наук, доцент кафедри моделювання та інформаційних технологій в економіці, Вінницький національний аграрний університет (e-mail: milavolontyr@yandex.ua).

PIDHURSKYI Oleksandr – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Modelling and Information Technologies in Economics, Vinnytsia National Agrarian University (e-mail: pidgursk@mbox.vn.ua).
VOLONTYR Ludmila – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Modelling and Information Technologies in Economics, Vinnytsia National Agrarian University (e-mail: milavolontyr@yandex.ua).

ПОДГУРСКИЙ Александр Игоревич – кандидат технических наук, доцент кафедры моделирования и информационных технологий в экономике, Винницкий национальный аграрный университет (e-mail: pidgursk@mbox.vn.ua).
ВОЛОНТЫРЬ Людмила Алексеевна – кандидат технических наук, доцент кафедры моделирования и информационных технологий в экономике, Винницкий национальный аграрный университет (e-mail: milavolontyr@yandex.ua).