

Акустические приборы и системы

УДК 534.143 – 16:534.232.082.74

А.Н. Михеева, О.Н. Петрищев, д-р.тех.наук

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,
ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

Исследование электромагнитного способа возбуждения объемных ультразвуковых волн в металлическом полупространстве. Часть 2. Постановка задач определения кинематических характеристик не взаимодействующих продольных и поперечных (сдвиговых) ультразвуковых волн, которые возбуждаются электромагнитным способом

Даны формулировки граничных задач динамической теории упругости, решения которых определяют кинематические и динамические характеристики не взаимодействующих продольных и поперечных волн, которые возбуждаются системой поверхностных и объемных сил. Приводится методика определения потенциалов поля сил, которые заданы в объеме упругого полупространства. Выполнены количественные оценки скалярного и векторного потенциалов поля сил Джоуля, которые создаются в аксиально намагниченном токопроводящем ферромагнетике переменным магнитным полем кольцевого индуктора. Показано, скалярный и векторный потенциалы поля смещений материальных частиц, которые формируются продольными и сдвиговыми волнами, следует искать в виде сумм рядов по четным и нечетным сферическим гармоникам соответственно. Библ. 12, рис. 5, табл. 1.

Ключевые слова: продольная волна, сдвиговая волна, полупространство, магнитное поле, силовое поле.

Введение

В работе [8] были опубликованы результаты расчета компонентов вектора напряженности переменного осесимметричного магнитного поля $\mathbf{H}^*(\rho, z)e^{i\omega t}$, которое формируется в объеме аксиально намагниченного, т. е. анизотропного по магнитной проницаемости, токопроводящего ферромагнетика кольцевой катушкой конечных размеров. Катушка располагается в вакууме над поверхностью металла. По найденным компонентам вектора напряженности $\mathbf{H}^*(\rho, z)e^{i\omega t}$ (ρ, ϕ, z - координаты цилиндрической системы координат, ось z которой перпендикулярна по-

верхности металлического образца; $i = \sqrt{-1}$; ω - круговая частота смены знака электрического тока в катушке; t - время) переменного магнитного поля были определены поверхностные и объемные плотности пондеромоторных сил электромагнитного поля. Эти силы обеспечивают так называемый вихретоковый механизм образования динамических деформаций в объеме токопроводящего металла. Помимо этого в намагниченных ферромагнетиках возникают динамические деформации, которые обусловлены прямым магнитострикционным эффектом или эффектом Джоуля. Этим деформациям можно поставить в прямое соответствие магнитострикционные силы или силы Джоуля с поверхностной плотностью $\sigma_{z\beta}^D(\rho)e^{i\omega t}$ ($\beta = \rho, z$) и объемной $\mathbf{f}^D(\rho, z)e^{i\omega t}$ плотностями.

В работе [8] показано, что при правильно выбранной величине постоянного поля подмагничивания силы Джоуля практически на четыре порядка превосходят пондеромоторные силы электромагнитного поля. Говоря иными словами, прямой магнитострикционный эффекта в этих условиях становится доминирующим механизмом формирования динамических деформаций.

Совокупность поверхностных $\sigma_{z\beta}^D(\rho)e^{i\omega t}$ и объемных $\mathbf{f}^D(\rho, z)e^{i\omega t}$ нагрузок возбуждает в массивном образце ферромагнитного металла, который в определенном диапазоне частот можно рассматривать как упругое полупространство, два типа упругих волн. Это взаимодействующие и не взаимодействующие на границе упругого полупространства продольные и поперечные (сдвиговые) волны.

Взаимодействующие продольные и сдвиговые волны обмениваются энергией и поляризацией на поверхности $z=0$ упругого полупространства и образуют поверхностную волну Рэлея, которая распространяется в радиальных направлениях и существует в тонком, приповерхностном слое ферромагнетика. Не взаимодействующие продольные и поперечные волны уносят энергию вглубь полупространства.

Амплитудные множители волны Рэлея и не взаимодействующих продольной и поперечной волн определяются в результате решение неоднородной динамической задачи теории упругости, которая по своему физическому содержанию совпадает со знаменитой задачей Лэмба [2]. Необходимо отметить, что основное содержание задачи Лэмба, которая впервые была сформулирована в 1904 г. Горацио Лэмбом, составляет определение долевого участия поверхностных, продольных и сдвиговых волн в процессе выноса энергии из области существования внешних сил. Даже в случае существования только лишь поверхностных сил (именно в этой постановке формулируется классическая задача Лэмба) возникают весьма существенные математические проблемы на этапе обращения интегральных преобразований. По этой причине дискуссии относительно методов и результатов решения задачи Лэмба продолжают и по сей день (см., например, [3]). Распределение энергии между различными типами упругих волн является чрезвычайно важным аспектом при решении практических задач сейсмологии [1]. Разработчиков ультразвуковых приборов в большей степени интересует влияние размеров и формы источника на амплитуды возбуждаемых упругих волн на различных частотах. При этом энергетические соотношения между различными типами ультразвуковых волн имеют второстепенное значение.

Принимая во внимание это обстоятельство, можно отказаться от решения задачи Лэмба в её стандартной (классической) постановке и рассмотреть по отдельности два её фрагмента, т. е. задачу о возбуждении поверхностных волн и задачу о возбуждении не взаимодействующих продольных и поперечных волн. При этом, естественно, исключается сама возможность определения относительной энергоёмкости различных типов волн, но сохраняется возможность исследования частотно зависимых эффектов. Говоря иными словами, предлагаемый подход позволяет получить решения с точностью до постоянного множителя в энергетическом смысле. В работе [4] именно в этом при-

ближении определены амплитудные множители радиально распространяющихся волн Рэлея, которые возбуждаются поверхностными и объёмными нагрузками, которые заданы в ограниченной области упругого полупространства.

Насколько известно авторам, задача о возбуждении не взаимодействующих продольных и сдвиговых волн, силами, которые заданы на поверхности и в объёме некоторой ограниченной области полупространства, не обсуждалась в открытой печати.

Постановке этой задачи посвящается данная работа.

1. Формулировка граничной задачи для определения амплитудных множителей не взаимодействующих продольных и сдвиговых гармонических волн

Предположим, что на поверхности упругого полупространства, в некоторой, ограниченной по размерам, площадке S_H , действуют гармонически изменяющиеся во времени по закону $e^{i\omega t}$ поверхностные нагрузки с амплитудой $n_j \sigma_{jk}^*(x_k)$, где n_j - j -ый компонент вектора единичной нормали к поверхности S_H в точке с координатами x_k ($k=1,2,3$), определенными в правосторонней декартовой системе координат $\{x_1, x_2, x_3\}$; $\sigma_{jk}^*(x_k)$ ($j,k=1,2,3$) - амплитудное значение компонента тензора поверхностной плотности внешних сил. Помимо этого, будем полагать, что в некотором, ограниченном объёме V_H , который сверху накрывается поверхностью S_H , действуют гармонически изменяющиеся во времени внешние силы, распределённые по этому объёму с плотностью $f^*(x_k) e^{i\omega t}$, где $f^*(x_k)$ - амплитудное значение вектора объёмной плотности внешних сил.

Указанная совокупность внешних сил порождает динамические деформации упругого полупространства, которые можно описать с помощью вектора смещения $u(x_k) e^{i\omega t}$ материальных частиц упругой среды.

Амплитудные значения $u(x_k)$ вектора смещения в объёме полупространства удовлетворяют второму закону Ньютона в дифференциальной форме или, что то же самое, векторному уравнению установившихся гармонических колебаний материальных части изотропной упругой среды

$$(\lambda + 2G)\text{grad div } \mathbf{u}(x_k) - \text{Grotrot } \mathbf{u}(x_k) + \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}(x_k) - \mathbf{f}^*(x_k) = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (1)$$

где λ, G и ρ_0 - модули упругости (константы Ламе) и плотность изотропного твердого тела; V - объем полупространства.

В результате смещений материальных частиц из положения равновесия в объеме упругого твердого тела возникают упругие деформации с амплитудами $\varepsilon_{jk}(x_k) = [\partial u_j(x_k)/\partial x_k + [\partial u_k(x_k)/\partial x_j]]/2$ и соответствующие им упругие напряжения, которые определяются обобщенным законом Гука, т. е. $\sigma_{jk}(x_k) = 2G\varepsilon_{jk}(x_k) + \delta_{jk}\lambda \text{div } \mathbf{u}(x_k)$, где δ_{jk} - символ Кронекера, равный единице при $j=k$, и нулю при $j \neq k$.

Упругие напряжения $\sigma_{jk}(x_k)$ на поверхности S твердого тела должны удовлетворять третьему закону Ньютона, т. е.

$$n_j [\sigma_{jk}(x_k) - \sigma_{jk}^*(x_k)] = 0 \quad \forall x_k \in S. \quad (2)$$

В соответствии с теоремой Гельмгольца [7] любое векторное поле можно представить в виде суперпозиции потенциальной (дилатационной) и вихревой составляющих. Применительно к векторам $\mathbf{u}(x_k)$ и $\mathbf{f}^*(x_k)$ представление Гельмгольца записывается следующим образом

$$\mathbf{u}(x_k) = \text{grad } \phi(x_k) + \text{rot } \boldsymbol{\psi}(x_k), \quad (3)$$

$$\mathbf{f}^*(x_k) = \text{grad } \Phi^*(x_k) + \text{rot } \boldsymbol{\Psi}^*(x_k), \quad (4)$$

где $\phi(x_k)$ и $\Phi^*(x_k)$ - амплитуды гармонически изменяющихся во времени скалярных потенциалов поля смещений и силового поля соответственно; $\boldsymbol{\psi}(x_k)$ и $\boldsymbol{\Psi}^*(x_k)$ - амплитуды векторных потенциалов.

Амплитудные значения векторных потенциалов поля упругих смещений и поля внешних сил должны в обязательном порядке удовлетворять следующим условиям

$$\text{div } \boldsymbol{\psi}(x_k) = 0, \quad \text{div } \boldsymbol{\Psi}^*(x_k) = 0. \quad (5)$$

Полагая потенциалы $\Phi^*(x_k)$ и $\boldsymbol{\Psi}^*(x_k)$ известными, подставим представления Гельмгольца (3) и (4) в уравнение (1)

$$(\lambda + 2G)\text{grad div grad } \phi(x_k) - \text{Grotrotrot } \boldsymbol{\psi}(x_k) + \rho_0 \omega^2 [\text{grad } \phi(x_k) + \text{rot } \boldsymbol{\psi}(x_k)] - [\text{grad } \Phi^*(x_k) - \text{rot } \boldsymbol{\Psi}^*(x_k)] = 0 \quad \forall x_k \in V \quad (6)$$

Определяя дивергенцию от левой части выражения (6) можем записать

$$\nabla^2 \Xi_\ell(x_k) = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (7)$$

где

$\Xi_\ell(x_k) = (\lambda + 2G)\nabla^2 \phi(x_k) + \rho_0 \omega^2 \phi(x_k) - \Phi^*(x_k)$ - скалярная функция координат точки наблюдения за характеристиками поля.

Определяя ротор от левой части выражения (6), получаем

$$\text{rot rot } \Xi^s(x_k) = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (8)$$

где $\Xi^s(x_k) = -\text{Grotrot } \boldsymbol{\psi}(x_k) + \rho_0 \omega^2 \boldsymbol{\psi}(x_k) - \boldsymbol{\Psi}^*(x_k)$ - векторная функция координат точки наблюдения.

Так как условие (5) выполняется по определению, то $\text{div } \Xi^s(x_k) = 0 \quad \forall x_k \in V$. Поскольку для любого векторного поля, в том числе и для функции $\Xi^s(x_k)$, справедливо определение $\nabla^2 \Xi^s(x_k) = \text{grad div } \Xi^s(x_k) - \text{rot rot } \Xi^s(x_k)$, постольку уравнение (8) можно записать в следующем виде

$$\nabla^2 \Xi^s(x_k) = 0 \quad \forall x_k \in V. \quad (9)$$

Уравнения (7) и (9) являются уравнениями Лапласа для функций $\Xi_\ell(x_k)$ и $\Xi^s(x_k)$. В теории функций комплексного переменного [11] доказывается, что решениями уравнения Лапласа являются аналитические функции. Известно [11], что аналитические функции в области своего существования не превышают значений, которые заданы на границе области существования. В случае, когда граница области существования бесконечно удалена (упругое пространство, полупространство, упругий слой, бесконечный стержень) должны выполняться условия физической реализуемости источника упругих возмущений, т. е.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R f_m^*(x_k), R \frac{\partial f_m^*(x_k)}{\partial x_j} \right\} = 0, \quad m, j = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где R - расстояние от источника внешних сил. Из предельного условия (10) следует, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R\phi(x_k), R \frac{\partial \phi(x_k)}{\partial x_j} \right\} = 0, \quad j=1,2,3, \quad (11)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R\psi_m(x_k), R \frac{\partial \psi_m(x_k)}{\partial x_j} \right\} = 0, \quad j=1,2,3. \quad (12)$$

Из предельных условий (10) – (12) следует, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \{ R\Xi_\ell(x_k) \} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \{ R\Xi^s(x_k) \} = 0. \quad (13)$$

Таким образом, из условий физической реализуемости источника упругих возмущений (10) и соответствующих этому условию предельных условий (13), следует, что на бесконечно удаленной границе области существования аналитические функции $\Xi_\ell(x_k)$ и $\Xi^s(x_k)$ равны нулю. Следовательно, должны выполняться условия

$$\Xi_\ell(x_k) = 0 \forall x_k \in V, \quad \Xi^s(x_k) = 0 \forall x_k \in V. \quad (14)$$

Из условий (14) следует, что амплитуды скалярного и векторного потенциалов поля смещений удовлетворяют уравнениям Гельмгольца следующего вида

$$\nabla^2 \phi(x_k) + k_\ell^2 \phi(x_k) = \frac{\Phi^*(x_k)}{\lambda + 2G}, \quad (15)$$

$$\nabla^2 \psi(x_k) + k_s^2 \psi(x_k) = \frac{\Psi^*(x_k)}{G}, \quad (16)$$

где $k_\ell^2 = \omega^2 \rho_0 / (\lambda + 2G)$ и $k_s^2 = \omega^2 \rho_0 / G$ - квадраты волновых чисел продольной и поперечной не взаимодействующих волн.

Рассмотрим процедуру определения потенциалов силового поля.

Предположим, что амплитудные значения вектора $\mathbf{f}^*(x_k)$ объемной плотности внешних сил известны. Тогда, вычисляя дивергенцию от левой и правой частей представления Гельмгольца (4), получаем уравнение Пуассона следующего вида

$$\nabla^2 \Phi^*(x_k) = \text{div } \mathbf{f}^*(x_k), \quad (17)$$

где права часть, т. е. $\text{div } \mathbf{f}^*(x_k)$, известна по определению.

Определяя ротор от обеих частей представления Гельмгольца (4), получаем уравнение второго порядка следующего вида

$$\text{rot rot } \Psi^*(x_k) = \text{rot } \mathbf{f}^*(x_k). \quad (18)$$

Таким образом, решая уравнения (17) и (18), можно определить скалярный и векторный потенциалы силового поля по известным значениям дивергенции и ротора вектора объемной плотности сил.

Очевидно, что вектор смещения $\mathbf{u}(x_k)$ материальных частиц упругого полупространства в поле не взаимодействующих продольных и поперечных (сдвиговых) волн можно представить в виде суперпозиции вектора смещений $\mathbf{u}^\ell(x_k)$, который формируется продольной волной, и вектора смещений $\mathbf{u}^s(x_k)$, образованных волной сдвига, т. е.

$$\mathbf{u}(x_k) = \mathbf{u}^\ell(x_k) + \mathbf{u}^s(x_k). \quad (19)$$

Известно, что деформации чистого сдвига [10] происходят без изменения объема твердого тела, т. е. должно выполняться условие $\text{div } \mathbf{u}^s(x_k) = 0$. Подставляя в левую часть разложения (19) представление Гельмгольца (3) и вычисляя дивергенцию от полученного результата, приходим к выводу, что $\text{div grad } \phi(x_k) = \text{div } \mathbf{u}^\ell(x_k)$. Из последнего равенства следует, что

$$\mathbf{u}^\ell(x_k) = \text{grad } \phi(x_k). \quad (20)$$

Из определения (20), представления Гельмгольца (3) и разложения (19) следует, что

$$\mathbf{u}^s(x_k) = \text{rot } \psi(x_k). \quad (21)$$

Таким образом, решение уравнения (15) определяет кинематические характеристики продольной не взаимодействующей волны, а решение уравнения (16) – кинематические характеристики волны сдвига. Именно по этой причине волновые числа k_ℓ и k_s называют волновыми числами продольной и сдвиговой волны соответственно.

Очевидно, что разложению (19) должны соответствовать суперпозиции деформаций и упругих напряжений, т. е.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jk}(x_k) &= \varepsilon_{jk}^\ell(x_k) + \varepsilon_{jk}^s(x_k), \\ \sigma_{jk}(x_k) &= \sigma_{jk}^\ell(x_k) + \sigma_{jk}^s(x_k), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\varepsilon_{jk}^\ell(x_k)$, $\sigma_{jk}^\ell(x_k)$ и $\varepsilon_{jk}^s(x_k)$, $\sigma_{jk}^s(x_k)$ - деформации и упругие напряжения формируемые продольными (ℓ) и сдвиговыми (s) волнами.

Результирующие напряжения $\sigma_{jk}(x_k)$ должны удовлетворять третьему закону Ньюто-

на на поверхности упругого полупространства, т. е.

$$n_j [\sigma_{jk}^l(x_k) + \sigma_{jk}^s(x_k) - \sigma_{jk}^*(x_k)] = 0 \quad \forall x_k \in S. \quad (23)$$

Таким образом, кинематические характеристики продольных волн определяются в результате решения граничной задачи (15), (23), а характеристики волн сдвига определяются общим решением граничной задачи (16), (23) которое удовлетворяет условию (5).

Естественно, что физически содержательные решения сформулированных выше граничных задач возможны при условии физического содержательного определения потенциалов силового поля и компонентов тензора $\sigma_{jk}^*(x_k)$ поверхностной плотности внешних сил. Как уже было сказано выше, величины $\sigma_{jk}^*(x_k)$ были определены в работе [8]. Определим скалярный и векторный потенциалы поля объемной плотности сил Джоуля, которые формируются в объеме токопроводящего ферромагнетика переменным магнитным полем кольцевой катушки.

2. Расчет скалярного и векторного потенциалов осесимметричного силового поля, созданного физически реализуемым источником

Математическое описание продольных и сдвиговых волн, которые возбуждаются с поверхности упругого полупространства, удобно осуществлять в сферической системе координат $\{r, \phi, \vartheta\}$, которая связана с правосторонней декартовой системой координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ так, как это показано на рис. 1. По этой причине скалярный и векторный потенциалы силового поля будем определять также в сферической системе координат.

В работе [8] было показано, что кольцевой индуктор (рис. 1) генерирует переменное магнитное поле, заметные уровни напряженности которого локализованы на поверхности токопроводящего ферромагнетика в круге радиуса R_∞ . Непосредственными вычислениями пространственного распределения компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля и компонентов вектора объемной плотности сил Джоуля в работе [8] было установлено, что $R_\infty = (2 \div 3)R_2$, где R_2 - максимальный радиус укладки витков кольцевого индуктора (рис. 1).

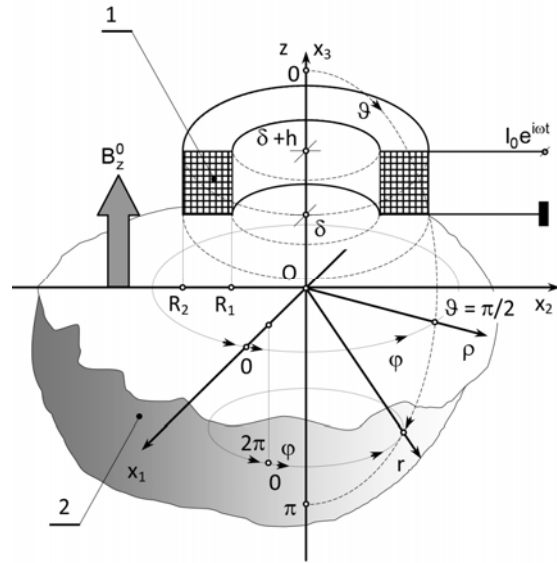


Рис. 1. Расчетная схема преобразователя электромагнитного типа с кольцевым индуктором

При расчете потенциалов поля сил Джоуля будем полагать, что компоненты вектора объемной плотности сил Джоуля локализованы в полусфере ($r \leq R_\infty; 0 \leq \phi \leq 2\pi; \pi/2 \leq \vartheta \leq \pi$). За пределами этой области силовое поле отсутствует.

Так как кольцевой индуктор создает осесимметричные, т. е. т. е. не зависящие от азимутального угла ϕ , магнитные и силовые поля, то амплитуда вектора объемной плотности сил Джоуля $\mathbf{f}^D(r, \vartheta)$ полностью определяется радиальным $f_r^D(r, \vartheta)$ и полярным $f_\vartheta^D(r, \vartheta)$ компонентами.

Принимая во внимание осевую симметрию, уравнение (17), определяющее скалярный потенциал $\Phi^*(r, \vartheta)$ силового поля, необходимо записать в следующем виде

$$\frac{\partial^2 \Phi^*(r, \vartheta)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi^*(r, \vartheta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2 \Phi^*(r, \vartheta)}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg } \vartheta \frac{\partial \Phi^*(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right] = D^*(r, \vartheta) \quad (24)$$

$$D^*(r, \vartheta) = \text{div } \mathbf{f}^D(r, \vartheta) = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [r^2 f_r^D(r, \vartheta)] \right\} +$$

где

$$+ \frac{1}{r \sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} [\sin \vartheta f_\vartheta^D(r, \vartheta)] \right\}$$

известная по смыслу постановки задачи функция переменных r и ϑ .

Следуя методу разделения переменных [6], представим искомое решение уравнения (24) в следующем виде

$$\Phi^*(r, \vartheta) = R^*(r) T^*(\vartheta), \quad (25)$$

где $R^*(r)$ - функция радиальной переменной; $T^*(\vartheta)$ - функция полярного угла ϑ .

Подставляя выражение (25) в уравнение (24), получаем следующую аналитическую конструкцию

$$T^*(\vartheta) \Xi_r(r) + \frac{R^*(r)}{r^2} \Xi_\vartheta(\vartheta) = D^*(r, \vartheta), \quad (26)$$

$$\text{где } \Xi_r(r) = \frac{\partial^2 R^*(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R^*(r)}{\partial r};$$

$$\Xi_\vartheta(\vartheta) = \frac{\partial^2 T^*(\vartheta)}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg } \vartheta \frac{\partial T^*(\vartheta)}{\partial \vartheta}.$$

Рассмотрим сомножитель $\Xi_\vartheta(\vartheta)$.

Переходя к новой переменной $\xi = \cos \vartheta$ его можно записать в следующем виде

$$\Xi_\vartheta(\xi) = -(\xi^2 - 1) \frac{\partial^2 T^*(\xi)}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial T^*(\xi)}{\partial \xi}.$$

В определении сомножителя $\Xi_\vartheta(\xi)$ прибавим и вычтем произведение $v(v+1)T^*(\xi)$, где $v=1, 2, \dots$ - элемент ряда натуральных чисел. После этой операции последнее выражение принимает следующий вид

$$\Xi_\vartheta(\xi) = - \left[(\xi^2 - 1) \frac{\partial^2 T^*(\xi)}{\partial \xi^2} + 2\xi \frac{\partial T^*(\xi)}{\partial \xi} - v(v+1)T^*(\xi) \right] - v(v+1)T^*(\xi). \quad (27)$$

Если предположить, что

$$T^*(\xi) \equiv T_v^*(\xi) = P_v(\xi), \quad (28)$$

где $P_v(\xi)$ - функция Лежандра первого рода степени v [12], то квадратная скобка (уравнение Лежандра [12]) в соотношении (27) обращается в нуль. При этом сомножитель $\Xi_\vartheta(\xi)$ принимает следующий вид

$$\Xi_\vartheta(\xi) \equiv \Xi_\vartheta^{(v)}(\xi) = -v(v+1)P_v(\xi). \quad (29)$$

Очевидно, что разложение (25) также необходимо переписать в виде

$$\Phi_v^*(r, \vartheta) = R_v^*(r) T_v^*(\xi). \quad (30)$$

Таким образом, уравнение (26) принимает следующий вид

$$T_v^*(\xi) \left[\frac{\partial^2 R_v^*(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R_v^*(r)}{\partial r} - \frac{v(v+1)}{r^2} R_v^*(r) \right] = D^*(r, \vartheta). \quad (31)$$

Так как исходное уравнение (24) и следующее из него уравнение (31) являются линейными дифференциальными уравнениями, то сумма частных решений (30) также будет решением уравнений (24) и (31). Поэтому правомерны следующие записи

$$\Phi^*(r, \vartheta) = \sum_{v=1}^{\infty} R_v^*(r) P_v(\xi), \quad (32)$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} P_v(\xi) \left[\frac{\partial^2 R_v^*(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R_v^*(r)}{\partial r} - \frac{v(v+1)}{r^2} R_v^*(r) \right] = D^*(r, \vartheta). \quad (33)$$

Умножим левую и правую части уравнения (33) на функцию Лежандра $P_\nu(\xi)$, и проинтегрируем полученный результат по переменной ξ в пределах от минус единицы до плюс единицы. Поскольку функции Лежандра на отрезке $-1 \leq \xi \leq 1$ образуют систему ортогональных функций, т. е.

$$\int_{-1}^1 P_\mu(\xi) P_\nu(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & \forall \mu \neq \nu, \\ 2/(2\nu+1) & \text{при } \mu = \nu, \end{cases}$$

постольку уравнение (33) после проделанных операций принимает следующий вид

$$r^2 \frac{\partial^2 R_v^*(r)}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial R_v^*(r)}{\partial r} - v(v+1)R_v^*(r) = r^2 D_v^*(r), \quad (34)$$

где

$$D_v^*(r) = (v+1/2) \int_{-1}^1 D^*(r, \vartheta) P_v(\xi) d\xi. \quad (35)$$

В уравнении (34) введем безразмерную переменную $x_\ell = k_\ell r$, где k_ℓ - волновое число продольной волны. Подстановкой

$$R_v^*(x_\ell) = x_\ell^{-1/2} U_v(x_\ell) \quad (36)$$

уравнение (34) приводится к неоднородному уравнению Эйлера [5] следующего вида

$$x_\ell^2 \frac{\partial^2 U_v(x_\ell)}{\partial x_\ell^2} + x_\ell \frac{\partial U_v(x_\ell)}{\partial x_\ell} - (v+1/2)^2 U_v(x_\ell) = \frac{x_\ell^{5/2}}{k_\ell^2} D_v^*(x_\ell/k_\ell). \quad (37)$$

Решение уравнения (37) будем искать по стандартной процедуре Лагранжа, т. е. в следующем виде

$$U_v(x_\ell) = [A_v + A_v(x_\ell)]x_\ell^{(v+1/2)} + B_v(x_\ell)x_\ell^{-(v+1/2)}, \quad (38)$$

где A_v - подлежащая определению константа; $A_v(x_\ell)$ и $B_v(x_\ell)$ - варьируемые константы, удовлетворяющие условию

$$A'_v(x_\ell)x_\ell^{(v+1/2)} + B'_v(x_\ell)x_\ell^{-(v+1/2)} = 0, \quad (39)$$

где штрихи означают первую производную по безразмерной переменной x_ℓ .

Подставляя предполагаемый вид решения (38) в уравнение (37) и выполняя дифференцирование с учетом условия (39), получаем следующий результат

$$A'_v(x_\ell)x_\ell^{(v+3/2)} - B'_v(x_\ell)x_\ell^{-(v-1/2)} = \frac{x_\ell^{5/2}}{k_\ell^2(v+1/2)} D_v^*(x_\ell/k_\ell). \quad (40)$$

Условие (39) и соотношение (40) образуют алгебраическую систему уравнений, из которой находятся производные варьируемых констант, а затем, после интегрирования, и сами константы $A_v(x_\ell)$ и $B_v(x_\ell)$:

$$A_v(x_\ell) = \frac{1}{k_\ell^2(2v+1)} \int_0^{x_\ell} z^{(1-v)} D_v^*(z/k_\ell) dz,$$

$$B_v(x_\ell) = -\frac{1}{k_\ell^2(2v+1)} \int_0^{x_\ell} z^{(2+v)} D_v^*(z/k_\ell) dz. \quad (41)$$

Константа A_v определяется из условия

$$\lim_{x_\ell \rightarrow \infty} U_v(x_\ell) = 0, \quad (42)$$

которое следует из условия (10) физической реализуемости источника силового поля. Для того, чтобы условие (42) выполнялось, необходимо и достаточно положить, что

$$A_v = -A_v^\infty = -\frac{1}{k_\ell^2(2v+1)} \int_0^{k_\ell R_\infty} z^{(1-v)} D_v^*(z/k_\ell) dz. \quad (43)$$

Таким образом, искомый скалярный потенциал осесимметричного силового поля определяется следующим выражением

$$\Phi^*(r, \vartheta) = \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ [-A_v^\infty + A_v(x_\ell)] x_\ell^v + B_v(x_\ell) x_\ell^{-(v+1)} \right\} P_v(\xi). \quad (44)$$

Теперь рассмотрим процедуру определения векторного потенциала силового поля.

В случае осевой симметрии силового поля ротор вектора объемной плотности сил Джоуля имеет только лишь один азимутальный компонент

$$K_\phi^*(r, \vartheta) = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [r f_\vartheta^D(r, \vartheta)] - \frac{\partial f_r^D(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right\}, \quad (45)$$

который формирует правую часть уравнения для определения азимутального компонента $\Psi_\phi^*(r, \vartheta)$ векторного потенциала $\Psi^*(r, \vartheta)$. При этом компоненты $\Psi_r^*(r, \vartheta) = \Psi_\vartheta^*(r, \vartheta) = 0$.

Уравнение для определения компонента $\Psi_\phi^*(r, \vartheta)$ имеет следующий вид

$$\frac{\partial^2 \Psi_\phi^*(r, \vartheta)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi_\phi^*(r, \vartheta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2 \Psi_\phi^*(r, \vartheta)}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg} \vartheta \frac{\partial \Psi_\phi^*(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\Psi_\phi^*(r, \vartheta)}{\sin^2 \vartheta} \right] = -K_\phi^*(r, \vartheta), \quad (46)$$

Действуя по той же схеме, что и при вычислении скалярного потенциала $\Phi^*(r, \vartheta)$, приходим к следующему промежуточному результату

$$\sum_{v=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 R_\phi^{(v)}(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R_\phi^{(v)}(r)}{\partial r} - \frac{v(v+1)}{r^2} R_\phi^{(v)}(r) \right] \times \left| \xi^2 - 1 \right|^{1/2} \frac{\partial P_v(\xi)}{\partial \xi} = -K_\phi^*(r, \vartheta)$$

где, по-прежнему, $\xi = \cos \vartheta$ и $P_v(\xi)$ - функция Лежандра первого рода. При этом

$$\Psi_\phi^*(r, \vartheta) = \sum_{v=1}^{\infty} R_\phi^{(v)}(r) \left| \xi^2 - 1 \right|^{1/2} \frac{\partial P_v(\xi)}{\partial \xi}. \quad (47)$$

Поскольку функции Лежандра относятся к классическим ортогональным полиномам [9], постольку на отрезке $-1 \leq \xi \leq 1$ систему ортогональных функций образуют не только функции Лежандра $P_v(\xi)$, но и их первые производные. Прямыми вычислениями можно показать, что

$$\int_{-1}^1 (\xi^2 - 1) \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial P_\mu(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \begin{cases} 0 \forall \nu \neq \mu, \\ \frac{2\nu(\nu+1)}{2\nu+1} \text{ при } \nu = \mu. \end{cases} \quad (49)$$

Воспользовавшись соотношением ортогональности (49), уравнение (47) можно записать в следующем виде

$$x_s^2 \frac{\partial^2 R_\phi^{(\nu)}(x_s)}{\partial x_s^2} + 2x_s \frac{\partial R_\phi^{(\nu)}(x_s)}{\partial x_s} - \nu(\nu+1) R_\phi^{(\nu)}(x_s) = -\frac{x_s^2}{k_s^2} K_\phi^{(\nu)}(x_s/k_s) \quad (50)$$

где $x_s = k_s r$ - безразмерная радиальная координата; k_s - волновое число поперечных (сдвиговых) волн;

$$K_\phi^{(\nu)}(x_s/k_s) = \frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)} \int_{-1}^1 K_\phi^*(x_s/k_s, \vartheta) \left| \xi^2 - 1 \right|^{1/2} \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \xi} d\xi \quad (51)$$

Уравнение (50) имеет конструкцию идентичную конструкции уравнения (34), поэтому представляется возможность сразу записать общее решение для расчета азимутального компонента векторного потенциала $\Psi_\phi^*(x_s/k_s, \vartheta)$, которое удовлетворяет предельному условию

$$\lim_{x_s \rightarrow \infty} \Psi_\phi^*(x_s/k_s, \vartheta) = 0,$$

в следующем виде

$$\Psi_\phi^*(x_s/k_s, \vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \vartheta \left\{ \left[-C_\nu^\infty + C_\nu(x_s) \right] x_s^\nu + D_\nu(x_s) x_s^{-(1+\nu)} \right\} \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \xi} \quad (52)$$

где

$$C_\nu^\infty = -\frac{1}{k_s^2(2\nu+1)} \int_0^{k_s R_\infty} z^{(1-\nu)} K_\phi^{(\nu)}(z/k_s) dz,$$

$$C_\nu(x_s) = -\frac{1}{k_s^2(2\nu+1)} \int_0^{x_s} z^{(1-\nu)} K_\phi^{(\nu)}(z/k_s) dz,$$

$$D_\nu(x_s) = \frac{1}{k_s^2(2\nu+1)} \int_0^{x_s} z^{(2+\nu)} K_\phi^{(\nu)}(z/k_s) dz. \quad (53)$$

Соотношение (53) завершает процедуру определения скалярного и векторного потенциалов осесимметричного силового поля.

Получим соотношения для расчета правых частей уравнений (24) и (46), т. е. выражения определяющие дивергенцию и азимутальный компонент ротора вектора объемной плотности сил Джоуля, которые формируются в аксиально поляризованном постоянным магнитным полем ферромагнитном, токопроводящем полупространстве переменным магнитным полем кольцевого индуктора.

3. Количественные оценки полученных результатов для поля сил Джоуля сформированного переменным магнитным полем кольцевого индуктора

В работе [8] были определены компоненты вектора объемной плотности сил Джоуля в цилиндрической системе координат $\{\rho, \phi, z\}$, ось z которой совпадает с осью Ox_3 праввинтовой декартовой системы координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ (рис. 1); начало этой системы координат совпадает с началом декартовой системы координат.

Формулы для расчета компонентов $f_\rho^D(\rho, z)$ и $f_z^D(\rho, z)$ имеют следующий вид

$$f_\rho^D(\rho, z) = F_\rho^0 \int_0^\infty \text{Re} \left(\zeta^* e^{\zeta^* r^*} \right) W(x, \Gamma^*) J_1(x r^*) dx, \quad (54)$$

$$f_z^D(\rho, z) = F_z^0 \int_0^\infty x \text{Re} \left(e^{\zeta^* r^*} \right) W(x, \Gamma^*) J_0(x r^*) dx, \quad (55)$$

где $F_\rho^0 = (m_1 - m_2) I_0 N B_z^0 / (2\mu_3^\epsilon R_2^2)$ и

$F_z^0 = (m_1 - m_2 - 2m_1 \mu_1^\epsilon / \mu_3^\epsilon) I_0 N B_z^0 / (2\mu_3^\epsilon R_2^2)$ - амплитудные множители (размерность - ньютоны,

деленные на метр кубический); m_1 и m_2 - магнитострикционные константы; μ_3^ϵ и μ_1^ϵ - магнитная проницаемость ферромагнетика в направлении вертикально ориентированного поля подмагничивания с индукцией B_z^0 и в любом направлении в плоскости, перпендикулярной направлению поля подмагничивания, соответственно; I_0 - амплитуда переменного тока в N витках индуктора; R_2 - внешний радиус укладки витков индуктора (рис. 1). Символом $\zeta^* = \zeta R_2$ в соотношениях (54) и (55) обозначено безразмерное волновое число, которое учитывает

факт существования вихревых токов в объеме ферромагнетика. При этом

$$\zeta = \sqrt{\mu_1^\varepsilon (\gamma^2 + i\omega r_2 \mu_3^\varepsilon)} / \mu_3^\varepsilon, \text{ где } \gamma - \text{ параметр интегрального преобразования Ханкеля} - \text{ действительное число с размерностью единица деленная на метр; } r_2 - \text{ удельная электрическая проводимость в произвольных направлениях в плоскости, которая перпендикулярна направлению постоянного поля подмагничивания. Символом } z^* = z/R_2 \text{ обозначена безразмерная аксиальная координата; } W(x, \Gamma^*) - \text{ функция, которая учитывает влияние геометрических параметров источника на характер распределения в пространстве переменного магнитного поля кольцевого индуктора; } x = \gamma R_2 - \text{ безразмерный параметр интегрального преобразования. Символом } \Gamma^* \text{ обозначен набор безразмерных геометрических параметров индуктора, т. е. набор величин } R_1^* = R_1/R_2, \quad h^* = h/R_2 \text{ и } \delta^* = \delta/R_2 \text{ (рис. 1). Конструкция функции } W(x, \Gamma^*) \text{ задана выражением (15) в работе [8]. Символами } J_\nu(x\rho^*) \text{ (} \nu=0;1 \text{) определены функции Бесселя порядка } \nu; \quad \rho^* = \rho/R_2 - \text{ безразмерная радиальная координата.}$$

В работе [8] было выполнено исследование функции $W(x, \Gamma^*)$ и показано, что при выполнении численного интегрирования в формулах (54) и (55) вместо бесконечности в верхнем пределе интегралов можно ограничиться значением $x_{\max} = \gamma_{\max} R_2 \cong 10$. При $R_2 = 2,5 \cdot 10^{-3}$ м значение $\gamma_{\max} = 4000 \text{ м}^{-1}$. В то же самое время произведение $i\omega r_2 \mu_3^\varepsilon$ в соотношениях (54) и (55) играет роль большого параметра. В работе [8] показано, что отношение $\gamma_{\max}^2 / (\omega r_2 \mu_3^\varepsilon)$ становится существенно меньше единицы, начиная с частоты $f = 100 \text{ кГц}$. Это обстоятельство будет использовано при построении выражений для расчета величин $D^*(r, \vartheta)$ и $K_\phi^*(r, \vartheta)$.

В сферической системе координат (r, ϕ, ϑ) компоненты осесимметричного вектора $\mathbf{f}^D(r, \vartheta)$ объемной плотности сил Джоуля определяются через компоненты $f_\rho^D(\rho, z)$ и $f_z^D(\rho, z)$ следующим образом

$$\begin{aligned} f_r^D(r, \vartheta) &= f_\rho^D(\rho, z) \sin \vartheta + \\ &+ f_z^D(\rho, z) \cos \vartheta \approx f_\rho^D(\rho, z) \sin \vartheta, \\ f_\vartheta^D(r, \vartheta) &= f_\rho^D(\rho, z) \cos \vartheta - \\ &- f_z^D(\rho, z) \sin \vartheta \approx f_\rho^D(\rho, z) \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (56)$$

где $\rho = r \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$; при записи соотношений (56) было учтено, что на частотах рабочего диапазона частот ультразвуковых толщиномеров (сотни килогерц и выше) всегда выполняется сильное неравенство $|f_\rho^D(\rho, z)| \gg |f_z^D(\rho, z)|$. Причиной такого неравенства компонентов вектора объемной плотности сил Джоуля является скин-эффект, который порождается вихревыми токами в объеме ферромагнетика.

Так как

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{f}^D(r, \vartheta) &= \frac{1}{r^2} \left[2r f_r^D(r, \vartheta) + r^2 \frac{\partial f_r^D(r, \vartheta)}{\partial r} \right] + \\ &+ \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \vartheta \cdot f_\vartheta^D(r, \vartheta) + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\vartheta^D(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \end{aligned}$$

то, подставляя в последнее выражение соотношения (56), получаем

$$\begin{aligned} D^*(r, \vartheta) &= \operatorname{div} \mathbf{f}^D(r, \vartheta) = \\ &= \frac{F_\rho^0}{R_2} \int_0^\infty x \operatorname{Re} \left(\zeta^* e^{\zeta^* r^* \cos \vartheta} \right) W(x, \Gamma^*) J_0(xr^* \sin \vartheta) dx \end{aligned} \quad (57)$$

где $r^* = r/R_2$ - безразмерная радиальная координата.

Азимутальный компонент $K_\phi^*(r, \vartheta)$ ротора вектора объемной плотности сил Джоуля в сферической системе координат определяется следующим образом

$$K_\phi^*(r, \vartheta) = \frac{1}{r} f_\vartheta^D(r, \vartheta) + \frac{\partial f_\vartheta^D(r, \vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial f_r^D(r, \vartheta)}{\partial \vartheta}.$$

Подставляя в последнее выражение соотношения (56), получаем

$$\begin{aligned} K_\phi^*(r, \vartheta) &= \frac{F_\rho^0}{R_2} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\left(\zeta^* \right)^2 e^{\zeta^* r^* \cos \vartheta} \right] \times \\ &\times W(x, \Gamma^*) J_1(xr^* \sin \vartheta) dx \end{aligned} \quad (58)$$

На рис. 2 показаны графики дивергенции и ротации вектора $\mathbf{f}^D(r, \vartheta)$ объемной плотности сил Джоуля на поверхности $\vartheta = \pi/2$ ($z = 0$) токопроводящего намагниченного ферромагнитного полупространства. Вычисления проводились по формулам (57) и (58) в пределах

$0 \leq x \leq 20$ при следующем наборе параметров: геометрические параметры кольцевого индуктора - $R_2 = 3,5 \cdot 10^{-3}$ м, $R_1 = 0,5R_2$, $h = 0,5R_2$, $\delta = 0,1R_2$; число витков $N = 10$. Параметры воздействия – амплитуда переменного тока $I_0 = 60$ А, индукция постоянного поля подмагничивания $B_z^0 = 1$ Тл; частота изменения направления протекания переменного тока $f = 1$ МГц. Магнитострикционные константы: $m_1 = 0,1$ Гн/м, $m_2 = -0,05$ Гн/м. Магнитная

проницаемость ферромагнетика $\mu_1^* = \mu_2^* = 30\mu_0$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная проницаемость вакуума. Удельная электрическая проводимость металла $\gamma_2 = 15$ МСм/м. По осям абсцисс на рис. 2,а и рис. 2,б отсчитывается безразмерная радиальная координата $r^* = r/R_2$. По осям ординат откладываются абсолютные значения дивергенции и ротора вектора $\mathbf{f}^D(r, \vartheta)$ объемной плотности сил Джоуля в ньютонах, деленных на метр в четвертой степени.

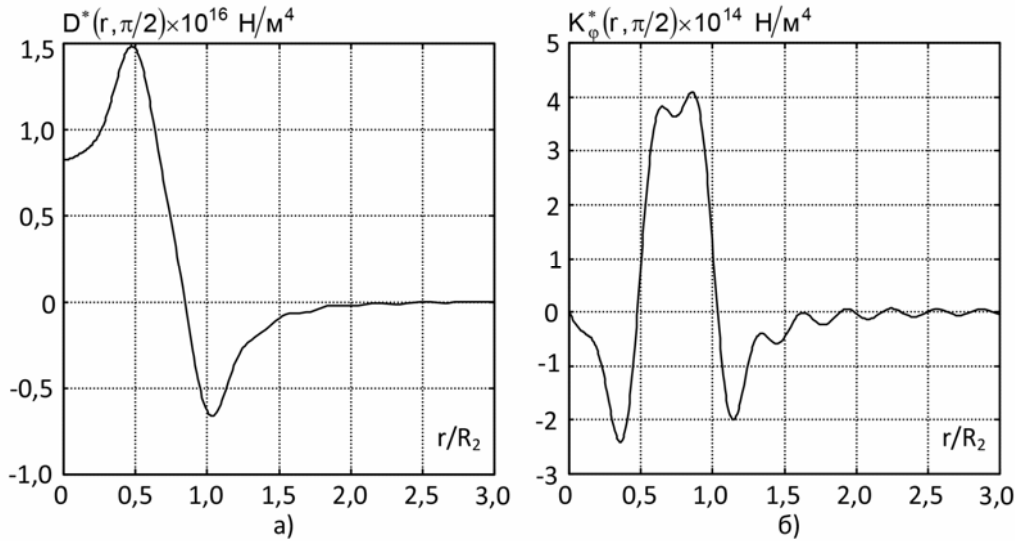


Рис. 2. Графическое изображение распределения дивергенции (а) и ротации (б) вектора объемной плотности сил Джоуля на поверхности ферромагнитного полупространства

Область существования заметных значений дивергенции $D^*(r, \vartheta)$ и ротации $K_\phi^*(r, \vartheta)$ резко уменьшается по мере увеличения значений полярного угла ϑ . На рис. 3 показаны графики изменения величин $D^*(r, \vartheta)$ и $K_\phi^*(r, \vartheta)$, числовые значения которых были рассчитаны при наборе параметров, который указан в комментарии к рис. 2. Как следует из определения (58), ротация поля сил Джоуля на вертикальной оси $\vartheta = \pi$ равна нулю.

Показанные на рис. 2 и рис. 3 результаты дают основание для утверждения, что поле сил Джоуля, которое формируется магнитным полем кольцевого индуктора, локализовано в ограниченной области токопроводящего ферромагнитного полупространства. В качестве этой области можно рассматривать полусферу $\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi$ с радиусом $R_\infty = 2R_2$.

Изменение скалярного и векторного потенциалов поля сил Джоуля в пространстве в небольшой степени определяют коэффициенты

$D_v^{(*)}(r)$ и $K_\phi^{(v)}(r)$ разложений дивергенции и ротации силового поля в ряды по функциям Лежандра. Эти величины определены соотношениями (35) и (51) соответственно. При выполнении численного интегрирования эти выражения были представлены в следующем виде:

$$D_v^{(*)}(r^*) = -(\nu + 1/2) \frac{F_p^0}{R_2} \int_0^{20} x W(x, \Gamma^*) \times \left\{ \int_{\pi}^{\pi/2} \sin \vartheta \operatorname{Re} \left[\zeta^* e^{\zeta^* r^* \cos \vartheta} \right] J_0(x r^* \sin \vartheta) P_\nu(\cos \vartheta) d\vartheta \right\} dx, \quad (59)$$

$$K_\phi^{(v)}(r^*) = \frac{2\nu + 1}{2(\nu + 1)} \frac{F_p^0}{R_2} \int_0^{20} W(x, \Gamma^*) \times \left\{ \int_{\pi}^{\pi/2} \operatorname{Re} \left[\left(\zeta^* \right)^2 e^{\zeta^* r^* \cos \vartheta} \right] J_1(x r^* \sin \vartheta) \times \left[\cos \vartheta P_\nu(\cos \vartheta) - P_{\nu-1}(\cos \vartheta) \right] d\vartheta \right\} dx. \quad (60)$$

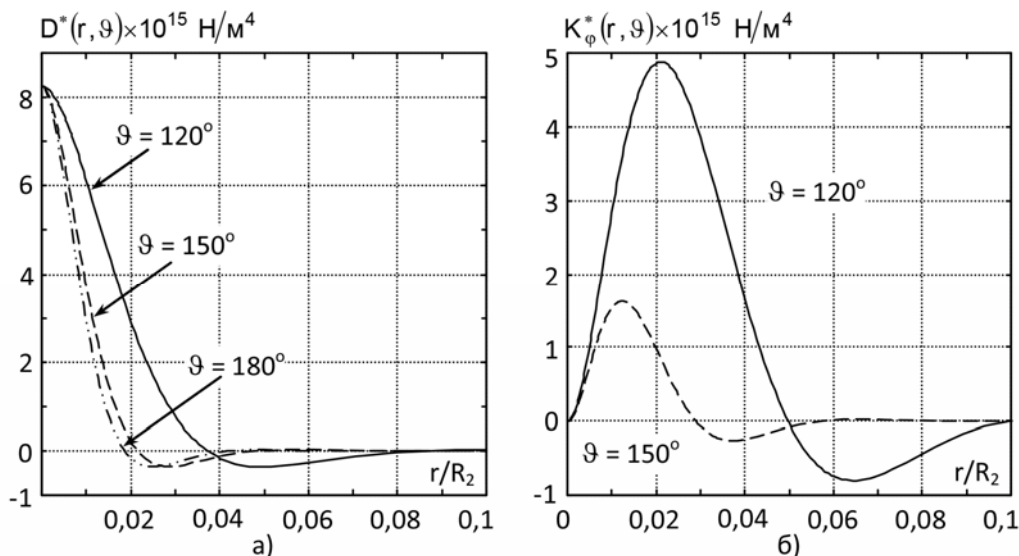


Рис. 3. Графики распределения дивергенции (а) и ротации (б) поля сил Джоуля сформированных магнитным полем кольцевого индуктора в объеме токопроводящего ферромагнетика

Результаты вычислений по формулам (59) и (60) показаны на рис. 4 и рис. 5 соответственно. Расчеты проводились для набора параметров, который указан в комментарии к рис. 2. Сопоставляя между собой площади под кривыми на рис. 4,а и рис. 4,б, можно сделать вывод, что коэффициенты разложения $D_v^*(r^*)$ для четных

значений значка ν , т. е. при $\nu=2n$ ($n=1,2,3,\dots$), будут формировать коэффициенты $A_{2n}(x_\ell)$ и $B_{2n}(x_\ell)$ (см. расчетные формулы (41)), которые будут превосходить по абсолютной величине числовые значения коэффициентов $A_{2n+1}(x_\ell)$ и $B_{2n+1}(x_\ell)$.

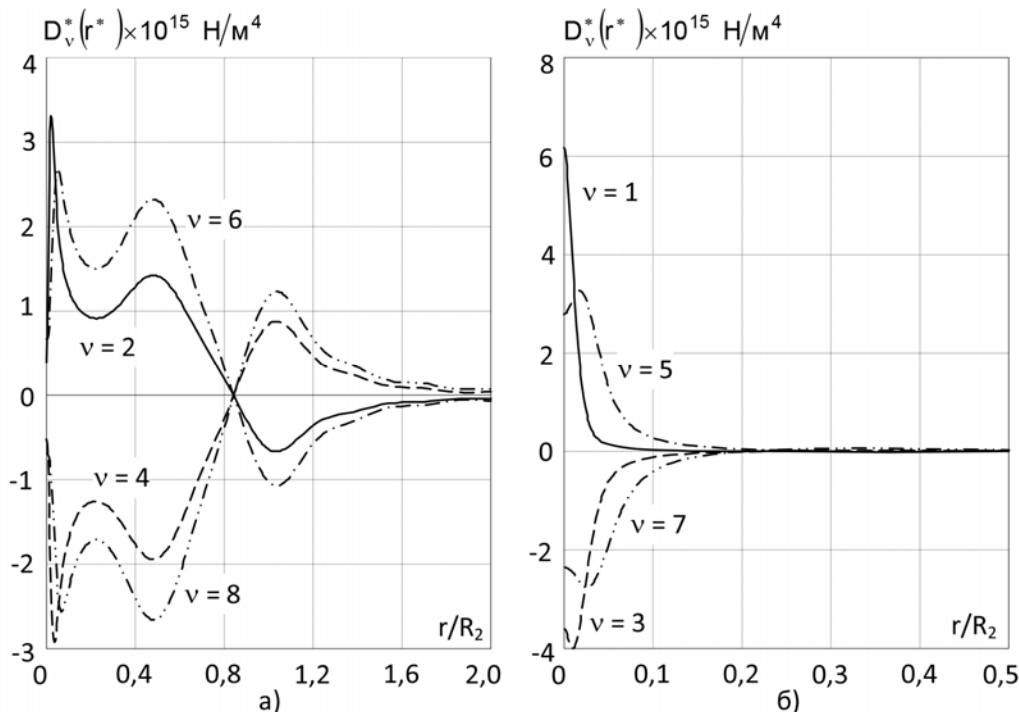


Рис. 4. Изображение четных (а) и нечетных (б) коэффициентов разложения (35) дивергенции поля сил Джоуля в ряд по функциям Лежандра

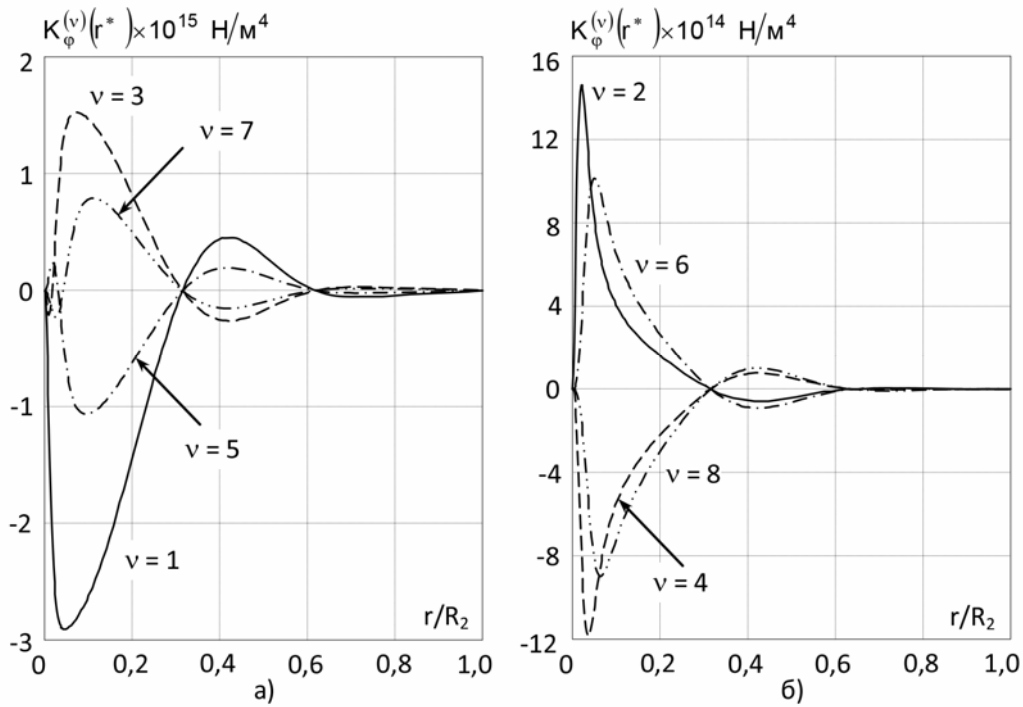


Рис. 5. Изображение нечетных (а) и четных (б) коэффициентов разложения (51) ротации поля сил Джоуля в ряд по первым производным функций Лежандра

Варьируемые коэффициенты $C_\nu(x_s)$ и $D_\nu(x_s)$ в общем решении (52), которые определяют сферические гармоники азимутального компонента векторного потенциала поля сил Джоуля, зависят от значений значка ν иначе. Из результатов, которые графически представлены на рис. 5, следует, что коэффициенты $C_{2n+1}(x_s)$ и $D_{2n+1}(x_s)$ будут доминировать над варьируемыми константами $C_{2n}(x_s)$ и $D_{2n}(x_s)$.

Для проверки сделанных предположений были рассчитаны значения скалярного и векторного потенциалов при значениях $x_l = k_l R_\infty$ и $x_s = k_s R_\infty$ ($R_\infty = 2R_2$). Из общих решений (44) и (52) следует, что

$$\Phi^*(R_\infty, \vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Phi_\nu^*(R_\infty) P_\nu(\xi),$$

$$\Psi_\phi^*(R_\infty, \vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Psi_\phi^{(\nu)}(R_\infty) \sin \vartheta \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \xi},$$

где $\xi = \cos \vartheta$; $\Phi_\nu^*(R_\infty)$ и $\Psi_\phi^{(\nu)}(R_\infty)$ - амплитудные множители сферических гармоник скалярного и векторного потенциалов на сфере радиуса $r = R_\infty$. Формулы для расчета амплитудных множителей имеют следующий вид:

$$\Phi_\nu^*(R_\infty) = (k_l R_\infty)^{-(\nu+1)} B_\nu(k_l R_\infty),$$

$$\Psi_\phi^{(\nu)}(R_\infty) = (k_s R_\infty)^{-(\nu+1)} D_\nu(k_s R_\infty). \quad (61)$$

При выполнении машинного счета выражения (61) были приведены к следующему виду:

$$\Phi_\nu^*(R_\infty) = \frac{R_2 F_\rho^0}{2} \left(\frac{R_\infty}{R_2}\right)^{-(\nu+1)} \int_0^{R_\infty/R_2} (r^*)^{(2+\nu)} \times$$

$$\times \int_0^{20} x W(x, \Gamma^*) \int_\pi^{\pi/2} \sin \vartheta \times \operatorname{Re} \left(\zeta^* e^{\zeta^* r^* \cos \vartheta} \right) \times$$

$$\times J_0(x r^* \sin \theta) P_\nu(\cos \vartheta) d\vartheta dx dr^* \quad (62)$$

$$\Psi_\phi^{(\nu)}(R_\infty) = \frac{R_2 F_\rho^0}{2(\nu+1)} \left(\frac{R_\infty}{R_2}\right)^{-(\nu+1)} \int_0^{R_\infty/R_2} (r^*)^{(2+\nu)} \times$$

$$\times \int_0^{20} W(x, \Gamma^*) \int_\pi^{\pi/2} \operatorname{Re} \left[(\zeta^*)^2 e^{\zeta^* r^* \cos \vartheta} \right] \times J_1(x r^* \sin \theta) \times$$

$$\times [\cos \vartheta P_\nu(\cos \vartheta) - P_{\nu-1}(\cos \vartheta)] d\vartheta dx dr^* \quad (63)$$

где $r^* = r/R_2$ - безразмерная радиальная координата.

Результаты вычислений, которые были выполнены при тех же значениях параметров, что и предшествующие расчеты, сведены в табл. 1.

Таблица 1. Числовые значения амплитудных множителей сферических гармоник скалярного и векторного потенциалов на сфере $r = R_\infty$

ν	$\Phi_\nu^*(R_\infty), \text{H/M}^4$	$\Psi_\phi^{(\nu)}(R_\infty), \text{H/M}^4$
1	$-3,596531 \cdot 10^4$	$3,802884 \cdot 10^6$
2	$-3,543834 \cdot 10^8$	$-4,340818 \cdot 10^4$
3	$3,163127 \cdot 10^3$	$-4,226854 \cdot 10^5$
4	$2,589241 \cdot 10^8$	$-5,652733 \cdot 10^2$
5	$4,147741 \cdot 10^2$	$1,289549 \cdot 10^5$
6	$-1,879299 \cdot 10^8$	$2,924771 \cdot 10^2$
7	$-2,019415 \cdot 10^2$	$-4,933320 \cdot 10^4$
8	$1,462604 \cdot 10^8$	$-35,25221$
9	$56,54294$	$2,162191 \cdot 10^4$
10	$-1,211833 \cdot 10^8$	$1,365313$
11	$-13,85212$	$-1,048642 \cdot 10^4$
12	$1,050090 \cdot 10^8$	$0,658943$

Из результатов, представленных в табл. 1, следует, что скалярный потенциал $\Phi^*(r, \vartheta)$ осесимметричного силового поля формируется практически одними четными сферическими гармониками. Удельный вес нечетных сферических гармоник в сумме из первых двенадцати гармоник не превышает величины $\delta_\ell = 2,123 \cdot 10^{-4}$. В то же время векторный потенциал $\Psi_\phi^*(r, \vartheta)$ может быть представлен суммой ряда по нечетным сферическим гармоникам. Удельный вес четных сферических гармоник в сумме первых двенадцати гармоник не превышает величины $\delta_s = -1,259 \cdot 10^{-2}$.

Таким образом, можно утверждать, что скалярный и векторный потенциалы поля сил Джоуля, которые созданы переменным магнитным полем кольцевого индуктора, с приемлемой для выполнения инженерных расчетов точностью представляются рядами по четным и нечетным сферическим гармоникам соответственно. Отсюда следует, что скалярный и векторный потенциалы полей смещений продольных и сдвиговых волн также будут представлены разложениями по четным и нечетным сферическим гармоникам. Это обстоятельство играет чрезвычайно важную роль при определении кинематических и динамических характеристик продольных и сдвиговых волн, которые возбуждаются электромагнитным способом.

Выводы

Подводя итоги, можно сформулировать следующие выводы.

1. Дана строгая математическая постановка задач о возбуждении не взаимодействующих продольных и сдвиговых волн системой поверхностных и объемных нагрузок.

2. Предложена методика корректного определения скалярного и векторного потенциалов силового поля, распределение которого в пространстве задано вектором объемной плотности.

3. Даны решения уравнений Пуассона, определяющие скалярный и векторный потенциалы осесимметричного силового поля.

4. Выполнены количественные оценки скалярного и векторного потенциалов поля сил Джоуля, которые создаются в аксиально намагниченном токопроводящем ферромагнетике переменным магнитным полем кольцевого индуктора.

5. Показано, скалярный и векторный потенциалы поля смещений материальных частиц, которые формируются продольными и сдвиговыми волнами, следует искать в виде сумм рядов по четным и нечетным сферическим гармоникам соответственно.

Список использованных источников

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология Т.1. – М.: Мир, 1983. – 520 с.
2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981. – 283 с.
3. Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я. Конечноеэлементные модели в задаче Лэмба // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №6: ноябрь – декабрь. – С. 166 – 175.
4. Исследование передаточных характеристик ультразвуковых трактов с электромагнитным возбуждением и регистрацией волн Рэлея в ферромагнетиках. Часть 2 / А. Г. Горбашова, О. Н. Петрищев, М. И. Романюк [и др.] // Электроника и связь – 2013. – № 3. – С. 56–64.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. – 576 с.
6. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
8. Михеева А. Н., Петрищев О. Н. Исследование электромагнитного способа возбуждения объемных ультразвуковых волн в металлическом полупространстве. Часть 1. Расчет магнитного поля и силового поля, которое создается кольцевым индуктором в намагниченном (анизотропном) токопроводящем ферромагнетике // Электроника и связь, – 2014. Т. 19, № 2(79). – С. 59–74.
9. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. – 304 с.
10. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 873 с.
11. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том III. Часть 2. – М.: Наука, 1974. – 672 с.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М.Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Поступила в редакцию 17 января 2014 г.

УДК 534.143 – 16:534.232.082.74

А.М. Михеева, О.М. Петрищев, д-р.тех.наук

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,
вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

Дослідження електромагнітного способу збудження об'ємних ультразвукових хвиль в металевому півпросторі. Частина 2. Постановка завдань, визначення кінематичних характеристик не взаємодіючих поздовжніх і поперечних (зсувних) ультразвукових хвиль, які збуджуються електромагнітним способом

Дано формулювання граничних задач динамічної теорії пружності, вирішення яких визначають кінематичні і динамічні характеристики не взаємодіючих поздовжніх і поперечних хвиль, які збуджуються системою поверхневих і об'ємних сил. Наводиться методика визначення потенціалів поля сил, які задані в об'ємі пружного напівпростору. Виконані кількісні оцінки скалярного і векторного потенціалів поля сил Джоуля, які створюються в аксіально намагніченому струмопровідному ферромагнетичному змінним магнітним полем кільцевого індуктора. Показано, що скалярний і векторний потенціали поля зміщень матеріальних частинок, які формуються поздовжніми і зсувними хвилями, слід шукати у вигляді сум рядів по парним і непарним сферичним гармонікам відповідно. Бібл. 12, рис 5, табл 1.

Ключові слова: поздовжня хвиля, хвиля зсуву, напівпростір, магнітне поле, силове поле.

UDC 534.143 – 16:534.232.082.74

A.N. Mikheeva, O.N. Petryshev, Dr.Sc.

National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",
st. Polytechnichna, 16, Kyiv, 03056, Ukraine.

Investigation of electromagnetic excitation method of volumetric ultrasonic waves in the metal half-space. Part 2. Formulation of the problems of determination of kinematic characteristics not interacting longitudinal and transverse (shear) ultrasonic waves that are excited by electromagnetic means

Given the wording of boundary problems of dynamic theory of elasticity, the solutions of which determine by the kinematic and dynamic characteristics are not interacting longitudinal and transverse waves that are excited by a system of surface and volumetric forces. Given methods of determining the potentials of force field which are specified in the volume of elastic half-space. Made quantitative estimate of the scalar and vector potentials of the Joule forces field, which are created in axially magnetized conductive ferromagnet by variable magnetic field of the coil ring. It is shown that scalar and vector potentials offset fields of material particles, which are formed by longitudinal and shear waves, should be sought in the form of sums of series in even and odd spherical harmonics, respectively. References 12, figures 5, tabl 1.

Keywords: a longitudinal wave, the shear wave, half-space, the magnetic field, the force field.

References

1. Aki K., Richards P. (1983), «Quantitative seismology» Vol.1. – Moscow, Mir, P. 520. (Rus)
2. Grinchenko V.T., Meleshko V. V. (1981), “Harmonic oscillations and waves in elastic bodies”. Kyiv, Naukova dumka. P. 283. (Rus)
3. Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V., Sekerzh-Zenkovich S.Y. (2011), “Finite-element models in the problem of the lamb”. Izvestiya ran. Mekh. No.6. - pp. 166 - 175. (Rus)
4. A. G. Gorbashova, O. N. Petryshev, M. I. Romanyuk. (2013), “Study transfer characteristics ultrasonic tracts with electromagnetic excitation and registration of Rayleigh waves in ferromagnets. Part 2”. Electronics and communications. No 3. pp. 56 – 64. (Rus)
5. Kamke E. (1976) “Handbook on ordinary differential equations”. Moscow, Nauka. P. 576 . (Rus)
6. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. (1970), “Equations of mathematical physics”. M.: Vysshaya shkola, P. 710. (Rus)
7. Loytsyanskiy L. G. (1970) “Mechanics of fluid and gas”. Moscow, Nauka. P. 904 . (Rus)
8. Mikheeva A.N, Petryshev O.N. (2014), “Investigation of electromagnetic excitation method of volumetric ultrasonic waves in the metal half-space. Part 1. Calculation of the magnetic field and the force field, which are generated in a magnetized annular inductor conductive ferromagnet” . Electronics and communications. Vol. 19, No 2(79). pp. 59 – 74. (Rus)
9. Nikiforov A. F., Uvarov V. B. (1974), «Fundamentals of the theory of special functions». Moscow, Nauka. P. 304 . (Rus)
10. Novatskiy V. (1975), “Theory of elasticity”. Moscow, Mir. P. 875 . (Rus)
11. Smirnov V. I. .(1974) “Course of higher mathematics”. Vol. 3. Part 2.. Moscow, Nauka. P. 672 . (Rus)
12. M. Abramowitz, I. Stegun (1979), “Handbook of Mathematical Functions with formulas, graphs and mathematical tables”. Moscow, Nauka. P. 832 . (Rus)