УДК 519.21

А.В. Макаричев, д-р физ.-мат. наук
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(Украина, 61002, Харьков, ул. Петровского, 25,
тел. (057)7073783, e-mail: amsol2904@gmail.com),
А.А. Кудь, А.Б. Щукин
ООО «Симкорд»
(Украина, Харьков, ул. Отокара Яроша, 18)

Суммы максимумов приращений в многоканальной системе обслуживания при моделировании аукционных торгов

Для входящего потока с переменным параметром, поступающего в систему с неограниченным обслуживанием, в терминах характеристических функций найдены вероятностные распределения и числовые характеристики сумм максимумов приращений требований, поступивших и обслуженных на конечном промежутке времени.

Ключевые слова: распределения сумм максимумов.

Для потоку із змінним параметром, що поступає у систему з необмеженим обслуговуванням, у термінах характеристичних функцій знайдено ймовірнісні розподілення та числові характеристики сум максимумів приростань вимог, які надійшли і були обслуговані на кінцевому проміжку часу.

Ключові слова: розподілення сум максимумів.

В систему массового обслуживания интернет сообщений поступает входящий пуассоновский поток с переменным параметром [1] $\lambda(t)$, $t \geq 0$, объявлений о продаже. Объявления немедленно (без ожидания [2]) размещаются на сайте объявлений и находятся на нем в течение, вообще говоря, случайного времени обслуживания. Времена обслуживания заявок (пребывания на сайте объявлений о продаже) являются положительными, независимыми в совокупности и одинаково распределенными случайными величинами.

Пусть $G(u)$ — функция распределения времени обслуживания. Во время обслуживания заявок (возможного торга) с интенсивностью μ возникает случайное число n независимых предложений. Каждое такое предложение связано с повышением (понижением) объявленной цены на величину ее приращения. Модули этих приращений являются независимыми положительными случайными величинами с функцией распределения $H(x)$. Из этих приращений находится их максимум $S_{\max}$.

Пусть $F_{\max}(x) = P(S_{\max} \le x)$ — функция распределения максимума из приращений объявленной цены за время обслуживания (торгов) заявки о продаже. Подобные модели возникают в процессах аукционной продажи (на понижение или на повышение). Представляют значительный интерес числовые характеристики сумм максимумов случайных приращений цен по заявкам за время их обслуживания (торгов по продаже) в течение заданного промежутка времени длины T. Исследования этих сумм могут быть проведены отдельно для положительных приращений и для модулей отрицательных приращений. Рассмотрим возможность создания вероятностных инструментов познания для исследования этих сумм.

Теорема 1. Функция распределения максимума из приращений, возникших за время обслуживания требования (заявки о продаже), имеет вид

$$F_{\max}(x) = \begin{cases} \int\limits_{u>0} \exp\{-\mu u[1-H(x)]\}\, dG(u), & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условии, что число этих приращений $X_1, X_2, ..., X_n$ ровно n за время обслуживания u, вероятность P того, что их максимум $S_{\max}[n,u] = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ меньше x (ввиду их независимости и одинакового распределения), имеет вид

$$P\{S_{\max}[n,u] \le x\} = P\{X_1 \le x, X_2 \le x, ..., X_n \le x\} =$$
$$= P\{X_1 \le x\} P\{X_2 \le x\} ... P\{X_n \le x\} = [H(x)]^n.$$

Этот условный максимум имеет функцию распределения $[H(x)]^n$. По формуле полной вероятности полученную условную вероятность умножаем на вероятность $((\mu n)^n / n!) \exp(-\mu u)$ того, что за время обслуживания требования возникло ровно n приращений. Полученные произведения складываем по всем целым числам $n \ge 0$, а затем интегрируем по всем действительным числам $u > 0$ с распределением $dG(u)$. В итоге получаем функцию распределения

$$F_{\max}(x) = \int\limits_{u>0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu u)^n}{n!} H^n(x) \exp(-\mu u)\, dG(u) =$$

$$= \int\limits_{u>0} \exp\{-\mu u[1-H(x)]\}\, dG(u)$$

максимума $S_{\max}$ из приращений за время обслуживания требования. Итак,

$$F_{\max}(x)=\begin{cases}\int\limits_{u>0}\exp\{-\mu u\,[1-H(x)]\}\,dG(u),\ x\geq 0,\\ 0,\ x<0.\end{cases}$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Моменты максимума приращений, возникшие за время обслуживания требований (заявок о продаже), определяются по формулам

$$MS_{\max}=\int\limits_{x>0}dx\int\limits_{u>0}\{1-\exp[-\mu u\,[1-H(x)]]\}\,dG(u),$$

$$M(S_{\max})^2=\int\limits_{x>0}2xdx\int\limits_{u>0}\{1-\exp[-\mu u\,[1-H(x)]]\}\,dG(u).$$

Доказательство этих формул осуществляется с помощью интегрирования по частям. Обозначим $f(t)$ характеристическую функцию для максимума из приращений, возникших за время обслуживания требования, $f(t)=M(itS_{\max})$. Предположим, что в начальный момент времени $t=0$ в системе массового обслуживания требования отсутствуют. Обозначим $n(T)$ число требований, поступивших в систему обслуживания на отрезке времени $[0,T]$, $\xi(T)$ — число обслуженных требований в системе массового обслуживания на отрезке времени $[0,T]$, и $\eta(T)$ — число требований, находящихся на обслуживании в системе в момент времени T. Очевидно, $n(T)=\xi(T)+\eta(T)$.

Распределение числа пришедших требований в систему на отрезке времени $[0,T]$ определяется по формуле [1]

$$P\{n(T)=n\}=\frac{[\Lambda(T)]^n}{n!}\exp[-\Lambda(T)],$$

где $\Lambda(T)=\int\limits_0^T\lambda(t)\,dt$. Обозначим $\Phi_{\text{o}}(t)=M\exp(itS_T^{\text{o}})$ характеристическую функцию суммы

$$S_T^{\text{o}}=S(1)+S(2)+\ldots+S(\xi(T)) \tag{1}$$

всех максимумов приращений для требований, обслуженных на отрезке $[0,T]$. Обозначим [3]

$$\Lambda_G^{\text{o}}(T)=\int\limits_0^T\lambda(y)\,G(T-y)\,dy \tag{2}$$

интеграл от интенсивности пуассоновского потока с переменным параметром

$$\lambda(y)\, G(T-y), \quad y \in [0, T], \tag{3}$$

для числа поступивших на отрезке $[0, T]$ требований и обслуженных на нем.

Теорема 2. Характеристическая функция для суммы всех максимумов приращений сумм обслуженных на отрезке $[0, T]$ заявок определяется по формуле

$$\Phi_{\mathrm{o}}(t) = \exp\{\Lambda_G^{\mathrm{o}}(T)[f(t) - 1]\},$$

где

$$f(t) = M(itS_{\max}); \;\; \Lambda_G^{\mathrm{o}}(T) = \int_0^T \lambda(y)\, G(T-y)\, dy.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предположению, все слагаемые суммы (1) являются независимыми в совокупности и распределены так же, как и случайная величина $S_{\max}$. Согласно принятым обозначениям (2) и (3) характеристическая функция суммы (1) всех максимумов приращений цен для требований (заявок о продаже), обслуженных на отрезке $[0, T]$, имеет вид

$$\Phi_{\mathrm{o}}(t) = M \exp(itS_T^{\mathrm{o}}) = M\,[f(t)]^{\xi(T)} =$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{\Lambda_G^{\mathrm{o}}(T)}{n!} \exp[-\Lambda_G^{\mathrm{o}}(T)][f(t)]^n = \exp\{\Lambda_G^{\mathrm{o}}(T)[f(t) - 1]\}.$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 2. Математическое ожидание суммы максимумов приращений за время обслуживания требования (заявки о продаже) определяется по формуле $MS_T^{\mathrm{o}} = \Lambda_G^{\mathrm{o}}(T)\, MS_{\max}$, а дисперсия этой случайной величины — по формуле $DS_T^{\mathrm{o}} = \Lambda_G^{\mathrm{o}}(T)\, M(S_{\max})^2$, где моменты $MS_{\max}$ и $M(S_{\max})^2$ определяются из следствия 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, с помощью дифференцирования в нуле характеристической функции $\Phi_{\mathrm{o}}(t)$ находим математическое ожидание суммы (1) [4] всех приращений сумм для требований (заявок о продаже), обслуженных на отрезке $[0, T]$,

$$MS_T^{\mathrm{o}} = \frac{[\Phi_{\mathrm{o}}(t)]'|_{t=0}}{i} =$$

$$= \Lambda_G^{o}(T)\exp\{\Lambda_G^{o}(T)[f(t)-1]\}\left.\frac{f'(t)}{i}\right|_{t=0} = \Lambda_G^{o}(T) MS_{\max},$$

второй момент этой случайной величины,

$$M[S_T^{o}]^2 = \frac{[\Phi_{o}(t)]''|_{t=0}}{-1} =$$

$$= -\{\exp\{\Lambda_G^{o}(T)[f(t)-1]\} f'(t)\}|_{t=0}\, \Lambda_G^{o}(T) =$$

$$= -[\Lambda_G^{o}(T)]^2 \{[f'(t)]^2 \exp\{\Lambda_G^{o}(T)[f(t)-1]\}\}|_{t=0} -$$

$$- \Lambda_G^{o}(T)\exp\{\Lambda_G^{o}(T)[f(t)-1]\}[f''(t)]|_{t=0} =$$

$$= [\Lambda_G^{o}(T)]^2 (MS_{\max})^2 + \Lambda_G^{o}(T)\, M(S_{\max})^2,$$

и ее дисперсию: $DS_T^{o} = \Lambda_G^{o}(T)\, M(S_{\max})^2$.

Обозначим $\Phi_{\text{н.о}}(t) = M\exp(it\, S_T^{\text{н.о}})$ характеристическую функцию суммы

$$S_T^{\text{н.о}} = S(1) + S(2) + \ldots + S(\eta(T)) \tag{4}$$

всех максимумов приращений цен для требований (заявок о продаже), находящихся на обслуживании в момент времени T, т.е. не окончивших обслуживание к этому моменту времени. Обозначим [5] $\overline{G}(t) = 1 - G(t)$

$$\Lambda_G^{\text{н.о}}(T) = \int_0^T \lambda(y)\,\overline{G}(T-y)\,dy \tag{5}$$

интеграл от интенсивности пуассоновского потока с переменным параметром

$$\lambda(y)[1-G(T-y)] = \lambda(y)\,\overline{G}(T-y),\;\; y\in[0,T], \tag{6}$$

для поступивших на отрезке $[0, T]$ требований и продолжающих свое обслуживание в момент времени T, т.е. не закончившим обслуживание на нем.

Теорема 3. Характеристическая функция суммы всех максимумов приращений для требований (заявок о продаже), поступивших, но не обслуженных на отрезке $[0, T]$, имеет вид

$$\Phi_{\text{н.о}}(t) = \exp\{(\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[f(t)-1]\},$$

где

$$f(t) = M(itS_{\max});$$

$$\Lambda_G^{\text{н.о}}(T) = \int_0^T \lambda(y)\,\overline{G}(T-y)\,dy.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предположению все слагаемые в сумме (4) являются независимыми в совокупности и распределены так же, как и случайная величина $S_{\max}$. Согласно принятым обозначениям (5) и (6) характеристическая функция суммы (4) [6] всех максимумов приращений для требований, поступивших, но не обслуженных на отрезке $[0, T]$, имеет вид

$$\Phi_{\text{н.о}}(t) = M\exp(itS_T^{\text{н.о}}) = M[f(t)]^{\xi(T)} =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)}{n!} \exp[-\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)][f(t)]^n = \exp\{\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[f(t)-1]\}.$$

Теорема 3 доказана.

Следствие 3. Математическое ожидание суммы всех максимумов приращений для требований (заявок о продаже), не обслуженных на отрезке $[0, T]$, определяется по формуле $MS_T^{\text{н.о}} = \Lambda_G^{\text{н.о}}(T) MS_{\max}$, а дисперсия — по формуле $DS_T^{\text{н.о}} = \Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[M(S_{\max})^2]$, где моменты $M(S_{\max})$ и $M(S_{\max})^2$ определяются из следствия 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, дифференцированием в нуле характеристической функции $\Phi_{\text{н.о}}(t)$ находим математическое ожидание суммы (4) всех максимумов приращений для требований, не обслуженных на отрезке $[0, T]$,

$$MS_T^{\text{н.о}} = \frac{[\Phi_{\text{н.о}}(t)]'|_{t=0}}{i} =$$

$$= \Lambda_G^{\text{н.о}}(T)\exp\{\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[f(t)-1]\} \left.\frac{f'(t)}{i}\right|_{t=0} = \Lambda_G^{\text{н.о}}(T)\, MS_{\max},$$

второй момент этой случайной величины,

$$M[S_T^{\text{н.о}}]^2 = \frac{[\Phi_{\text{н.о}}(t)]''|_{t=0}}{-1} =$$

$$= -\{\exp\{\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[f(t)-1]\} f'(t)\}'|_{t=0}\, \Lambda_G^{\text{н.о}}(T) =$$

$$= -[\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)]^2 \{[f'(t)\}^2 \exp\{\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[f(t)-1]\}\}|_{t=0} -$$

$$- \Lambda_G^{\text{н.о}}(T)\exp\{\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[f(t)-1]\}[f''(t)]|_{t=0} =$$

$$= [\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)]^2 (MS_{\max})^2 + \Lambda_G^{\text{н.о}}(T)\, M(S_{\max})^2,$$

и ее дисперсию — $DS_T^{\text{н.о}} = \Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[M(S_{\max})^2]$.

Выводы

Полученные распределения Лапласа для сумм максимумов свидетельствуют о том, что в ряде случаев эти распределения, по-существу, являются безгранично делимыми вероятностными распределениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматгиз, 1963, 236 с.
2. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М. : Наука, 1987, 336 с.
3. *Климов Г.П.* Стохастические системы обслуживания. М. : Наука, 1966, 244 с.
4. *Соловьев А.Д.* Асимптотическое поведение момента наступления редкого события в регенерирующем процессе // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, № 6, с. 79—89.
5. *Барзилович Е.Ю., Беляев Ю.К., Каштанов В.А. и др.* Вопросы математической теории надежности / Под ред. Б.В. Гнеденко. М. : Радио и связь, 1983, 376 с.
6. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М. : Наука, 1980, 576 с.

Поступила 13.01.17;
после доработки 18.04.17

REFERENCES

1. Khinchin, A.Ya. (1963), *Raboty po matematicheskoi teorii massovogo obsluzhivaniya* [Works on mathematical queuing theory], Fizmatgiz, Moscow, USSR.
2. Gnedenko, B.V. and Kovalenko, I.N. (1987), *Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya* [Introduction to queueing theory], Nauka, Moscow, USSR.
3. Klimov, G.P. (1966), *Stokhasticheskie teorii obsluzhivaniya* [Stochastic service systems], Nauka, Moscow, USSR.
4. Solovyov, A.D. (1971), “The asymptotic behavior of the occurrence of the rare event in the regenerating process”, *Izvestiya AN SSSR, Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 6, pp. 79-89.
5. Barzilovich, E.Yu., Belyaev, Yu.K., Kashtanov, V.A., Kovalenko, I.N., Solovyov, A.D. and Ushakov, I.A. (1983), *Voprosy matematicheskoi teorii nadezhnosti* [Problems of mathematical theory of reliability], Ed. Acad. B.V. Gnedenko, Radio i svyaz, Moscow, USSR.
6. Shiryaev, A.N. (1980), *Veroyatnost* [Probability], Nauka, Moscow, USSR.

Reseived 13.01.17;
after revision 18.04.17

A.V. Makarichev, A.A. Kud, A.B. Shchukin

SUM OF INCREMENT MAXIMA IN A MULTICHANNEL
SERVICE SYSTEM WHEN MODELING AUCTION

For the input stream with a variable parameter put in the system with unlimited service the probability distributions and numerical characteristics for the sums of maxima of the requirement increments received and served in a finite period of time were found in terms of characteristic functions.

K e y w o r d s: distribution of sums of maxima.

МАКАРИЧЕВ Александр Владимирович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры транспортных систем и логистики Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. В 1981 г. окончил Московский госуниверситет. Область научных исследований — потоки случайных событий с переменной интенсивностью, оценки характеристик надежности комплексов сложных восстанавливаемых систем, распределения сумм экстремумов в случайных процессах обслуживания.

КУДЬ Александр Александрович, генеральный директор ООО «Симкорд». В 2002 г. окончил Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет. Область научных исследований — построение алгоритмов суммирования для определения случайных элементов двоичных матриц.

ЩУКИН Александр Борисович, глава Департамента анализа и моделирования торгово-экономических систем ООО «Симкорд». В 1988 г. окончил Харьковский авиационный ин-т. Область научных исследований — преобразование аддитивных функционалов от случайных процессов, случайные потоки с изменяющейся интенсивностью.