МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.968

А.С. Апарцин, д-р физ.-мат. наук
Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН
(Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130,
тел. (3952) 426796, e-mail: apartsyn@isem.sei.irk.ru)

Неклассические уравнения Вольтерры I рода в интегральных моделях развивающихся систем *

Получены достаточные условия существования и единственности непрерывного решения линейного неклассического уравнения типа Вольтерры, возникающего в интегральных моделях развивающихся систем. Рассмотрены некоторые уравнения Вольтерры I рода с кусочно-гладкими ядрами. Дан анализ тестовых задач, позволяющий понять специфику пока недостаточно исследованных интегральных уравнений.

Отримано достатні умови існування і єдиності неперервного розв'язку лінійного некласичного рівняння типа Вольтерри, яке виникає в інтегральних моделях систем, що розвиваються. Розглянуто деякі рівняння Вольтерри I роду з кусково-гладкими ядрами. Подано аналіз тестових задач, який дозволяє зрозуміти специфіку поки що недостатньо досліджених інтегральних рівнянь.

Ключевые слова: *неклассические уравнения Вольтерры I рода, достаточные условия, разрывное ядро.*

В 1977 г. В.М. Глушковым введен новый класс интегральных моделей развивающихся систем [1]. «Визитной карточкой» таких моделей являются операторы Вольтерры с переменными нижними пределами интегрирования, отражающими динамику замены устаревших элементов системы новыми. В дальнейшем этот подход получил всестороннее развитие и нашел обширную область приложений [2—4]. В простейшем односекторном варианте, когда в моделируемой системе отсутствует специальная подсистема развития, модель В.М. Глушкова сводится к решению интегрального уравнения Вольтерры I рода

$$\int_{a(t)}^{t} K(t,s)\,x(s)\,ds = y(t),\ t\in[0,T]. \qquad (1)$$

Будем называть такие уравнения неклассическими, чтобы подчеркнуть их отличие от стандартных уравнений Вольтерры I рода, у которых перемен-

* Работа поддержана РФФИ, грант № 12-01-00722а.

ным является лишь верхний предел интегрирования [5, 6]. Теория и численные методы решения (1) для случаев $a(0)<0$ и $a(0)=0$ имеют существенные отличия и детально рассмотрены в работах [5, 6].

В последнее время внимание исследователей привлекло уравнение [7, 8]

$$\sum_{i=1}^{n} V_i x \equiv \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t,s)\, x(s)\, ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

где $a_i(0)=0,\ i=\overline{0,n},\ 0 \le a_n(t) < a_{n-1}(t) < \ldots < a_0(t) \equiv t\ \forall t>0,\ a_1'(0)<1$. Если под $t-s$ понимать возраст в момент времени t элементов системы $x(s)$, а под K_i — коэффициент эффективности функционирования элементов i-й возрастной группы, то конструкция (2) позволяет моделировать динамику развития системы с учетом старения, а следовательно, снижения эффективности функционирования ее элементов. Правая часть (2) при этом представляет интегральный показатель уровня развития системы, например системы электроэнергетики, т.е. суммарную мощность электростанций.

При $n=1$ уравнение (2) преобразуется в (1). Ограничимся исследованием случая, когда в (2) $n=2$,

$$\begin{gathered} V_1 x + V_2 x \equiv \int_{a_1(t)}^{t} K_1(t,s)\, x(s)\, ds + \int_{0}^{a_1(t)} K_2(t,s)\, x(s)\, ds = y(t), \quad t \in [0,T], \\ a_1(t)>0,\ a_1'(t)>0,\ \forall t>0,\ a_1(0)=0,\ a_1'(0)<1, \end{gathered} \tag{3}$$

хотя достаточные условия корректной разрешимости (3) в пространстве $C_{[0,T]}$ легко обобщаются на случай произвольного n.

Достаточные условия существования и единственности решения уравнения (3) в пространстве $C_{[0,T]}$. Пусть ядра K_1 и K_2 непрерывны по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемы по t в областях соответственно $\Delta_1 = \{(t,s):\ 0 \le a_1(t) \le s \le t \le T\}$ и $\Delta_2 = \{(t,s):\ 0 \le s \le a_1(t)\}$ так, что $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta,\ \Delta = \{(t,s): 0 \le s \le t \le T\},\ \Delta_1 \cap \Delta_2 = l,\ l = \{(t,s): s = a_1(t)\}$.

Под $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]}$ далее будем понимать пространство непрерывно дифференцируемых на [0, T] функций $y(t)$ с нормой

$$\| y(t) \|_{\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]}} = \max_{0 \le t \le T} \{ |y(t)| + |y'(t)| \} \tag{4}$$

и дополнительным условием $y(0)=0$. Если

$$\min_{t \in [0,T]} |K_1(t,t)| = k > 0, \tag{5}$$

то справедлива следующая оценка [5, с. 131]:

$$\left\| V_1^{-1} \right\|_{\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]} \to C_{[0,T]}} \le S k^{-1} e^{k^{-1} L_1 T}, \tag{6}$$

где

$$L_1 = \max_{(t,\, s)\in\Delta_t} |K'_{1_t}(t,s)|,\ S = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{j} \gamma_i \ge 1,\ \gamma_i = \beta_i + (z_i - z_{i+1}) L_1 k^{-1},$$

$$z_i = a_1^i(T) = a_1(a_1(\ldots a_1(T))),\ a_1^0(T) = T,\ \beta_i = \max_{t\in[z_i,\, z_{i-1}]} \frac{a_1'(t)\,|K_1(t,a(t))|}{|K_1(t,t)|}.$$

Оценка (6) позволяет получить достаточное условие существования, единственности и устойчивости решения уравнения (3) на паре ($C_{[0,T]}$, $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]}$) как следствие известной теоремы функционального анализа [9, с. 212].

Теорема 1. Если линейный ограниченный оператор V_1, отображающий банахово пространство B_1 на банахово пространство B_2, имеет ограниченный обратный оператор V_1^{-1}, а линейный ограниченный оператор V_2, действующий из B_1 в B_2, удовлетворяет условию

$$\| V_2 \|_{B_1 \to B_2} < \frac{1}{\left\| V_1^{-1} \right\|_{B_2 \to B_1}},$$

то оператор $V = V_1 + V_2$ также имеет ограниченный обратный оператор.

Следовательно, для того чтобы получить достаточные условия корректности по Адамару уравнения (3) на паре ($C_{[0,T]}$, $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]}$), необходимо оценить $\| V_2 \|_{C_{[0,T]} \to \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]}}$.

Введем обозначения

$$A_1 = \max_{t\in[0,\,T]} a_1'(t),\ M_2 = \max_{(t,s)\in\Delta_2} |K_2(t,s)|,\ L_2 = \max_{(t,s)\in\Delta_2} |K_2'(t,s)|.$$

Тогда

$$\| V_2 x \|_{\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]}} = \max_{0\le t\le T} \left\{ \left| \int_0^{a_1(t)} K_2(t,s)\, x(s)\, ds \right| + \left| a_1'(t)\, K_2(t, a_1(t)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^{a_1(t)} K_2'(t,s)\, x(s)\, ds \right| \right\} \le \{ a_1(T)(M_2 + L_2) + A_1 M_2 \} \| x(t) \|_{C_{[0,T]}},$$

откуда

$$\| V_2 \|_{C_{[0,T]} \to \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]}} \le a_1(T)(M_2 + L_2) + A_1 M_2. \tag{7}$$

Таким образом, из теоремы 1 и оценок (6), (7) вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнено неравенство

$$a_1(T)(M_2+L_2)+A_1 M_2 < kS^{-1}e^{-k^{-1}L_1 T}. \tag{8}$$

Тогда уравнение (3) корректно по Адамару на паре $(C_{[0,T]}, \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]})$.

Условие (8) получено в предположении, что ядро K_1 определено на Δ_1. Если можно расширить область определения K_1 до Δ так, что $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \Delta \cap \Delta_2 = \Delta_2$, то достаточное условие корректности (3) модифицируется следующим образом. Представим первое слагаемое в (3) в виде

$$\int_{a_1(t)}^{t} K_1(t,s)\,x(s)\,ds = \int_0^t K_1(t,s)\,x(s)\,ds - \int_0^{a_1(t)} K_1(t,s)\,x(s)\,ds.$$

Тогда (3) примет вид

$$\hat{V}_1 x + \hat{V}_2 x \equiv \int_0^t K_1(t,s)\,x(s)\,ds + \int_0^{a_1(t)} (K_2(t,s) - K_1(t,s))\,x(s)\,ds, \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$\hat{L}_1 = \max_{(t,s)\in\Delta} |\hat{K}_1(t,s)|, \ \hat{M}_2 = \max_{(t,s)\in\Delta_2} |K_2(t,s) - K_1(t,s)|,$$

$$L_2' = \max_{(t,s)\in\Delta_2} |K_2'(t,s) - K_1'(t,s)|.$$

Поскольку [5, с. 12] $\left\| V_1^{-1} \right\|_{\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]} \to C_{[0,T]}} \le k^{-1} e^{-k^{-1}\hat{L}_1 T}$, достаточное условие корректности уравнения (9) вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнено неравенство

$$a_1(T)(\hat{M}_2 + \hat{L}_2) + A_1 \hat{M}_2 < ke^{-k^{-1}\hat{L}_1 T}. \tag{10}$$

Тогда уравнение (3) корректно по Адамару на паре $(C_{[0,T]}, \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]})$.

Замечание 1. В общем случае константы, входящие в (8), (10), являются неубывающими функциями параметра T, поэтому неравенства (8), (10) можно трактовать как ограничения на величину T. Локальность существования непрерывного решения является типичным свойством полиномиальных уравнений Вольтерры I рода [10—13], в которых важную роль играет функция Ламберта [14, 15]. Характер нелинейности в (8), (10) также позволяет применить функцию Ламберта для получения гарантированной оценки снизу величины T как единственного вещественного корня соответствующего нелинейного уравнения.

Замечание 2. Численные методы решения уравнений (2), (3) представляют самостоятельный интерес и заслуживают отдельного рассмотрения.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\int_{\alpha t}^{t} x(s)\,ds + \varepsilon \int_{0}^{\alpha t} x(s)\,ds = y(t),\ t \in [0, T]. \tag{11}$$

Здесь $k = 1$, $M_2 = |\varepsilon|$, $\hat{M}_2 = |1-\varepsilon|$, $L_1 = \hat{L}_1 = L_2 = 0$, $a_1(T) = \alpha T$, $A_1 = \alpha < 1$, $\gamma_i = \beta_i = \alpha$, $S = \dfrac{1}{1-\alpha}$. Поэтому согласно (8)

$$\alpha T |\varepsilon| + \alpha |\varepsilon| < 1 - \alpha, \tag{12}$$

а согласно (10)

$$\alpha T |1-\varepsilon| + \alpha |1-\varepsilon| < 1. \tag{13}$$

Неравенства (12), (13) дают соответствующие оценки ε, гарантирующие существование, единственность и устойчивость решения (11) в пространстве $C_{[0,T]}$:

$$|\varepsilon| < \frac{1-\alpha}{\alpha(1+T)},\quad |1-\varepsilon| < \frac{1}{\alpha(1+T)}. \tag{14}$$

Более точную оценку, чем (14), можно получить в результате дифференцирования (11) и перехода к эквивалентному функциональному уравнению

$$x(t) = \alpha(1-\varepsilon)\,x(\alpha t) + y'(t), \tag{15}$$

откуда

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j (1-\varepsilon)^j\, y'(\alpha^j t). \tag{16}$$

Условие

$$|1-\varepsilon| < 1/\alpha \tag{17}$$

гарантирует равномерную сходимость функционального ряда (16) к непрерывному на отрезке $[0, T]$ решению уравнения (11).

Уравнение (11) имеет важное методическое значение. Применительно к моделированию динамической системы, состоящей из двух возрастных групп элементов, параметр ε отражает эффективность функционирования старшей возрастной группы. При $\varepsilon = 1$ обе группы одинаково эффективны и решением (11) является функция $\bar{x}(t) = y'(t)$, неубывающая для успешно развивающейся системы. При $\varepsilon = 0$ вклад второй группы в показатель $y(t)$ равен нулю, а при $\varepsilon < 0$ вторая группа играет негативную роль, и для поддержания заданного темпа роста $y(t)$ необходим соответствующий рост $x(t)$. Наконец, при некотором критическом значении $\varepsilon^* < 0$ система идет «вразнос» и непрерывного решения на отрезке $[0, T]$ не существует. Если, в частности, в (11) $y(t) = t$, то при условии (17) в силу (16) решение $\bar{x}(t) = \dfrac{1}{1-\alpha(1-\varepsilon)}$ является непрерывным решением (11), а $\varepsilon^* = 1 - 1/\alpha$.

Уравнения Вольтерры I рода с разрывными ядрами. Специфика уравнения (2) позволяет представить его в форме интегрального уравнения Вольтерры I рода

$$\int_0^t K(t,s)\, x(s)\, ds = y(t), \quad t \in [0, T], \tag{18}$$

с разрывным ядром

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s), & a_1(t) < s \le t, \\ K_i(t,s), & a_i(t) < s < a_{i-1}(t),\ i = \overline{2, n-1}, \\ K_i(t,s) + K_{i+1}(t,s), & s = a_i(t),\ i = \overline{1, n-1}, \\ K_n(t,s), & 0 \le s < a_{n-1}(t). \end{cases}$$

Некоторые вопросы теории подобных уравнений рассмотрены в [8]. Для иллюстрации принципиального отличия подобных уравнений от классических линейных уравнений Вольтерры I рода с гладкими ядрами рассмотрим уравнение (11). Положим

$$K(t,s) = \begin{cases} 1, & \alpha t < s \le t, \\ 1+\varepsilon, & s = \alpha t, \\ \varepsilon, & 0 \le s < \alpha t, \end{cases} \tag{19}$$

где $\varepsilon \ne 0, 1$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда (11) примет вид (18). В частности, при $\alpha = 1/2$, $\varepsilon = \varepsilon^* = -1$ ядро (19) имеет вид

$$K(t,s) = \operatorname{sing}(s - t/2) = \begin{cases} 1, & s > t/2, \\ 0, & s = t/2, \\ -1, & s < t/2. \end{cases} \tag{20}$$

ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2014. V. 36. № 3

Решение уравнения

$$\int_{t/2}^{t} x(s)\,ds - \int_{0}^{t/2} x(s)\,ds = t, \quad t \in [0, T],$$

а следовательно, и уравнения (18) с ядром (20) и правой частью $y(t) = t$ приведено в [8]: $x(t) = \frac{\ln t}{\ln 2} + x(1)$.

Неединственность не является следствием равенства $K(0,0) = 0$, так как при $\alpha \neq 1/2$, $\varepsilon^* = 1 - 1/\alpha \neq -1$, и решением уравнения

$$\int_{\alpha t}^{t} x(s)\,ds + \varepsilon^* \int_{0}^{\alpha t} x(s)\,ds = t$$

является однопараметрическое семейство $x(t) = -\frac{\ln t}{\ln \alpha} + x(1)$, хотя при этом $K(0,0) = 1 + \varepsilon^*$, $K(t,t) = 1$, $t > 0$. Более того, неединственность возможна даже в случае $K(t,t) \equiv 1$, $t \in [0, T]$. Покажем это. Пусть вместо (19)

$$K(t,s) = \begin{cases} 1, & s \geq \alpha t, \\ \varepsilon, & s < \alpha t. \end{cases} \tag{21}$$

Теорема 4. Функциональное уравнение, эквивалентное(18) с ядром (21), совпадает с функциональным уравнением (15), эквивалентным (18) с ядром (19).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим (21) в виде

$$K(t,s) = 1 + (\varepsilon - 1)\,\mathbf{1}(\alpha t - s), \tag{22}$$

где $\mathbf{1}(\cdot)$ — функция Хевисайда,

$$\mathbf{1}(v) = \begin{cases} 1, v \geq 0, \\ 0, v < 0. \end{cases}$$

В результате подстановки (22) в (18) получаем

$$\int_{0}^{t} (1 + (\varepsilon - 1)\mathbf{1}(\alpha t - s))\,x(s)ds = y(t), \; t \in [0, T]. \tag{23}$$

Положим $\alpha t = z$. Тогда из (23) вытекает

$$\int_{0}^{z/\alpha} (1 + (\varepsilon - 1)\,\mathbf{1}(z - s))\,x(s)\,ds = y(z/\alpha), \quad t \in [0, T]. \tag{24}$$

После дифференцирования (24) по z запишем

$$\frac{1}{\alpha} x\left(\frac{z}{\alpha}\right)+(\varepsilon-1)\int\limits_0^{z/\alpha} \mathbf{1}'_Z\,(z-s)\,x(s)\,ds=\frac{1}{\alpha}\,y'\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

Здесь учтено, что $\mathbf{1}\left(z-\dfrac{z}{\alpha}\right)=0,$ так как $0<\alpha<1$. Но $\mathbf{1}'_Z\,(z-s)=\delta(z-s)$, где $\delta(\cdot)$ — δ-функция Дирака. Поэтому

$$\frac{1}{\alpha} x\left(\frac{z}{\alpha}\right)+(\varepsilon-1)\int\limits_0^{z/\alpha} \delta\,(z-s)\,x(s)\,ds=\frac{1}{\alpha}\,y'\left(\frac{z}{\alpha}\right), \tag{25}$$

и в силу известного свойства δ-функции из (25) получим

$$\frac{1}{\alpha} x\left(\frac{z}{\alpha}\right)+(\varepsilon-1)\,x(z)=\frac{1}{\alpha}\,y'\left(\frac{z}{\alpha}\right). \tag{26}$$

Наконец, умножая (26) на α и переходя к прежней переменной, приходим к уравнению (15). Теорема доказана.

Представляет интерес решение уравнения (18) в классе кусочно-непрерывных функций, имеющих, как и ядро, разрыв I рода на луче $s=\alpha t$, если трактовать ядро как переходную характеристику прибора. Если разрыв ядра считать дефектом прибора, то для получения гладкой функции $y(t)$, являющейся образом неизвестного объекта $x(t)$, естественно представить подынтегральную функцию как произведение двух разрывных при $s=\alpha t$ функций.

Легко видеть, что уравнению (18) с ядром (20) удовлетворяет кусочно-непрерывная функция

$$\hat{x}\,(t,s)=\begin{cases} y'(s), & s\geq \alpha t,\\ \dfrac{1}{\varepsilon}\,y'(s), & s<\alpha t,\end{cases}$$

а при $\varepsilon=\varepsilon^*=1-1/\alpha$ — семейство функций $x_c(t,s)=\hat{x}\,(t,s)+c$, $c=\mathrm{const}$. При этом, следуя теории некорректных задач, функцию $\hat{x}$ можно считать нормальным решением (18).

Иной путь получения решения (18) в данном классе связан с переходом от (15) к функциональному уравнению

$$x(s)=(1-\varepsilon)\,x(\alpha s)+y'(s),\quad 0\leq s<\alpha t. \tag{27}$$

Если непрерывное на $[0,\alpha t]$ решение (27) существует (обозначим его через $x^*(s)$), то оно заведомо единственно, и при этом $x^*(0)=\dfrac{y'(0)}{\varepsilon}$. Функция $x^*(s)$ при $0<\varepsilon<2$ определяется из формулы обращения (27):

$$x^*(s)=\sum_{j=0}^{\infty}(1-\varepsilon)^j\, y'(\alpha^j s). \tag{28}$$

Обозначим $y^*(t)=\varepsilon\int\limits_0^{\alpha t}x^*(s)\,ds$. Уравнение

$$\int\limits_{\alpha t}^{t}x(s)\,ds=y(t)-y^*(t),\ \ t\in[0,T], \tag{29}$$

имеет непрерывное на $[0,T]$ решение, так как правая часть (29) принадлежит $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,\,T]}$ [5]. Обозначим это решение через $x^{**}(t)$. Тем самым сконструировано кусочно-непрерывное решение (18) в виде

$$\bar{x}(t,s)=\begin{cases}x^{**}(t,s), & s\ge\alpha t,\\ x^*(t,s), & s<\alpha t.\end{cases} \tag{30}$$

Пусть теперь неравенство $0<\varepsilon<2$ не выполнено. Например, $\varepsilon=\varepsilon^*=$ $=1-1/\alpha$. Пусть также $y(t)\in C^{(2)}_{[0,\,T]}$, $y(0)=y'(0)=0$. Тогда, дифференцируя (27), переходим к эквивалентной задаче Коши для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом:

$$x'(s)=x'(\alpha s)+y''(s),\ \ x(0)=y'(0)=0,\ \ s<\alpha t. \tag{31}$$

Ее решение и примем в качестве $x^*(s)$ вместо (28). Если при некотором натуральном $k\ge1$ $(1-\varepsilon)\alpha^k=1$, $y(t)\in C^{(k+1)}_{[0,\,T]}$ и $y^{(i)}(0)=0$, $i=\overline{0,k}$, то k-кратным дифференцированием (27) придем к эквивалентной задаче Коши

$$x^{(k)}(s)=x^{(k)}(\alpha s)+y^{(k+1)}(s),\ \ y(0)=\ldots=y^{(k)}(0)=0,\ \ s\in[0,\alpha t), \tag{32}$$

а если $y(t)\in C^{(k+2)}_{[0,\,T]}$ и $y^{(i)}(0)=0$, $i=\overline{0,k+1}$, то

$$x^{*(k+1)}(s)=\sum_{j=0}^{\infty}[(1-\varepsilon)\,\alpha^{k+1}]^j\, y^{(k+2)}(\alpha^j s). \tag{33}$$

Пример. Пусть $\alpha = 1/2$, $\varepsilon = \varepsilon^* = -1$, $y(t) = t^2/2$. Здесь $k = 1$, так что согласно (31)

$$x'(s) = x'(s/2) + 1, \quad x(0) = 0, \quad s \in [0, t/2). \tag{34}$$

Нетрудно убедиться, что решение (34) имеет вид

$$x^*(s) = \frac{s(\ln s - 1)}{\ln 2}, \; x(0) = 0, \; s \in [0, t/2),$$

а решение уравнения (29), с учетом формулы обращения [5, с. 7], имеет вид

$$x^{**}(t) = \frac{16}{9} t - \frac{t \ln t}{3 \ln 2}.$$

Если $y(t) = t^p / p$, $p \geq 3$, то в силу (33)

$$x^{*''}(s) = (p-1)(p-2) s^{p-3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j} = \frac{4}{3} (p-1)(p-2) s^{p-3}.$$

Поэтому $x^*(s) = 4/3\, s^{p-1}$, $s \in [0, t/2)$, $y^*(t) = -\dfrac{t^p}{3p2^{p-2}}$, а решение уравнения (29) имеет вид

$$x^{**}(t) = \frac{1 + 3 \cdot 2^{p-2}}{9 \cdot 2^{p-4}} t^{p-1}.$$

Замечание 3. Единственность кусочно-непрерывного решения (18) с ядром (21) в виде (30) является основой для построения с помощью (27) устойчивого метода восстановления производной. При этом α и ε являются параметрами регуляризации, $\alpha(\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} 0, \varepsilon(\delta) \underset{\delta \to 0}{\to} 1$, где δ — мера точности правой части (18) в метрике $C_{[0,\,T]}$.

Рассмотрим понятие α-свертки. В приложениях важное значение имеют интегральные уравнения Вольтерры I рода типа свертки

$$\int_0^t K(t-s)\, x(s)\, ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \tag{35}$$

В частности, к (35) с ядром $K(t-s) = \dfrac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}$ сводится нахождение $y^{(k)}(t)$, $y^{(i)}(0) = 0$, $i = \overline{0, k-1}$.

Удобство представления разрывного ядра (21) в форме (22) свидетельствует о целесообразности введения понятия α-свертки двух функций, $K(t)$ и $x(t)$:

$$K(t)\overset{\alpha}{*}x(t)\equiv\int_0^t K(\alpha t-s)\,x(s)\,ds,\quad 0<\alpha\le 1.$$

Приведем несколько формул обращения интегрального уравнения Вольтерры I рода типа α-свертки

$$K(t)\overset{\alpha}{*}x(t)=y(t),\quad t\in[0,T],\tag{36}$$

а именно:

$$K(t)=\delta(t),\quad y(t)=C_{[0,\,T]};\quad x(\alpha t)=y(t),\quad \alpha\in(0,1];$$

$$K(t)=\mathbf{1}(t),\quad y(t)=\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,\,T]};\quad x(\alpha t)=\frac{1}{\alpha}\,y'(t),\quad \alpha\in(0,1];$$

$$K(t)=\mathrm{sign}(t),\quad y(t)=t;\quad x(t)=\frac{\ln t}{\ln\alpha}+x(1),\quad \alpha\in(0,1).$$

При $K(t)=t^n$ (36) является уравнением Вольтерры III рода:

$$K(t)=t,\quad y(t)=t^2/2;\quad x(t)=-2\ln t+x(1),\quad \alpha=1/2;$$

$$K(t)=t,\quad y(t)=t^2/2;\quad x(t)=\frac{x(1)}{t^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}},\quad \alpha\in(0,1),\quad \alpha\ne 1/2;$$

$$K(t)=t,\quad y(t)=t^3/3;\quad x(t)=-4t+x(0),\quad \alpha=1/2.$$

Выводы

Полученные результаты исследования достаточных условий существования и единственности решения в пространстве $C_{[0,T]}$ неклассических уравнений Вольтерры I рода позволяют использовать этот класс уравнений для анализа развивающихся систем с учетом возрастной структуры элементов.

The sufficient conditions for the existence and uniqueness of continuous solutions of the Volterra linear nonclassical equation arising in the integral models of developing systems have been obtained. Some Volterra equations of the first kind with piecewise smooth kernels have also been studied. An analysis of test problems allowing one to understand specificity of insufficiently studied integral equations is given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глушков В.М.* Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. — 1977. — № 2. — С. 3—6.
2. *Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М.* Моделирование развивающихся систем. — М. : Наука, 1983. — 350 с.
3. *Яценко Ю.П.* Интегральные уравнения систем с управляемой памятью. — Киев: Наук. думка, 1991. — 218 с.
4. *Hritonenko N., Yatcenko Yu.* Applied Mathematical Modeling of Engineering Problems. — Dortrecht: Kluwer Academic Publishers. — 2003. — 308 p.
5. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерры I рода: теория и численные методы. — Новосибирск: Наука, 1999. — 193 с.
6. *Apartsyn A.S.* Nonclassical Linear Volterra Equations of the First Kind. — Utrecht-Boston: VSP, 2003. — 168 p.
7. *Messina E., Russo E., Vecchio A.* A Stable Numerical Method for Volterra Integral Equations with Discontinuous Kernel // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — № 337. — P. 1383 — 1393.
8. *Сидоров Д.Н.* О параметрических семействах решений интегральных уравнений Вольтерры I рода с кусочно-гладкими ядрами // Дифференциальные уравнения. — 2013. — **49**, № 3. — С. 209—215.
9. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М. : Наука, 1977. — 741 с.
10. *Апарцин А.С.* О полилинейных уравнениях Вольтерры I рода // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 2. — С. 118—125.
11. *Апарцин А. С.* Полилинейные интегральные уравнения Вольтерры I рода: элементы теории и численные методы // Изв. Иркутского гос. ун-та. Серия «Математика». — Иркутск: Изд-во ИГУ. — 2007. — № 1. — С. 13—41.
12. *Апарцин А.С.* Полилинейные уравнения Вольтерры и некоторые задачи управления // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 4. — С. 3—16.
13. *Apartsyn A.S.* Polynomial Volterra Integral Equations of the First Kind and Lambert's Function // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. — 2013. — 280 (1). — P. 26—38.
14. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E. G., Jeffrey D.J.* Lambert's W function in Maple // The Maple Technical Newsletter. — 1993. — № 9. — C. 12—22.
15. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., et al.* On the Lambert W Function // Adv. Comput. Math. — 1996. — Vol. 5, №. 4. — P. 329—359.

Поступила 03.02.14

АПАРЦИН Анатолий Соломонович, д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Ин-та систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (г. Иркутск). В 1965 г. окончил Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова. Область научных исследований — обратные и некорректно поставленные задачи, интегральные уравнения, численные методы, математические модели динамических систем в энергетике.