

УДК 535:534.232-8

А.В. Богдан¹, канд. техн. наук, **А.Н. Михеева**², **О.Н. Петрищев**², д.-р. техн. наук¹Научно-исследовательский институт прикладной электроники,

ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

²Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,

ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

Принципы математического моделирования акустооптических ячеек

Конспективно изложены основные факты феномена дифракции световых лучей на ультразвуковых пучках. Показано, что дальнейшее совершенствование параметров и технических показателей дефлекторов и модуляторов световых лучей принципиально невозможно без построения и исследования математической модели излучателя ультразвуковых волн. Предложены три, отличающиеся точностью количественных оценок, версии построения математической модели, т.е. передаточной характеристики, ультразвукового преобразователя в виде электродной структуры, расположенной на поверхности оптически прозрачного пьезоэлектрического кристалла. Библ. 18, рис. 3.

Ключевые слова: акустооптика; акустооптическая ячейка; дефлектор; модулятор; математическая модель; ультразвуковой преобразователь.

Введение

Начиная с 60-х годов XX века акустооптика получила широкое распространение не только в области научных исследований, но и для построения технических устройств. Последнее обусловлено развитием лазерной физики, которое в перспективе позволило бы создать новые и эффективные устройства управления световыми пучками, обработки радиосигналов, исследования оптических изображений. Исследования данной тематики и на сегодняшний день вызывают широкий интерес научной общественности, которая по-прежнему занимается вопросами не только возможности создания более совершенных устройств [1,3, 5 – 7], но и исследованиями физических процессов акустооптического взаимодействия [2,14,15,17].

Построение эффективно работающих устройств акустооптики (дефлекторов и модуляторов световых лучей) возможно при условии возбуждения в объеме оптически прозрачного кристалла ультразвуковых волн субгигагерцового и гигагерцового диапазонов частот. Возбуж-

дение ультразвуковых волн гиперзвукового частотного диапазона является далеко нетривиальной технической задачей, которая в настоящее время решается с помощью технологий акустоэлектроники. Использование встречно – штыревых преобразователей, расположенных на поверхности пьезоэлектрического кристалла, позволяет возбуждать и регистрировать поверхностные акустические волны. Известно, что поверхностные акустические волны формируются в результате взаимодействия продольных и поперечных волн (строго говоря, квазипродольных и квазипоперечных) на поверхности упругого полупространства (пьезоэлектрического кристалла). Очевидно, что значительная доля подводимой к кристаллу энергии уносится объемными продольными и поперечными волнами вглубь кристалла. Акустооптические дефлекторы световых лучей, в которых для возбуждения ультразвуковых волн в объеме оптически прозрачного пьезоэлектрика используются электродные структуры, располагающиеся на поверхности кристалла, в настоящее время являются предметом изобретательства, которое осуществляется без ясного понимания основных закономерностей акустооптического взаимодействия и особенностей возбуждения тех или иных типов волн с поверхности пьезоэлектрического монокристалла.

Как уже говорилось выше, повышение эффективности работы акустооптических ячеек напрямую связано с возможностями эффективного возбуждения коротковолновых ультразвуковых пучков. Этим словосочетанием определяется, как правило, продольная волна. Вместе с тем, деформации сжатия – расширения возникают и в процессе распространения ультразвуковых поперечных (сдвиговых) волн. При этом на одной и той же частоте смены знака напряженно-деформированного состояния, длина поперечной волны в полтора – два раза меньше длины более быстрой продольной волны. Последнее обстоятельство делает актуальным и практически целесообразным исследование

возможностей возбуждения сдвиговых (поперечных) волн гигагерцового частотного диапазона.

Таким образом, определение условий, при которых возможно эффективное возбуждение объемных продольных и поперечных ультразвуковых волн, предполагает предварительное исследование является, пожалуй, наиболее важным вопросом теории акустооптических ячеек.

В настоящей статье дано обоснование важности исследования процессов возбуждения объемных волн с поверхности оптически прозрачного монокристалла и рассматриваются варианты построения математических моделей электродных структур, которые используются в акустооптических ячейках для излучения высокочастотных ультразвуковых волн.

1. Основные сведения из теории дифракции света на ультразвуковых пучках

Общеизвестным является факт, что скорость c_0 распространения электромагнитных волн в пустоте определяется двумя фундаментальными константами – диэлектрической $\chi_0 = 8,854188 \cdot 10^{-12}$ Ф/м и магнитной $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м проницаемостями вакуума – следующим образом

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\chi_0 \mu_0}} = 299793 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

В оптически прозрачном диэлектрике скорость распространения света уменьшается в n раз, где $n > 1$ – коэффициент преломления, причем $n = \sqrt{\chi}$, где χ – относительная (безразмерная) диэлектрическая проницаемость материала.

В 1815 г. шотландский физик Дэвид Брюстер (см. библиографию в монографии [10]) обнаружил, что коэффициент преломления стеклянных образцов изменяется под действием приложенных к образцам механических нагрузок. В 1841 г. немецкий физик – теоретик Франц Эрнст Нейман объяснил наблюдаемые в экспериментах изменения коэффициента преломления, связав это явление с механическими деформациями, которые возникают в упругих телах под действием внешних сил. Несколько лет спустя, в 1853 г., Джеймс Клерк Максвелл опубликовал свою трактовку физического содержания эффекта двулучепреломления. Он доказывал, что определяющим фактором наблюдаемых эффектов являются механические напряжения. В серии статей, начало которой было положено в

1889 г., немецкий физик Карл Фридрих Поккельс подверг критике предположения Д. К. Максвелла, и развил феноменологическую теорию, которая и по сей день позволяет получать количественные оценки фотоупругих свойств всех, оптически прозрачных, монокристаллов и поликристаллических материалов. Теория К. Ф. Поккельса в 1970 г. была дополнена Нельсоном Д. Ф. и М. Лэксом (см. библиографию в монографии [4]) на случай локальных поворотов, которые формируются объемными сдвиговыми волнами.

По теории К. Ф. Поккельса изменение компонента χ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) тензора относительной диэлектрической проницаемости, т. е. величина $\Delta\chi_{ij}$ определяется следующим образом [4]

$$\Delta\chi_{ij} = -\chi_{ip} \rho_{pkmn} \chi_{kj} \varepsilon_{mn}; \quad i, j, p, k, m, n = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $\Delta\chi_{ij}$ – безразмерное изменение относительной (безразмерной) диэлектрической проницаемости; χ_{ip} , χ_{kj} – компоненты тензора относительной диэлектрической проницаемости; ρ_{pkmn} – компонент тензора фотоупругих констант (тензор Поккельса); ε_{mn} – компонент тензора упругих деформаций.

В течение ста лет, т. е. со времени экспериментальных наблюдений Д. Брюстера, фотоупругость изучалась исключительно с позиций статического, не изменяющегося во времени, напряженно-деформированного состояния оптически прозрачных твердых тел.

В 1922 г. французский физик Леон Бриллюэн теоретически предсказал изменение тонкой структуры спектра светового луча при его прохождении через ультразвуковой пучок. В 1926 г. аналогичные результаты были опубликованы Леонидом Исааковичем Манделъштамом. Ныне феномен взаимодействия световой и ультразвуковой волны называется дифракцией Бриллюэна – Манделъштама.

Распространение электромагнитной волны в оптически прозрачном кристалле описывается уравнениями Максвелла, которые в скалярной форме записываются следующим образом

$$\varepsilon_{k\ell m} \frac{\partial H_m(x_k, t)}{\partial x_\ell} = \frac{\partial D_k(x_k, t)}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{mpj} \frac{\partial E_j(x_k, t)}{\partial x_p} = -\frac{\partial B_m(x_k, t)}{\partial t}, \quad (3)$$

$k, \ell, m, p = 1, 2, 3$

где $\varepsilon_{k\ell m}$ (ε_{mpj}) - компонент тензора Леви-Чивиты, равный плюс единице, когда индексы k, ℓ, m (m, p, k) образуют четную перестановку чисел 1, 2, 3, т. е. сочетания 123, 231 и 312, равный минус единице, когда индексы образуют сочетания 132, 321, 213, т. е. перестановку с нечетным числом беспорядков в расположении чисел 1, 2, 3 (нечетные перестановки) и равный нулю, когда любые два из трех индексов равны друг другу; H_m и V_m - m -ые компоненты векторов напряженности и индукции магнитного поля; E_k и D_k - k -ые компоненты векторов напряженности и индукции электрического поля в электромагнитной волне; x_ℓ (x_p) ($\ell, p = 1, 2, 3$) - координаты точки в декартовой системе координат; t - время. Будем полагать, что знаки характеристик электрического и магнитных полей меняются во времени по гармоническому закону, т. е. $\vec{\Pi}(x_k, t) = \vec{\Pi}(x_k) e^{i\Omega t}$, где символом $\vec{\Pi}$ обозначен один из векторов $\vec{H}(x_k, t)$, $\vec{V}(x_k, t)$, $\vec{E}(x_k, t)$, $\vec{D}(x_k, t)$, при этом функции $\vec{H}(x_k)$, $\vec{V}(x_k)$, $\vec{E}(x_k)$, $\vec{D}(x_k)$ имеют смысл пространственно развитых амплитуд; $i = \sqrt{-1}$; Ω - круговая частота.

Если в кристалле существует гармоническая ультразвуковая волна, в которой материальные частицы оптически прозрачного вещества смещаются из положения равновесия на величину $\vec{u}(x_k) e^{i\omega t}$ ($\vec{u}(x_k)$ - амплитудное значение вектора смещения; ω - круговая частота), то выражение (1) принимает следующий вид

$$\Delta \chi_{ij} = -\chi_{ip} \rho_{pkmn} \chi_{kj} \frac{\partial u_m(x_k)}{\partial x_n} e^{i\omega t}. \quad (4)$$

При записи выражение (4) было учтено, что компоненты фотоупругого тензора Поккельса обладают симметрией относительно операции перестановки в первой и во второй парах, т. е. $\rho_{pkmn} = \rho_{kpmn} = \rho_{kpnm} = \rho_{pknm}$.

Электрическая и магнитная индукция связаны с напряженностью соответствующих полей следующими соотношениями:

$$D_k = \chi_0 \chi_{kj} E_j(x_k) e^{i\Omega t} = \chi_0 \times \left[\chi_{kj} e^{i\Omega t} - \chi_{kp} \rho_{p\ell mn} \chi_{\ell j} \frac{\partial u_m(x_k)}{\partial x_n} e^{i(\Omega + \omega)t} \right] E_j(x_k) \approx \chi_0 \left[\chi_{kj} - \chi_{kp} \rho_{p\ell mn} \chi_{\ell j} \frac{\partial u_m(x_k)}{\partial x_n} \right] E_j(x_k) e^{i\Omega t}, \quad (5)$$

$$V_m(x_k, t) = \mu_0 H_m(x_k) e^{i\Omega t}.$$

Подставляя соотношения (5) в уравнения Максвелла, получаем

$$\varepsilon_{k\ell m} \frac{\partial H_m(x_k)}{\partial x_\ell} = -i\Omega \chi_0 \left[\chi_{kj} - \chi_{kp} \rho_{p\ell mn} \chi_{\ell j} \frac{\partial u_m(x_k)}{\partial x_n} \right] E_j(x_k), \quad (6)$$

$$\varepsilon_{mpj} \frac{\partial E_j(x_k)}{\partial x_p} = -i\Omega \mu_0 H_m(x_k), \quad (7)$$

Из уравнения (7) следует, что

$$H_m(x_k) = -\frac{1}{i\Omega \mu_0} \varepsilon_{mpj} \frac{\partial E_j(x_k)}{\partial x_p}. \quad (8)$$

Подставляя выражение (8) в уравнение (6) получаем систему уравнений дифракции света на ультразвуковом волновом поле

$$\varepsilon_{k\ell m} \varepsilon_{mpj} \frac{\partial^2 E_j(x_k)}{\partial x_p \partial x_\ell} - \frac{\Omega^2}{c_0^2} \left[\chi_{kj} - \chi_{kp} \rho_{p\ell mn} \chi_{\ell j} \frac{\partial u_m(x_k)}{\partial x_n} \right] E_j(x_k) = 0. \quad (9)$$

После экспериментального подтверждения в 1932 г. самого факта дифракции света на ультразвуке (см. библиографию в монографии [8]), Л. Бриллюэн решил уравнение типа уравнения (9) для случая нормального падения светового луча на ультразвуковой пучок плоских продольных волн (рис. 1). При этом коэффициент преломления n в пределах ширины ($-\ell \leq x_2 \leq \ell$) ультразвукового пучка задавался следующим образом: $n = n_0 + \Delta n \sin \omega(t - x_3/v)$, где v - скорость распространения продольной ультразвуковой волны.

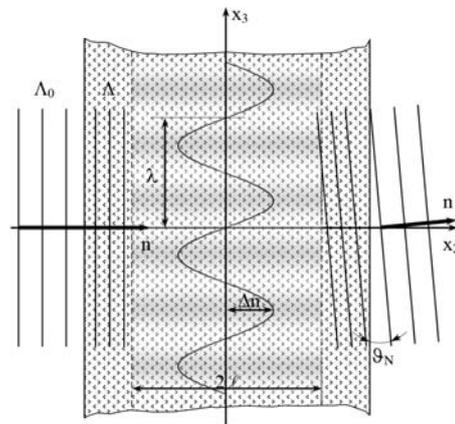


Рис. 1. Изображение нормального падения светового луча на ультразвуковой пучок шириной 2ℓ

На основании этой, по сути модельной, постановки задачи Л. Бриллюэном, а в последствии, в основном, Раманом Ч. В., Натом Н.С.Н. в 1935 – 1936 г.г. и Сергеем Михайловичем Рытовым в 1937 г., были получены следующие результаты.

1. При перпендикулярном прохождении монокроматического, частоты Ω , светового луча через ультразвуковой пучок плоских продольных волн с частотой смены знака ω , в спектре светового луча помимо основной гармоники Ω образуются новые, боковые, гармоники с частотами $\Omega \pm N\omega$, где $N = 1, 2, \dots$ - номер, или, как принято говорить, порядок гармоники.

2. Амплитуды боковых гармоник определяются специальными функциями (функциями Матье (Л. Бриллюэн) и функции Бесселя (Раман Ч. В. и Нат Н. С. Н)), аргументы которых прямо пропорциональны Δn - амплитуде модуляции коэффициента преломления ультразвуковой волной.

3. Спектральные составляющие порядка N с частотой $\Omega \pm N\omega$ отклоняется от первоначального направления распространения светового луча на угол $\vartheta_N = \pm N\Lambda/\lambda$, где Λ - длина электромагнитной волны в оптически прозрачном материале; λ - длина ультразвуковой волны. Для продольной ультразвуковой волны с частотой 200 МГц в плавленом кварце ($v = 5960$ м/с) и гелий – неоновом лазере ($\Lambda = 0,433$ мкм) отклонение $\sin \vartheta_1 \approx \vartheta_1 \approx 0^\circ 50'$.

Особенностью дифракции Бриллюэна – Мандельштама, основные свойства которой перечислены выше, является то, что ширина 2ℓ акустического пучка не должна превышать некоторого критического значения $2\ell_c = \lambda^2/\Lambda$. Чем выше частота ультразвуковой волны, тем труднее выполнить условие $\ell \leq \ell_c$. Для плавленого кварца и гелий – неоновом лазере на частоте ультразвука 100 МГц критическая ширина $2\ell_c = 8,4$ мм, а на частоте 300 МГц - $2\ell_c = 0,93$ мм.

Если световой луч отклоняется на угол $\pm\beta$ от нормали к боковой поверхности ультразвукового пучка, и этот угол удовлетворяет условию $\sin \beta = \Lambda/(2\lambda)$, которое в рентгеноструктурном анализе называется условием Брэгга (Лоуренс Брэгг (31.03.1890 – 01.07.1971) - английский физик, член Лондонского королевского общества), то ширина 2ℓ ультразвукового пучка должна

удовлетворять сильному неравенству $\ell \gg \ell_c$, что без труда реализуется в высокочастотных ультразвуковых пучках.

Этот тип дифракции световых лучей на ультразвуке называется дифракцией Брэгга. При этом дифрагируют только гармоники первого порядка, т. е. спектральные составляющие с частотами $\Omega \pm \omega$.

Применительно к брэгговской геометрии сформулированные выше свойства дифракции Бриллюэна – Мандельштама определяются следующим образом.

1. Интенсивность единственного отклоненного светового луча прямо пропорциональна амплитуде продольных волн в ультразвуковом пучке.

2. Угол отклонения единственного луча прямо пропорционален частоте ультразвуковой волны.

3. Частота отклоненного светового луча отличается от частоты падающего светового луча на частоту смены знака напряженно-деформированного состояния в ультразвуковой волне.

Первое свойство дифракции Брэгга используется в модуляторах световых лучей, второе – в дефлекторах. Для дефлекторов с переменным и плавно регулируемым углом светового луча требуется генерация ультразвукового пучка, интенсивность которого не изменяется в пределах определенной полосы частот. Говоря иными словами, для изменения в определенных пределах угла отклонения светового луча, требуется излучатель ультразвуковых волн с постоянным коэффициентом передачи в определенной полосе частот.

Рациональное конструирование эффективно работающих акустооптических ячеек, прежде всего дефлекторов и модуляторов, должно, очевидно опираться на теоретически обоснованные рекомендации по выбору материалов и геометрических параметров элементов этих устройств. Эти рекомендации формируются на основе результатов исследования математической модели акустооптических ячеек.

В соответствии с определением академика Андрея Николаевича Тихонова [18] «Математическая модель - приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Математическая модель - мощный метод познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления. Анализ математической модели позволяет проникнуть в сущность изучаемых явлений».

Рассмотрим принципы построения математических моделей акустооптических ячеек.

2. Принципы построения математических моделей акустооптических ячеек

На рис. 2 схематически изображена конструкция типовой акустооптической ячейки.

Позицией 1 на рис. 2 показан оптически прозрачный кристалл, позиция 2 – ограниченная по размерам область кристалла, где реализуется режим бегущей ультразвуковой волны (область акустооптического взаимодействия). Позицией 3 обозначен поглотитель (демпфер) ультразвуковых волн, которые возбуждаются электроакустическим преобразователем (ЭАП), расположенном на противоположном торце кристалла (рис. 2).

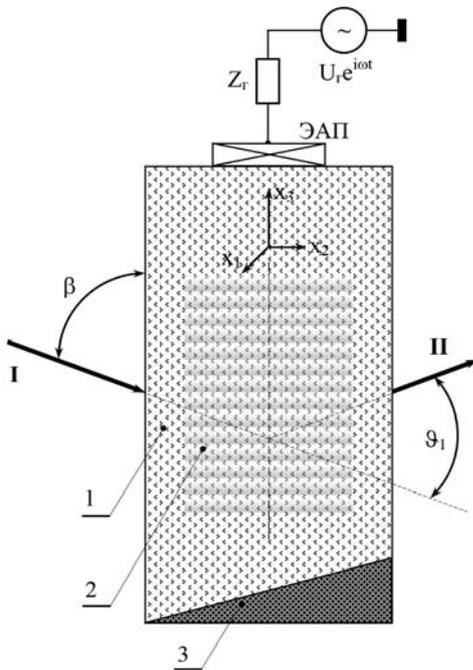


Рис. 2. Схематическая конструкция типовой акустооптической ячейки

Если падающий световой луч I пересекает несколько волновых фронтов ультразвукового пучка (рис. 2), то дифрагированный луч света II отклоняется от первоначальной ориентации на угол $\vartheta_1 = 2\beta$. Если амплитуду падающего светового луча обозначить символом A_0 , то амплитуда A дифрагированного определяется следующим образом [4]

$$\frac{A}{A_0} = \sin^2 \left(2\pi \ell \frac{|\Delta n|}{\Lambda_0} \right),$$

где Λ_0 - длина электромагнитной волны в вакууме (рис. 1); Δn - амплитудное значение модуляции коэффициента преломления.

Алгоритм преобразования сигналов в акустооптической ячейке с дифракцией Брэгга можно записать в следующем виде

$$A_0(\Omega_0, \beta) \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{ijkl}, \rho_0 \\ \rho_{qrmn}, \chi_{ij} \end{pmatrix} \Rightarrow A(\Omega_0 \pm \omega, \vartheta_1) \quad (10)$$

$$\uparrow$$

$$\bar{u}(x_k, \omega)$$

где $A_0(\Omega_0, \beta)$ - падающий под углом Брэгга β луч I с известной амплитудой A_0 и круговой частотой Ω_0 ; в круглых скобках в составе алгоритма (10) перечислены основные физико-механические параметры области акустооптического взаимодействия: модули упругости c_{ijkl} , плотность ρ_0 оптически прозрачного материала, фотоупругие константы ρ_{qrmn} и компоненты тензора диэлектрической проницаемости χ_{ij} ; символом $A(\Omega_0 \pm \omega, \vartheta_1)$ обозначен дифрагированный световой луч II; $\bar{u}(x_k, \omega)$ - вектор смещения материальных частиц области акустооптического взаимодействия.

Вообще говоря, параметры дифрагированного светового луча определяются в результате решения системы уравнений (9). Однако это решение предваряется определением кинематических характеристик волнового поля смещений материальных частиц оптически прозрачного кристалла. Полагая, что возбуждения ультразвуковых волн является линейным процессом, амплитудное значение гармонически изменяющегося во времени по закону $e^{i\omega t}$ вектора смещения материальных частиц можно, в общем случае, записать в следующем виде

$$\bar{u}(x_k, \omega) = U_r \bar{W}(x_k, \omega, \Pi), \quad (11)$$

где U_r - амплитуда разности электрических потенциалов на выходе генератора электрических сигналов (рис. 2) (Z_r - внутреннее сопротивление генератора); $\bar{W}(x_k, \omega, \Pi)$ - зависящая от частоты ω , координат x_k точки и набора физико-механических и геометрических параметров (символ Π) векторная функция, которую будем в дальнейшем называть передаточной характеристикой электроакустического преобразователя (аббревиатура ЭАП на рис. 2) акустооптической ячейки.

Если передаточная характеристика $\bar{W}(x_k, \omega, \Pi)$ известна, то построение математической модели акустооптической ячейки сво-

дится к решению системы уравнений (9). В процессе решения этой системы уравнений, который, надо сказать, является собой далеко нетривиальную математическую задачу, будут получены только лишь уточненные количественные оценки тех эффектов, которые были получены ранее Л. Бриллюэном, Ч. В. Раманом, Н. С. Н. Натом и С. М. Рытовым в тридцатых годах прошлого века. Новых, в качественном смысле, особенностей акустооптического взаимодействия в решениях системы уравнений (9) не будет. Это утверждение, без каких-либо оговорок, справедливо для продольных объемных волн. Можно предположить, что решения системы уравнений (9) для пучков ультразвуковых сдвиговых волн будут содержать какие-то новые результаты, но это маловероятно.

Следует заметить, что начиная с теоретических работ Л. Бриллюэна и по настоящее время, предполагается, что в объеме оптически прозрачного кристалла распространяются исключительно продольные объемные волны. Это было правдой до недавних пор, пока в качестве электроакустических преобразователей применялись пьезоэлектрические пленки [4]. Эти преобразователи обеспечивали возбуждение продольных волн в частотном диапазоне, верхняя граничная частота которого не превышала 300 МГц. В лучших современных образцах акустооптических ячеек используются ультразвуковые пучки гигагерцового частотного диапазона.

Существенное увеличение частоты смены знака напряженно-деформированного состояния оптически прозрачного кристалла было обеспечено применением электродных структур, которые размещались на поверхности пьезоэлектрического, оптически прозрачного, монокристалла. Вначале использовались сэндвичи из оптически прозрачных материалов и пьезоэлектрических кристаллов (см. библиографию в монографии [8]). Затем, в конце прошлого столетия, начали применяться оптически прозрачные пьезоэлектрики (яркий пример – ниобат лития LiNbO₃), в которых объемные ультразвуковые волны возбуждаются электродными структурами, расположенными на поверхности монокристалла (см., например, [9]).

Если во времена использования пленочных электроакустических преобразователей существовали хоть какие-то оценки передаточной характеристики $\vec{W}(x_k, \omega, \Pi)$ преобразователя (см., например, раздел 1 в монографии [4]), то сейчас, когда практически повсеместно применяются электродные структуры, таких оценок, пусть даже приближенных, не существует. Яр-

ким доказательством отсутствия физически содержательной теории возбуждения объемных ультразвуковых волн с поверхности пьезоэлектрических кристаллов являются патенты на изобретение новых конструкции акустооптических ячеек (см., например, патент Российской Федерации №2337387 [16]).

В сложившейся ситуации, когда фактически отсутствует физически содержательная теория возбуждения высокочастотных объемных волн с поверхности пьезоэлектрических кристаллов, принципиальным моментом математического моделирования акустооптических ячеек является математическое описание процесса преобразования следующих сигналов

$$U_r \Rightarrow \vec{u}(x_k, \omega) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} c_{ijk\ell}^E, \rho_0 \\ p_{qrmn}, \chi_{ij}^E, e_{kmn} \end{array} \right) \Rightarrow \Delta\chi_{ij}, (12)$$

где $c_{ijk\ell}^E$ - компонент тензора модулей упругости, экспериментально определенный в режиме постоянства (равенства нулю) напряженности электрического поля; χ_{ij}^E - элемент матрицы тензора диэлектрических проницаемостей, экспериментально определяемый в режиме постоянства (равенства нулю) упругих деформаций; e_{kmn} - компонент тензора пьезоэлектрических констант оптически прозрачного материала.

При этом для продольных упругих волн декларируется следующий принцип: качественные и количественные оценки различных аспектов дифракции Брэгга, полученные в результате решения уравнения дифракции (системы уравнений (9)), уже известны. В данной ситуации математическое моделирование акустооптической ячейки сводится к построению математической модели канала преобразования $U_r \Rightarrow \Delta\chi_{ij}$, который описывается алгоритмом (12).

Очевидно, что электродные структуры возбуждают не только продольные, но и сдвиговые волны. В этом случае также необходимо построить математическую модель ультразвукового тракта, т. е. канала преобразования сигналов $U_r \Rightarrow \Delta\chi_{ij}$ для сдвиговых волн. Если изменения диэлектрической проницаемости $\Delta\chi_{ij}^S$, обусловленные сдвиговыми волнами (символ s), окажутся соизмеримыми с изменениями $\Delta\chi_{ij}^E$, которые обеспечиваются продольными волнами (символ ℓ), то возникает необходимость в моделировании оптического тракта

акустооптической ячейки, т. е. в решении системы уравнений (9).

Как в случае продольных, так и в случае поперечных (сдвиговых) объемных волн, в процессе математического моделирования акустооптических ячеек на передний план выдвигается задача о возбуждении гармонических волн в упругом пьезоэлектрическом полупространстве электрическими полями, которые создаются электродными структурами, расположенными на поверхности этого полупространства.

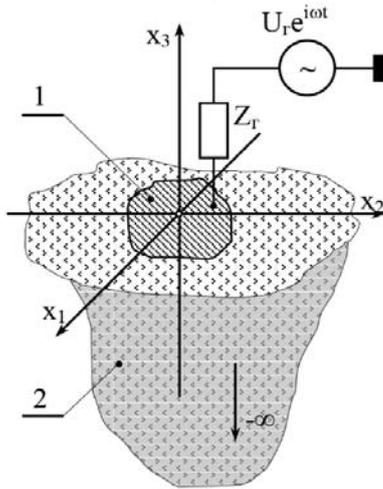


Рис. 3. К постановке задачи о возбуждении объемных волн

На рис. 3 схематически изображен электрод (позиция 1) на поверхности упругого полупространства (позиция 2). К электроду подключен генератор переменного электрического напряжения, который сообщает электроду изменяющийся во времени электрический заряд. Электрический заряд является источником переменного электрического поля, напряженность которого в объеме пьезоэлектрического полупространства будем обозначать вектором $\vec{E}^*(x_k)e^{i\omega t}$. Сформированное внешним устройством электрическое поле взаимодействует с ионами пьезоэлектрика и вынуждает их совершать колебательные движения относительно первоначального равновесного положения. Обмен импульсом между материальными частицами пьезоэлектрика порождает упругую волну. Амплитудные значения компонентов $u_j(x_k, \omega)$ вектора смещения материальных частиц удовлетворяют уравнениям установившихся гармонических колебаний, которые записываются следующим образом

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho_0 \omega^2 u_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (13)$$

где σ_{ij} - амплитуда гармонически изменяющегося во времени по закону $e^{i\omega t}$ компонента тензора упругих напряжений, который определяется обобщенным законом Гука для упругих сред с пьезоэлектрическими эффектами [12] следующим образом

$$\sigma_{ij} = c_{ijk\ell}^E \frac{\partial u_\ell}{\partial x_k} - e_{kij} (E_k^* + E_k). \quad (14)$$

В определении (14) символом E_k обозначено амплитудное значение k -го компонента вектора напряженности внутреннего электрического поля, которое возникает в деформируемом пьезоэлектрике из-за смещения ионов из положения равновесия.

Электрическое состояние деформируемого пьезоэлектрика определяется законом электрической поляризации диэлектриков с пьезоэлектрическими свойствами, который записывается в следующем виде

$$D_i = e_{imn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \chi_{in}^E (E_n^* + E_n). \quad (15)$$

Амплитудные значения векторов электрической индукции и напряженности электрического поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, которые для среды с нулевой электрической проводимостью записываются следующим образом

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial H_k}{\partial x_j} = i\omega D_i, \quad (16)$$

$$\varepsilon_{mni} \frac{\partial E_i}{\partial x_n} = -i\omega B_m. \quad (17)$$

Можно показать [13], что для идеальных диэлектриков система уравнений (16) и (17) сводится к следующим условиям:

$$\text{div} \vec{D} = 0, \quad \text{rot} \vec{E} = 0, \quad (18)$$

откуда следует, что внутреннее электрическое поле носит потенциальный характер и может быть определено через скалярный потенциал Φ^{in} обычным образом, т. е. $E_k = -\partial \Phi^{\text{in}} / \partial x_k$.

Уравнение (13) после подстановки в него выражения (14) принимает следующий вид

$$c_{ijk\ell}^E \frac{\partial^2 u_\ell}{\partial x_k \partial x_i} + e_{kij} \frac{\partial^2 \Phi^{\text{in}}}{\partial x_k \partial x_i} + \rho_0 \omega^2 u_j = f_j^*, \quad (19)$$

где $f_j^* = e_{kij} (\partial E_k^* / \partial x_i)$ - амплитудное значение j -го компонента вектора объемной плотности сил Кулона, т.е. сил, с которыми созданное

внешними источниками электрическое поле взаимодействует с ионами пьезоэлектрика.

Условие отсутствия электрической проводимости, т.е. условие $\text{div} \vec{D} = 0$, в скалярной форме записи имеет следующий вид

$$\text{div} \vec{D} = \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = e_{imn} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_n \partial x_i} - \chi_{in}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 \Phi^{in}}{\partial x_n \partial x_i} = 0. \quad (20)$$

Для того, чтобы понять роль внутреннего электрического поля в процессе деформирования пьезоэлектрика, рассмотрим модельный пример.

Предположим, что в объеме пьезоэлектрика распространяется плоская электроупругая волна, фазовый множитель которой задается с помощью функции $F(t - \vec{n} \cdot \vec{r}/v)$, где \vec{n} - вектор единичной нормали к поверхности равных фаз, т.е. к фронту плоской волны; \vec{r} - радиус-вектор с проекциями x_k , проведенный из начала координат в произвольную точку с координатами x_k на поверхности фронта; v - скорость перемещения фронта волны (фазовая скорость). Значения компонентов вектора смещения и электрического потенциала в произвольной точке на поверхности равных фаз определяются следующим образом

$$u_{\ell}(x_k, t) = U_{\ell} F\left(t - \frac{n_j x_j}{v}\right),$$

$$\Phi^{in}(x_k, t) = \Phi_0^{in} F\left(t - \frac{n_j x_j}{v}\right), \quad (21)$$

Подставляя определения (21) в уравнения (19) и (20), и учитывая при этом, что слагаемое $\rho_0 \omega^2 u_j \equiv -\rho_0 \partial^2 u_j / \partial t^2$, получаем

$$c_{ijkl}^E \frac{n_k n_i}{v^2} U_{\ell} F''\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v}\right) + e_{kij} \frac{n_k n_i}{v^2} \Phi_0^{in} F''\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v}\right) - \rho_0 U_j F''\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v}\right) = f_j^* \quad (22)$$

$$e_{imn} \frac{n_n n_i}{v^2} U_m F''\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v}\right) - \chi_{in}^{\varepsilon} \frac{n_0 n_i}{v^2} \Phi_0^{in} F''\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v}\right) = 0, \quad (23)$$

где запись $F''(t - \vec{n} \cdot \vec{r}/v)$ означает вторую производную фазовой функции по сложному аргументу $(t - \vec{n} \cdot \vec{r}/v)$.

Из уравнения (23) следует, что

$$\Phi_0^{in} = \frac{1}{\alpha_0} q_m U_m,$$

где $\alpha_0 = \chi_{in}^{\varepsilon} n_i n_n$; $q_m = e_{imn} n_i n_n$.

Подставляя найденное значение электрического потенциала Φ_0^{in} в уравнение (22) и принимая при этом во внимание, $q_m U_m \equiv q_{\ell} U_{\ell}$, получаем

$$\left[\frac{1}{v^2} \Gamma_{j\ell} U_{\ell} - \rho_0 U_j \right] F''\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v}\right) = f_j^*,$$

где $\Gamma_{j\ell} = c_{ijkl}^E n_k n_i + [(e_{kij} n_k n_i)(e_{\ell ij} n_j n_i)] / \alpha_0$, т.е. исходные модули упругости c_{ijkl}^E получают определенную добавку.

Увеличение жесткости деформируемого пьезоэлектрика вполне понятно и без проделанных выше вычислений. Внешним силам, которые деформируют пьезоэлектрик, противостоят силы упругости и силы Кулона, которые возникают в результате взаимодействия внутреннего электрического поля с ионами пьезоэлектрика. При этом силы Кулона внутреннего электрического поля пытаются вернуть ионы на места их равновесного расположения.

Вклад сил Кулона внутреннего электрического поля в эффективные модули упругости для природных оптически прозрачных пьезоэлектриков невелик. Относительная величина поправок, обусловленных силами Кулона внутреннего электрического поля, не превышает 15%.

Таким образом, сложное в плане формулировки граничных условий для внутреннего электрического поля, совместное решение системы уравнений (19), (20) позволяет получить точный результат относительно искомых компонентов $u_k(x_k, \omega)$ вектора смещения материальных частиц пьезоэлектрика.

Если пренебречь самим фактом существования внутреннего электрического поля, т.е. положить $\Phi^{in} = 0$, то электрическое состояние деформируемого пьезоэлектрика не определяется, а компоненты вектора смещения определяются как решения следующей системы уравнений

$$c_{ijkl}^E \frac{\partial^2 u_{\ell}}{\partial x_k \partial x_i} + \rho_0 \omega^2 u_j = f_j^*. \quad (24)$$

На поверхности пьезоэлектрика, т.е. в плоскости $x_3 = 0$ должен выполняться третий закон Ньютона, что эквивалентно записи следующих граничных условий

$$\left(\sigma_{3j} - \sigma_{3j}^* \right) \Big|_{x_3=0} = 0, \quad (25)$$

где $\sigma_{3j}^* = e_{k3j} E_k^*$ - поверхностная плотность сил Кулона электрического поля созданного внешними источниками.

Соотношения (24) и (25) образуют граничную задачу динамической теории упругости о возбуждении ультразвуковых волн системой объемных и поверхностных нагрузок. Эта задача сравнительно просто решается с помощью преобразований Ханкеля; проблемы возникают на этапе обратного преобразования. Результаты решения представляют собой приближенную, с погрешностью не более 10% - 15%, оценку реального волнового поля смещений материальных частиц пьезоэлектрика.

История изучения дифракции световых лучей на ультразвуковых пучках является постоянно примерами тому, как удивительно хорошо работают оценки реальных процессов, которые построены на основе исследования модельных ситуаций.

Это обстоятельство позволяет сделать еще один шаг в сторону упрощения процедуры формирования оценок параметров ультразвукового пучка.

В качестве нулевого приближения к реальной ситуации можно заменить реальный, анизотропный по упругим свойствам, пьезоэлектрик изотропным твердым телом, в котором скорость распространения продольной волны v_ℓ приблизительно равна скорости распространения (в определенной группе направлений) квазипродольной волны. При этом скорость распространения поперечной (сдвиговой) волны равна усредненной скорости распространения двух квазипоперечных волн.

Привлекательность такого подхода к оценке параметров ультразвукового пучка заключается в простоте решения дифференциальных уравнений установившихся колебаний.

Действительно, в изотропном твердом теле справедливое во всех случаях жизни представление Гельмгольца [11] вектора смещения материальных частиц

$$\vec{u} = \text{grad}\Phi + \text{rot}\vec{\Psi}, \quad (26)$$

где Φ и $\vec{\Psi}$ - скалярный и векторный потенциалы поля смещений материальных частиц упругой среды, дополненное условием $\text{div}\vec{\Psi} = 0$, обращает систему уравнений (24) в систему одноптипных уравнений Гельмгольца следующего вида

$$\nabla^2\Phi + k_\ell^2\Phi = \frac{\Phi^*}{\lambda + 2G}, \quad (27)$$

$$\nabla^2\vec{\Psi} + k_s^2\vec{\Psi} = \frac{\vec{\Psi}^*}{G}, \quad (28)$$

где $k_\ell = \omega/v_\ell$ - волновое число продольных волн; $v_\ell = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho_0}$ - скорость продольных волн; λ и G - константы Ламе; $k_s = \omega/v_s$ - волновое число сдвиговых волн; $v_s = \sqrt{G/\rho_0}$ - скорость распространения волн сдвига; Φ^* и $\vec{\Psi}^*$ - скалярный и векторный потенциалы поля объемной плотности сил Кулона.

Потенциалы Φ^* и $\vec{\Psi}^*$ сравнительно просто определяются по известным амплитудным значениям компонентов вектора объемной плотности сил Кулона.

Запишем представление Гельмгольца для вектора объемной плотности сил Кулона

$$\vec{f}^* = \text{grad}\Phi^* + \text{rot}\vec{\Psi}^*. \quad (29)$$

Вычисляя дивергенцию от левой и правой частей определения (29), получаем уравнение Пуассона, которое определяет аналитические свойства скалярного потенциала Φ^* :

$$\nabla^2\Phi^* = \text{div}\vec{f}^*. \quad (30)$$

Полагая, что выполняется условие $\text{div}\vec{\Psi}^* = 0$, после вычисления ротора от левой и правой частей выражения (29), получаем уравнение Пуассона следующего содержания

$$\nabla^2\vec{\Psi}^* = -\text{rot}\vec{f}^*. \quad (31)$$

Единственность решения уравнений (27) и (28) обеспечивается граничными условиями (25).

Полученные в результате решения уравнений (27) и (28) потенциалы позволяют определить компоненты векторов смещения материальных частиц в продольной и сдвиговой волне с погрешностью, которая, как представляется, не превышает 25% относительно реальных значений тех же величин.

Таким образом, передаточная характеристика $\vec{W}(x_k, \omega, \Pi)$ электродной структуры, которая генерирует ультразвуковые волны в объеме оптически прозрачного пьезоэлектрического кристалла, может быть определена одним из трех способов, а именно:

а) путем решения уравнений (27) и (28) с граничными условиями (25) - нулевое приближение к реальной аналитической конструкции функции $\vec{W}(x_k, \omega, \Pi)$;

б) путем решения граничной задачи (24), (25) – первое приближение;

в) путем решения системы уравнений (19), (20) с граничными условиями (25) и с соответствующими условиями для компонентов вектора напряженности внутреннего электрического поля на поверхности $x_3 = 0$ - точное решение.

Поскольку в настоящее время нет никаких оценок для функции $\vec{W}(x_k, \omega, \Pi)$, и по этой причине отсутствуют какие-либо внятные рекомендации по конструированию акустооптических ячеек, постольку надо начинать сначала, т. е. с нулевого приближения. Все последующие способы определения передаточной характеристики $\vec{W}(x_k, \omega, \Pi)$ будут, надо полагать, только лишь уточнять (в количественном смысле) результаты, которые содержатся в нулевом приближении.

Выводы

Показано, что качественные и количественные характеристики акустооптических ячеек, в которых реализуется дифракция Брэгга, определяются кинематическими параметрами ультразвукового пучка. Характеристики ультразвукового поля целиком и полностью определяются передаточными характеристиками электроакустического преобразователя, который генерирует ультразвуковые волны в оптически прозрачном кристалле. Сделан вывод о принципиальной важности математического моделирования передаточных характеристик электроакустических преобразователей вообще и электродных структур в частности. Предложены схемы построения математических моделей электродных структур.

Список использованных источников

1. *Antoni Torras-Rosell, Salvador Barrera-Figueroa, Finn Jacobsen.* Sound field reconstruction using acousto-optic tomography // J. Acoust. Soc. Am. 131, pp. 3786 – 3793 (2011).
2. *Hua Ma, Shaobo Qu, and Zhuo Xu.* Photonic crystals based on acousto-optic effects. // Journal of Applied Physics, V.103, 2008.
3. *M. Beck, M. M. de Lima Jr., E. Wiebicke, W. Seidel, R. Hey, and P. V. Santos.* Acousto-optical multiple interference switches. // Applied Physics Letters V.91, 2007.
4. *Royer D., Dieulesaint E.* Elastic Waves in Solids. V. II. Generation, Acousto-optic Interaction, Applications. – Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. – 446 p.

5. *S Dupont, J C Kastelik, F Causa.* Wide-band acousto-optic deflectors with high efficiency for visible range fringe pattern projector. // Review of Scientific Instruments V.78, 2007.
6. *Shaoqun Zeng, Kun Bi, Songchao Xue, Yujing Liu, Xiaohua Lv.* Acousto-optic modulator system for femtosecond laser pulses // Review of Scientific Instruments V.78, 2007.
7. *Xiaohua Lv, Chen Zhan, Shaoqun Zeng, Wei R. Chen, and Qingming Luo.* Construction of multiphoton laser scanning microscope based on dual-axis acoustooptic deflector. // Review of Scientific Instruments V.77, 2006.
8. *Balakshiy V. I., Parygin V. N., Chirkov L. Ye.* (1983) "Physical basis of acousto-optics". Moscow, Radio i svyaz. – P. 280.
9. *Краковский В.А.* Возбуждение объемных упругих волн с поверхности пьезокристалла симметрии 3m // Известия ВУЗов. Физика. – 1997. – Т.40. - №5. – С. 27 – 34.
10. *Нарасимхамурти Т.* Фотоупругие и электрооптические свойства кристаллов. – М.: Мир, 1984. – 624 с.
11. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 873 с.
12. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
13. *Петрищев О.Н.* Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса. Киев: Аверс, 2012. – 300 с.
14. *Пирозерский А.Л., Чарная Е.В.* Особенности затухания ультразвука в кристалле LiIО3 // Акустический журнал, 2006. Т. 52, №1. С. 87-90
15. *Поликарпова Н. В.* Распространение и отражение объемных упругих волн в акустооптических кристаллах: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук: 01.04.03 / Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. - Москва, 2007 22 с.
16. *Раздобудько В.В., Пивоваров И.И., Волик Д.П., Пилипенко М.И.* Акустооптический дефлектор. Патент Российской Федерации RU 2337387 С2. Заявка № 2006140742.28 от 17.11.2006 г. Опубликовано 27.10.2008 г.
17. *Резвов Ю. Г.* Исследование акустооптического квазиколлинеарного брэгговского взаимодействия пучков в анизотропной среде: Автореф. дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук : 01.04.03 / Ю.Г. Резвов; Рос. хим.-технол. ун-т им. Д.И. Менделеева. - Новомосковск, 2001. - 21 с.
18. *Тихонов А.Н.* Математическая модель. – в кн. Математическая энциклопедия, т.3, Коо –Од., Ст. 574 -575. – М.: Советская энциклопедия, 1982.

Поступила в редакцию 20 мая 2015 г.

УДК 535:534.232-8

А.В. Богдан¹, кан. техн. наук, **А.Н. Михеева**², **О.Н. Петрищев**², д.-р. техн. наук

¹Науково-дослідний інститут прикладної електроніки,

вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

²Національний Технічний Університет України «Київський Політехнічний Інститут»,

вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

Принципи математичного моделювання акустооптичних комірок

Конспективно викладено основні факти феномена дифракції світлових променів на ультразвукових пучках. Показано, що подальше вдосконалення параметрів і технічних показників дефлекторів і модуляторів світлових променів принципово неможливо без побудови та дослідження математичної моделі випромінювача ультразвукових хвиль. Запропоновано три версії побудови математичної моделі, що відрізняються точністю кількісних оцінок, тобто передавальної характеристики; ультразвукового перетворювача у вигляді електродної структури, розташованої на поверхні оптично прозорого п'єзоелектричного кристала. Бібл. 18, рис.3.

Ключові слова: акустооптика; акустооптична комірка; дефлектор; модулятор; математична модель; ультразвуковий перетворювач.

UDC 534.131.1:534.232.082.73

A. Bohdan¹, Ph.D., **A. Mykheeva**², **O. Petryshchev**², Dr.Sc.

¹Research Institute of applied electronics, st. Polytechnique, 16, Kyiv, Ukraine, 03056.

²National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",

st. Polytechnique, 16, Kyiv, Ukraine, 03056.

Principles of acousto-optical cells mathematical modeling

In article is shortly outlined basic facts of the light rays diffraction on the ultrasonic beam.

It is shown that further improvement of parameters and technical characteristics deflectors and modulators of light rays is impossible without creating of mathematical model of the radiator of ultrasonic waves.

Three version of constructing of mathematical model was offered that are different in accuracy of quantitative estimations. Also was offered model of ultrasonic transducer in form of electrode structure situated on the surface of an optically transparent piezoelectric crystal. References 18, figures 3.

Keywords: acousto-optics; acousto-optic cell; deflector; modulator; mathematical model; ultrasonic transducer.

References

1. *Antoni Torras-Rosell, Salvador Barrera-Figueroa, Finn Jacobsen.* (2011). Sound field reconstruction using acousto-optic tomography. J. Acoust. Soc. Am. 131, pp. 3786 – 3793.
2. *Hua Ma, Shaobo Qu, and Zhuo Xu.* (2008). Photonic crystals based on acousto-optic effects. Journal of Applied Physics, Vol.103.
3. *Beck, M., de Lima Jr, M. M., Wiebicke, E., Seidel, W., Hey, R., and Santos, P. V.* (2007). Acousto-optical multiple interference switches. Applied Physics Letters Vol.91.
4. *Royer, D., Dieulesaint, E.* (2000). Elastic Waves in Solids. V. II. Generation, Acousto-optic Interaction, Applications. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, P. 446.
5. *Dupont, S., Kastelik, J. C., Causa, F.* (2007). Wide-band acousto-optic deflectors with high efficiency for visible range fringe pattern projector. Review of Scientific Instruments Vol.78.
6. *Shaoqun Zeng, Kun Bi, Songchao Xue, Yujing Liu, Xiaohua Lv.* (2007). Acousto-optic modulator system for femtosecond laser pulses. Review of Scientific Instruments Vol.78.
7. *Xiaohua, Lv., Chen Zhan, Shaoqun Zeng, Wei, R., Chen, and Qingming Luo.* (2006). Construction of multiphoton laser scanning microscope based on dual-axis acoustooptic deflector. Review of Scientific Instruments Vol.77.

8. *Balakshiy, V. I., Parygin, V. N., Chirkov, L. Ye.* (1983). Physical basis of acousto-optics. Moscow, Radio i svyaz.. P. 280 (Rus).
9. *Krakovskiy, V.A.* (1984). Excitation of bulk elastic waves from the surface of the piezoelectric crystal symmetry 3m". Proceedings of Higher Education. Physics, Vol.40, No.5. Pp. 27 – 34. (Rus)
10. *Narasimkhamurti, T* (1984). Photoelastic and electro-optical properties of crystals. Moscow, Mir. P. 624. (Rus)
11. *Novatskiy, V.* (1975). Theory of elasticity. Moscow, Mir. P. 875 . (Rus)
12. *Novatskiy, V.* (1986). Electromagnetic effects in solids. Moscow, Mir. P. 160. (Rus)