
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТА ЗАСОБІВ МОДЕЛЮВАННЯ

doi: <https://doi.org/10.15407/emodel.42.01.051>
УДК 519.6+62.4

С.П. Іглін, канд. техн. наук, **В.В. Дмитрик**, д-р техн. наук
Національний технічний університет «ХПІ»
(Україна, 61000, Харків, вул. Кирпичова, 2, iglin@ukr.net; svarka126@ukr.net);
В.Ю. Скульський, д-р техн. наук,
Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України
(Україна, 03680, Київ, вул. Казимира Малевича, 11, vsku@paton.kiev.ua)

Моделювання руху рідкого металу в зварювальній ванні

У тривимірній постановці розв'язано задачу про рух розплавленого металу у зварювальній ванні в процесі електродугової зварки. Досліджено швидкості потоків рідкого металу в розплаві ванни. Використано тетрадральні кінцеві елементи. Дискретизацію рівнянь Нав'є—Стокса за координатами в просторі проведено за схемою Гальоркіна з аналітичним інтегруванням за об'ємом елемента. Для розв'язання нестационарної задачі використано зворотню схему Ейлера. Наведено чисельні результати.

К л ю ч о в і с л о в а: розплав, зварювальна ванна, рівняння Нав'є—Стокса, метод кінцевих елементів, схема Гальоркіна, тривимірна задача.

Постановка проблеми. При виготовленні зварних з'єднань, які потребують підвищених експлуатаційних параметрів, необхідно отримати їхню вихідну структуру з покращеними якісними характеристиками. Наявність такої структури забезпечує підвищення надійності експлуатації зварних з'єднань, наприклад роторів турбін великої потужності АЕС та ТЕС, а також збільшення їхнього ресурсу.

Встановлено, що потоками рідкого металу з головної в хвостову частину зварювальної ванни переноситься приблизно 7—10% тепла дуги, введеного в основний метал [1, 2]. Введене тепло витрачається на додатковий перегрів розплавленого металу ванни, а також зони термічного впливу зварних з'єднань, що призводить до виникнення бракованих структур і до погіршення механічних властивостей металу зварних з'єднань.

Для отримання якісної вихідної структури необхідно оптимізувати параметри режиму зварювання. Оптимізацію цих параметрів доцільно провести на основі моделювання зварювального нагріву з'єднань, що ви-

© Іглін С.П., Дмитрик В.В., Скульський В.Ю., 2020

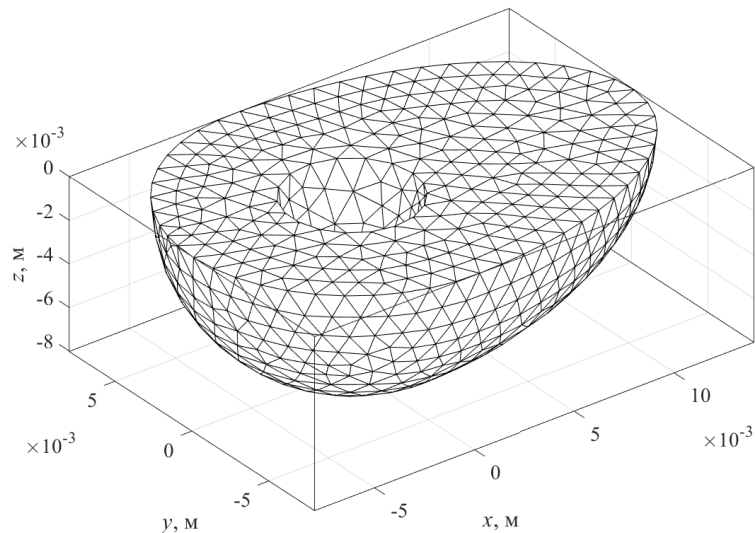


Рис. 1. Зварювальна ванна та її розбиття на кінцеві елементи

готовляються. Таке моделювання передбачає дослідження руху розплавленого металу у зварювальній ванні. Моделювання зварювального нагріву дозволяє виявити форму потоків розплавленого металу в зварювальній ванні, їхню швидкість та кількість тепла, що переноситься потоками з головної в хвостову частину ванни.

Метою даного дослідження є створення адекватної математичної моделі руху рідкого металу в зварювальній ванні, проведення на її основі розрахунків та отримання результатів, які дозволять уточнити параметри режиму дугової зварки.

Для дослідження руху розплаву в зварювальній ванні обрано метод кінцевих елементів (МКЕ) — найпоширеніший із сучасних методів розв’язання задач механіки суцільних середовищ, рідин та газів [3—5]. Застосування МКЕ до рівнянь Нав’є—Стокса, які описують рух рідини, розглянуто в багатьох роботах [6—14 та ін]. Зазвичай в них для дискретизації рівнянь Нав’є—Стокса використовується схема Гальоркіна у слабкій формі, а інтегрування за об’ємом кінцевого елемента виконується чисельно. У даному дослідженні отримано формулу для аналітичного інтегрування при побудові матриць у МКЕ.

Математична модель. Зварювальну ванну моделювали як тривимірне тіло, побудоване за допомогою об’єднання, перетину та вирізання з куль, еліпсоїду обертання та паралелепіпеду (рис. 1). Для її побудови використано систему комп’ютерного моделювання FreeCAD [15].

Ця модель з достатнім ступенем точності описує реальну зварювальну ванну з такими розмірами: довжина великої півосі еліпсоїда — 14 мм;

радіус зовнішньої кулі та довжина малої півосі еліпсоїда — 8 мм; радіус вирізаної півкулі (основи зварювальної дуги) — 3 мм. У процесі зварювання рідкий метал рухається у ванні з її головної частини в хвостову, що досліджено експериментально [2]. З урахуванням цього було прийнято, що розплавлений метал рухається від основи дуги у хвостову частину ванни з середньою швидкістю $v_0 \approx 20$ м/год. На верхній поверхні рідкий метал переміщується без вертикального зміщення, а на нижній еліпсоїдно-сферичній поверхні (границі розподілу рідкої та твердої фаз) швидкість розплавленого металу дорівнює нулю. На початку зварювання розплав не рухається, тому початкова умова — нульова швидкість в усіх точках ванни.

Розміри ванни достатньо малі, і можна вважати, що тиск у розплавленому металі буде приблизно 10^5 Па. Тому граничною умовою було прийнято, що у будь-який момент часу у найвіддаленішій від основи зварювальної дуги точці з координатами (14; 0; 0) мм тиск буде $p_0 = 10^5$ Па. За цих умов будемо розраховувати швидкість руху розплаву і тиску в ньому під час зварювання.

Рівняння Нав'є—Стокса та схема Гальоркіна. Рух розплаву у зварювальній ванні описується системою диференціальних рівнянь Нав'є—Стокса, які без урахування «другої в'язкості» (вона для рідкої сталі — несуттєва) мають вигляд

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

де x, y, z — координати, м; t — час, с; $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$ — координати вектора швидкості, м/с, які залежать від x, y, z, t ; p — тиск, Па (теж залежить від x, y, z, t); ρ — щільність розплаву, кг/м³; μ — динамічна в'язкість, Па·с; ∇ — оператор Гамільтона, 1/м; Δ — векторний оператор Лапласа, 1/м²; $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)^T$ — вектор щільностей внутрішніх сил, н/м³. Рідкий метал при зварюванні є нестисливою рідиною ($\rho = \text{const}$).

Запишемо систему (1) у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f_x, \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + f_y, \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + f_z, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Якщо ввести до розгляду компоненти внутрішніх напружень для в'язких ньютонівських рідин,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - p; \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \sigma_y &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - p; \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \sigma_z &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - p; \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),\end{aligned}$$

то рівняння (2) можна записати у такій формі:

$$\begin{aligned}-\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= 0, \\ -\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0, \\ -\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

У лівих частинах перших трьох рівнянь містяться нелінійні доданки, обумовлені конвективним інерційним рухом. Інші доданки, пов'язані з в'язкістю, інерцією та внутрішніми зусиллями, — лінійні. Нелінійність рівнянь (3) зумовлює застосування для їхнього розв'язання методу простих ітерацій, методу послідовної лінеаризації (Ньютона) або інших.

Загальна схема МКЕ передбачає заміну диференціальних рівнянь (3) їхньою кінцевоелементною дискретизацією. Найчастіше дискретизація проводиться за схемою Гальоркіна у слабкій формі, а саме замість виконання кожного диференціального рівняння слід дорівняти нулю інтеграл за об'ємом кінцевого елемента Ω_e від лівої частини кожного з рівнянь системи (3), помноженої на вагову функцію, яка обирається за моделлю Релея—Рітца—Гальоркіна. За цією схемою перші три рівняння системи (3) виглядають так:

$$\int_{\Omega_e} u \left(-\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \right) dV = 0,$$

$$\int_{\Omega_e} v \left(-\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_y \right) dV = 0, \quad (4)$$

$$\int_{\Omega_e} w \left(-\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z \right) dV = 0,$$

а останнє — так:

$$\int_{\Omega_e} p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV = 0. \quad (5)$$

Тут p , u , v і w — вагові функції, що є функціями форми для тиску та координат вектора швидкості. Реалізація формул (4), (5) залежить від конкретного кінцевого елемента і обраних функцій форми.

Тетрадральний кінцевий елемент та однорідні L -координати.

Для тривимірного тіла оберемо кінцевий елемент у вигляді тетраедру (рис. 2), вершини якого пронумеруємо так, щоб із точки M_4 обхід контуру $M_1M_2M_3$ спостерігався проти ходу годинникової стрілки. Необхідні співвідношення для нього наведено у роботах [6, 12—14].

Введемо до розгляду однорідні L -координати в просторі:

$$L_k = \frac{V_k}{V}, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (6)$$

де V — об'єм кінцевого елемента,

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}; \quad (7)$$

V_k — об'єми тіл, а саме правого (V_1), заднього (V_2), переднього лівого (V_3) та нижнього (V_4) (див. рис. 2). Кожне тіло з об'ємом V_k розташоване напроти точки M_k . Вузли пронумеровано так, що модуль у формулі (7) не потрібен.

Декартові координати (x, y, z) будь-якої внутрішньої точки елемента пов'язані з однорідними координатами (L_1, L_2, L_3, L_4) співвідношеннями

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

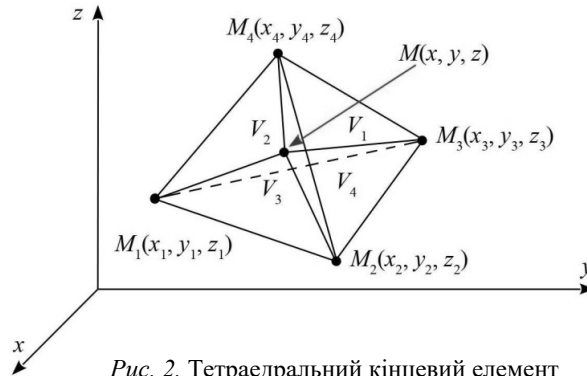


Рис. 2. Тетраедральний кінцевий елемент

або зворотними до них:

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{pmatrix} \alpha_1 & x_1^* & y_1^* & z_1^* \\ \alpha_2 & x_2^* & y_2^* & z_2^* \\ \alpha_3 & x_3^* & y_3^* & z_3^* \\ \alpha_4 & x_4^* & y_4^* & z_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (9)$$

де α_k — алгебраїчні доповнення одиниць у матриці (8); x_k^* , y_k^* , z_k^* — алгебраїчні доповнення відповідних x_k , y_k , z_k тієї самої матриці.

Для L -координат існують певні формули диференціювання та інтегрування. Якщо є функція $f(L_1, L_2, L_3, L_4)$, то її частинні похідні x , y , z визначають за правилом диференціювання складної функції, і з урахуванням (9) вони мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{6V} \left(x_1^* \frac{\partial f}{\partial L_1} + x_2^* \frac{\partial f}{\partial L_1} + x_3^* \frac{\partial f}{\partial L_1} + x_4^* \frac{\partial f}{\partial L_1} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{6V} \left(y_1^* \frac{\partial f}{\partial L_1} + y_2^* \frac{\partial f}{\partial L_1} + y_3^* \frac{\partial f}{\partial L_1} + y_4^* \frac{\partial f}{\partial L_1} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{6V} \left(z_1^* \frac{\partial f}{\partial L_1} + z_2^* \frac{\partial f}{\partial L_1} + z_3^* \frac{\partial f}{\partial L_1} + z_4^* \frac{\partial f}{\partial L_1} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Зокрема, похідні від L -координат є такими:

$$\frac{\partial L_k}{\partial x} = \frac{x_k^*}{6V}; \quad \frac{\partial L_k}{\partial y} = \frac{y_k^*}{6V}; \quad \frac{\partial L_k}{\partial z} = \frac{z_k^*}{6V}. \quad (11)$$

Інтеграл від $f(L_1, L_2, L_3, L_4)$ за об'ємом, який займає кінцевий елемент, обчислюється за формулою

$$\int_{\Omega_e} f(L_1, L_2, L_3, L_4) dV = 6V \int_0^1 dL_1 \int_0^{1-L_1-L_2} f(L_1, L_2, L_3, L_4) dL_2. \quad (12)$$

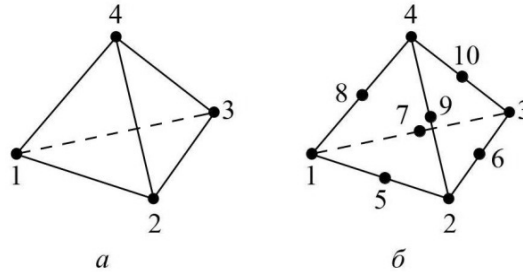


Рис. 3. Чотиривузлові (а) та десятивузлові (б) тетрадральні кінцеві елементи

І, нарешті, інтеграл від добутку L_k в цілих невід’ємних ступенях має вигляд

$$\int_0^1 dL_1 \int_0^{1-L_1} dL_2 \int_0^{1-L_1-L_2} L_1^i L_2^j L_3^k L_4^l dL_3 = \frac{i!j!k!l!}{(3+i+j+k+l)!} \quad (13)$$

Однорідні L -координати використовуються при побудові функцій форми для тиску і координат вектору швидкості.

Функції форми. Найпоширенішими тетрадральними елементами є чотиривузлові та десятивузлові (рис. 3). У десятивузловому елементі додаткові вузли розміщені по середині ребер. У відповідності до рекомендацій [6—8, 12,13] обрано чотиривузлові елементи для тиску та десятивузлові для кожної координати вектору швидкості. У кожен момент часу тиск і координати вектору швидкості залежать від просторових координат $p(x, y, z)$, $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$.

Введемо до розгляду вектори-стовпці:

для вузлових тисків довжиною чотири —

$$\mathbf{P}_\xi = (p_1 p_2 p_3 p_4)^T,$$

для вузлових швидкостей довжиною 10 —

$$\mathbf{U}_\xi = (u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 u_8 u_9 u_{10})^T,$$

$$\mathbf{V}_\xi = (v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_{10})^T,$$

$$\mathbf{W}_\xi = (w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_6 w_7 w_8 w_9 w_{10})^T.$$

Їхні координати — значення тиску та значення координат вектору швидкості у вузлах кінцевого елемента. Всередині чотиривузлового елемента тиск змінюється за лінійним законом,

$$p(x, y, z) = (L_1 L_2 L_3 L_4) \mathbf{P}_\xi, \quad (14)$$

а кожна координата вектора швидкості всередині десятивузлового елемента — за квадратичним:

$$u(x, y, z) = \begin{pmatrix} L_1(2L_1 - 1) \\ L_2(2L_2 - 1) \\ L_3(2L_3 - 1) \\ L_4(2L_4 - 1) \\ 4L_1L_2 \\ 4L_2L_3 \\ 4L_1L_3 \\ 4L_1L_4 \\ 4L_2L_4 \\ 4L_3L_4 \end{pmatrix}^T \mathbf{U}_\xi. \quad (15)$$

Так само для $v(x, y, z)$ і $w(x, y, z)$. Функції форми, які потрібні для дискретизації (4), (5), отримуємо з перших множників у формулах (14), (15). Введемо ці множники до розгляду як вектори-стовпчики довжиною чотири,

$$\varphi = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} = \mathbf{L}_1$$

та довжиною 10:

$$\Psi = \begin{pmatrix} L_1(2L_1 - 1) \\ L_2(2L_2 - 1) \\ L_3(2L_3 - 1) \\ L_4(2L_4 - 1) \\ 4L_1L_2 \\ 4L_2L_3 \\ 4L_1L_3 \\ 4L_1L_4 \\ 4L_2L_4 \\ 4L_3L_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_4^2 \\ L_1L_2 \\ L_1L_3 \\ L_1L_4 \\ L_2L_3 \\ L_2L_4 \\ L_3L_4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{L}_2.$$

Тут \mathbf{L}_1 — вектор-стовпчик довжиною чотири з L -координатами у перших ступенях; \mathbf{A} — числова матриця розміром 10×10 ; \mathbf{L}_2 — вектор-стовпчик дов-

жиною 10 з квадратами L -координат та їхніми добутками в перших ступенях. Тоді закон змінювання тиску у чотиривузловому елементі має такий вигляд:

$$p(x, y, z) = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{P}_\xi = L_1^T \mathbf{P}_\xi = \mathbf{P}_\xi^T \mathbf{L}_1, \quad (16)$$

а закон змінювання кожної координати вектора швидкості в десятивузловому елементі — такий:

$$u(x, y, z) = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{U}_\xi = \mathbf{L}_2^T \mathbf{A}^T \mathbf{U}_\xi = \mathbf{U}_\xi^T \mathbf{A} \mathbf{L}_2. \quad (17)$$

Так само для $v(x, y, z)$ та $w(x, y, z)$. Вирази (16), (17) і є ваговими функціями у схемі Гальоркіна (4), (5). Для підстановки (16), (17) у (4), (5) потрібні похідні від координат вектора швидкості. Обчислимо їх за формулами (10), (11).

Диференціюємо координату вектора швидкості (17), де треба обчислювати похідну лише від множника \mathbf{L}_2 . Частинні похідні від координат вектора \mathbf{L}_2 за x будуть такими:

$$\frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial x} = \frac{1}{6V} \begin{pmatrix} 2L_1 x_1^* \\ 2L_2 x_2^* \\ 2L_3 x_3^* \\ 2L_4 x_4^* \\ L_1 x_2^* + L_2 x_1^* \\ L_1 x_3^* + L_3 x_1^* \\ L_1 x_4^* + L_4 x_1^* \\ L_2 x_3^* + L_3 x_2^* \\ L_2 x_4^* + L_4 x_3^* \end{pmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{pmatrix} 2x_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_4^* \\ x_2^* & x_1^* & 0 & 0 \\ x_3^* & 0 & x_1^* & 0 \\ x_4^* & 0 & 0 & x_1^* \\ 0 & x_3^* & x_2^* & 0 \\ 0 & x_4^* & 0 & x_2^* \\ 0 & 0 & x_4^* & x_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{6V} \mathbf{X} \mathbf{L}_1.$$

Тут через \mathbf{X} позначено числову матрицю розміром 10×4 , де x_k^* — перший матричний множник у цій формулі. Також запишемо

$$\frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial y} = \frac{1}{6V} \mathbf{Y} \mathbf{L}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial z} = \frac{1}{6V} \mathbf{Z} \mathbf{L}_1,$$

де матриці \mathbf{Y} та \mathbf{Z} розміром 10×4 виглядають так само, як \mathbf{X} , але вони побудовані з величин y_k^* та z_k^* . Тоді похідні від координати $u(x, y, z)$ вектора швидкості можна обчислити так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{6V} \mathbf{U}_\xi^T \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{L}_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{6V} \mathbf{U}_\xi^T \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{L}_1, \quad (18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{6V} \mathbf{U}_\xi^T \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{L}_1.$$

У частинних похідних від $v(x, y, z)$ і $w(x, y, z)$ зміняться тільки перші векторні множники: замість \mathbf{U}_ξ^T будуть вузлові вектори \mathbf{V}_ξ^T і \mathbf{W}_ξ^T .

Дискретизація рівнянь Нав'є—Стокса. Цей процес, докладно описаний у [6—8], зведено до обчислення матриць інерції,

$$\mathbf{M} = \rho \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Psi}^T dV; \quad (19)$$

дифузії,

$$\mathbf{K}_{xx} = \mu \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial x} dV, \quad \mathbf{K}_{xy} = \mu \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial y} dV,$$

$$\mathbf{K}_{yy} = \mu \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial y} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial y} dV, \quad \mathbf{K}_{xz} = \mu \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial z} dV, \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_{zz} = \mu \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial z} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial z} dV, \quad \mathbf{K}_{yz} = \mu \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial y} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial z} dV;$$

конвективності,

$$\mathbf{C}(u, v, w) = \rho \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\Psi} \left(u \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial x} + v \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial y} + w \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial z} \right) dV; \quad (21)$$

градієнта тиску,

$$Q_x = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x} \boldsymbol{\Phi}^T dV, \quad Q_y = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial y} \boldsymbol{\Phi}^T dV, \quad Q_z = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial z} \boldsymbol{\Phi}^T dV; \quad (22)$$

вектора вузлових зусиль,

$$\mathbf{F}_x = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\Psi} f_x dV, \quad \mathbf{F}_y = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\Psi} f_y dV, \quad \mathbf{F}_z = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\Psi} f_z dV. \quad (23)$$

Матриці інерції (19) з'являються при обчисленні інтегралів (4) з доданками, які містять $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ та $\frac{\partial w}{\partial t}$. Матриці дифузії (20) — це результат інтегрування доданків із внутрішніми напруженнями в (4). Матриці конвективності (21) з'являються при інтегруванні нелінійних доданків у (4). При обчисленні інтеграла (5) виникають матриці градієнта тиску (22). І,

нарешті, вектори вузлових зусиль (23) — це результат інтегрування доданків з f_x, f_y та f_z .

Для вагових функцій (16), (17) та похідних від них (18) усі ці матриці та вектори можуть бути обчислені аналітично з використанням формул (12), (13) та різних систем комп'ютерної алгебри. Обчислюємо матрицю інерції (19):

$$\mathbf{M} = \rho \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Psi}^T dV = \rho \int_{\Omega_e} \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_2^T \mathbf{A}^T dV = \rho \mathbf{A} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_2^T dV \right) \mathbf{A}^T.$$

Інтеграл у дужках і результат його множення на $\rho \mathbf{A}$ зліва та на \mathbf{A}^T справа після аналітичного обчислення виглядає так:

$$\mathbf{M} = \frac{6\rho V}{2520} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 & -4 & -6 & -4 & -4 & -6 & -6 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & -4 & -4 & -6 & -6 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & -6 & -4 & -4 & -6 & -6 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & -6 & -6 & -6 & -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -6 & -6 & 32 & 16 & 16 & 16 & 16 & 8 \\ -6 & -4 & -4 & -6 & 16 & 32 & 16 & 8 & 16 & 16 \\ -4 & -6 & -4 & -6 & 16 & 16 & 32 & 16 & 8 & 16 \\ -4 & -6 & -6 & -4 & 16 & 8 & 16 & 32 & 16 & 16 \\ -6 & -4 & -6 & -4 & 16 & 16 & 8 & 16 & 32 & 16 \\ -6 & -6 & -4 & -4 & 8 & 16 & 16 & 16 & 16 & 32 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо матриці дифузії (20). Перша з них має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{xx} &= \mu \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial x} \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T}{\partial x} dV = \mu \int_{\Omega_e} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{L}_2^T}{\partial x} \mathbf{A}^T dV = \\ &= \frac{\mu}{(6V)^2} \mathbf{A} \mathbf{X} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T dV \right) \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T. \end{aligned}$$

Тут інтеграл обчислюється аналітично. Якщо ввести до розгляду матрицю \mathbf{H} розміром 4×4 ,

$$\mathbf{H} = \frac{120}{6V} \int_{\Omega_e} \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T dV = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

то матриця дифузії \mathbf{K}_{xx} розміром 10×10 може мати вигляд

$$\mathbf{K}_{xx} = \frac{\mu}{720V} \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T.$$

Так само обчислюються й інші матриці дифузії, розміри яких 10×10 :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{xx} &= \frac{\mu}{720V} \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T, & \mathbf{K}_{xy} &= \frac{\mu}{720V} \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{Y}^T \mathbf{A}^T, \\ \mathbf{K}_{yy} &= \frac{\mu}{720V} \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{H} \mathbf{Y}^T \mathbf{A}^T, & \mathbf{K}_{xz} &= \frac{\mu}{720V} \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{H} \mathbf{Z}^T \mathbf{A}^T, \\ \mathbf{K}_{zz} &= \frac{\mu}{720V} \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{H} \mathbf{Z}^T \mathbf{A}^T, & \mathbf{K}_{yz} &= \frac{\mu}{720V} \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{H} \mathbf{Z}^T \mathbf{A}^T. \end{aligned}$$

Обчислюємо матрицю конвективності (21):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(u, v, w) &= \rho \int_{\Omega_e} \Psi \left(u \frac{\partial \Psi^T}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi^T}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi^T}{\partial z} \right) dV = \\ &= \frac{\rho}{6V} \mathbf{A} \left(\left(\int_{\Omega_e} \mathbf{L}_2 \mathbf{U}_\xi^T \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1^T dV \right) \mathbf{X}^T + \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{L}_2 \mathbf{V}_\xi^T \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1^T dV \right) \mathbf{Y}^T + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{L}_2 \mathbf{W}_\xi^T \mathbf{A} \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_1^T dV \right) \mathbf{Z}^T \right) \mathbf{A}^T. \end{aligned}$$

Тут у підінтегральні функції входять множники \mathbf{U}_ξ^T , \mathbf{V}_ξ^T , \mathbf{W}_ξ^T — транспоновані вектори вузлових швидкостей. Кожен з них є лінійною комбінацією десяти числових векторів. Наприклад,

$$\mathbf{U}_\xi^T = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + u_{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тому кожен з трьох інтегралів у (24) обчислюється однаково. Він буде матрицею розміром 10×4 , яка є лінійною комбінацією десяти матриць такого самого розміру. Коефіцієнти цієї лінійної комбінації — це координати векторів \mathbf{U}_ξ , \mathbf{V}_ξ і \mathbf{W}_ξ , тобто вузлові швидкості. Ці десять матриць

для кожного з трьох інтегралів однакові. Їх можна аналітично обчислити заздалегідь і вони будуть такими:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_1 &= \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -6 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -6 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{C}_4 &= \begin{pmatrix} -6 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -6 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_5 = \begin{pmatrix} 24 & 12 & 6 & 6 \\ 12 & 24 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 6 \\ 12 & 12 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_6 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 & 2 \\ 6 & 24 & 12 & 6 \\ 6 & 12 & 24 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 12 & 12 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{C}_7 &= \begin{pmatrix} 24 & 6 & 12 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \\ 12 & 6 & 24 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 4 & 2 \\ 12 & 4 & 12 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_8 = \begin{pmatrix} 24 & 6 & 6 & 12 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \\ 12 & 6 & 6 & 24 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 & 12 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_9 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 4 \\ 6 & 24 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ 6 & 12 & 6 & 24 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & 4 & 12 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{10} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 24 & 12 \\ 6 & 6 & 12 & 24 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 12 & 12 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, матриця конвективності розміром 10×10 має вигляд

$$\mathbf{C}(u, v, w) = \frac{\rho}{10080} \mathbf{A} \left(\left(\sum_{k=1}^{10} \mathbf{C}_k u_k \right) \mathbf{X}^T + \left(\sum_{k=1}^{10} \mathbf{C}_k v_k \right) \mathbf{Y}^T + \left(\sum_{k=1}^{10} \mathbf{C}_k w_k \right) \mathbf{Z}^T \right) \mathbf{A}^T.$$

Її доданки \mathbf{C}_k наведено вище. Далі обчислюємо матриці градієнта тиску (22). Запишемо одну з них:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_x &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \boldsymbol{\varphi}^T dV = \frac{1}{6V} \int_{\Omega_e} \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T dV = \\ &= \frac{1}{6V} \mathbf{A} \mathbf{X} \int_{\Omega_e} \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T dV = \frac{1}{120} \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Дві інші обчислюються так само. Маємо матриці градієнта тиску розміром 10×4 :

$$\mathbf{Q}_x = \frac{1}{120} \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{H}, \quad \mathbf{Q}_y = \frac{1}{120} \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{H}, \quad \mathbf{Q}_z = \frac{1}{120} \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{H}.$$

І, нарешті, обчислюємо вектор вузлових зусиль (23). Оскільки кінцеві елементи малі, можна вважати, що розподілені внутрішні зусилля $f_x, f_y, f_z \in$ сталими в межах кожного елемента і дорівнюють своїм значенням в середині елемента при $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 1/4$. Тоді

$$\mathbf{F}_x = \int_{\Omega_e} \Psi f_x dV = f_x \mathbf{A} \int_{\Omega_e} \mathbf{L}_2 dV.$$

Цей інтеграл, як і попередні, обчислюється аналітично. Перші його чотири координати дорівнюють $V/10$, а останні шість $V/20$. Якщо вектор-стовпчик позначити

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то вектори вузлових зусиль довжиною 10 обчислюються за формулами

$$\mathbf{F}_x = \frac{6Vf_x}{120} \mathbf{AI}, \quad \mathbf{F}_y = \frac{6Vf_y}{120} \mathbf{AI}, \quad \mathbf{F}_z = \frac{6Vf_z}{120} \mathbf{AI}.$$

Побудова матриць і векторів кінцевого елемента та системи.

Перенумеруємо ступені волі тетрадрального кінцевого елемента у такому порядку: десять вузлових швидкостей \mathbf{U}_ξ , десять вузлових швидкостей \mathbf{V}_ξ , десять вузлових швидкостей \mathbf{W}_ξ та чотири вузлові тиски \mathbf{P}_ξ . Отже, у кожному кінцевому елементі буде 34 ступеня волі. Отриманий вектор невідомих величин в елементі довжиною 34 позначимо

$$\mathbf{U}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_\xi \\ \mathbf{V}_\xi \\ \mathbf{W}_\xi \\ \mathbf{P}_\xi \end{pmatrix}.$$

Матриці кінцевого елемента розмірами 34×34 та вектор довжиною 34 будуються з матриць інерції, дифузії, конвективності, градієнта тиску та вектора вузлових зусиль за такими правилами [6—8, 12]:

$$\mathbf{M}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_e = \begin{pmatrix} 2\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy} + \mathbf{K}_{zz} & \mathbf{K}_{xy} & \mathbf{K}_{xz} & -\mathbf{Q}_x \\ \mathbf{K}_{xy}^T & \mathbf{K}_{xx} + 2\mathbf{K}_{yy} + \mathbf{K}_{zz} & \mathbf{K}_{yz} & -\mathbf{Q}_y \\ \mathbf{K}_{xz}^T & \mathbf{K}_{yz}^T & \mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy} + 2\mathbf{K}_{zz} & -\mathbf{Q}_z \\ -\mathbf{Q}_x^T & -\mathbf{Q}_y^T & -\mathbf{Q}_z^T & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_e(\mathbf{U}_e) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}(u, v, w) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}(u, v, w) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}(u, v, w) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_e = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{0}$ — нульова матриця або вектор відповідних розмірів. Далі за звичайною схемою МКЕ будемо відповідні матриці та вектор для всієї системи. Остаточно МКЕ-дискретизація рівнянь Нав'є—Стокса виглядає так:

$$\mathbf{M}_s \frac{d\mathbf{U}_s}{dt} + (\mathbf{K}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{U}_s)) \mathbf{U}_s = \mathbf{F}_s. \quad (25)$$

У стаціонарній задачі швидкості та тиск не залежать від часу t , тому першого доданку не буде:

$$(\mathbf{K}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{U}_s)) \mathbf{U}_s = \mathbf{F}_s. \quad (26)$$

Чисельна реалізація. Розрахунки за описаним алгоритмом проведено у математичному пакеті MATLAB з використанням деяких функцій, описаних у роботах [16,17]. Для моделі, наведеної на рис. 1, створено сітку МКЕ, яка містить 8397 тетрадральних кінцевих елементів, 1821 вузол у вершинах тетраєдрів і 12825 вузлів у вершинах та серединах ребер тетраєдрів. Розбиття на кінцеві елементи показано на рис. 1. Під час руху розплаву внутрішні сили відсутні, а рух здійснюється внаслідок граничних умов. Тому в рівняннях для стаціонарної (26) та нестаціонарної (25) задач $\forall \mathbf{F}_e = \mathbf{0}$, а у векторі \mathbf{F}_s ненульовими будуть тільки ті координати, які виникають у результаті врахування граничних умов.

Для розрахунків взято сталь 25Х2НМФА з такими фізичними характеристиками: щільність $\rho = 6750 \text{ кг/м}^3$; динамічна в'язкість $\mu = 0.06 \text{ Па}\cdot\text{с}$.

Стаціонарну задачу (26) розв'язано методом послідовних наближень (простої ітерації). Початковим наближенням взято вектор з усіма нульовими вузловими швидкостями та всіма вузловими тисками 10^5 Па . Позначивши номер ітерації j , запишемо ітераційну схему для стаціонарної задачі:

$$(\mathbf{K}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{U}_s^j)) \mathbf{U}_s^{j+1} = \mathbf{F}_s.$$

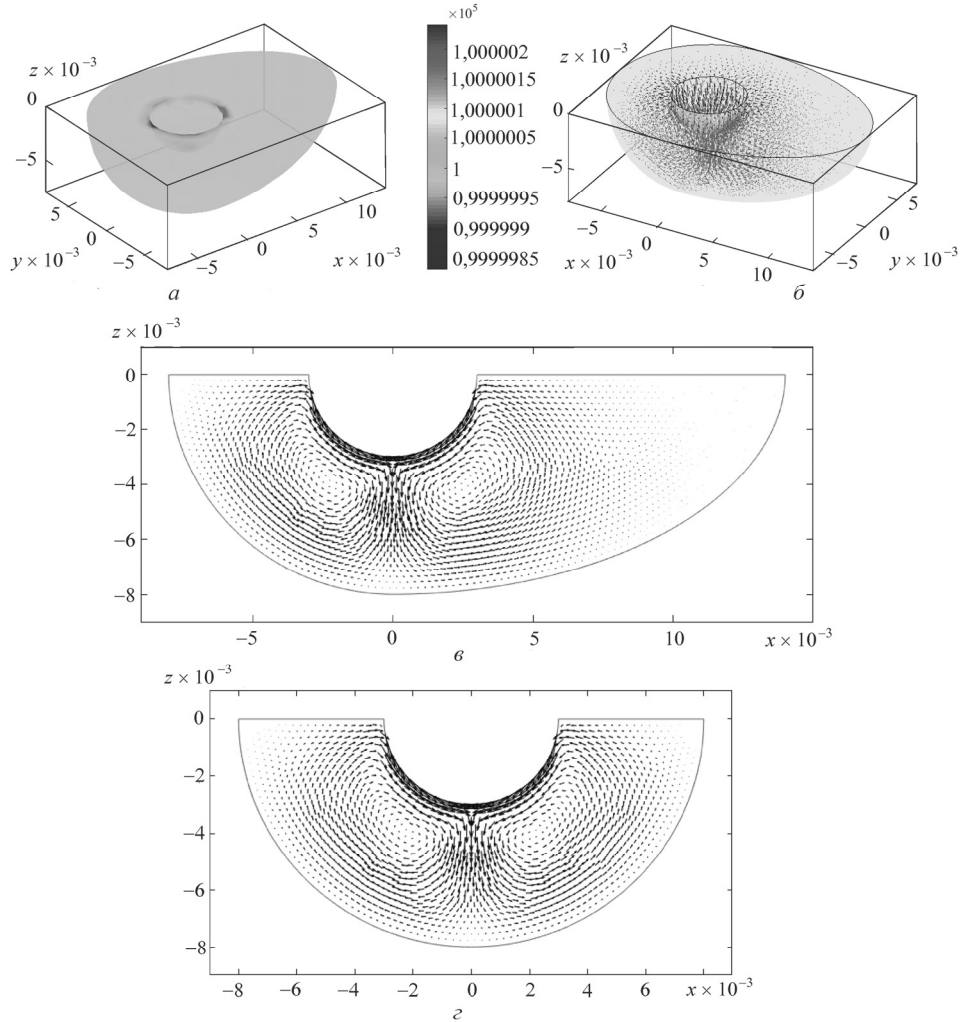


Рис. 4. Стационарне поле тиску (а) і швидкостей (б) у повздовжньому (в) та у поперечно-му (г) перерізах

Як критерій виходу з ітерацій використано зменшення евклідової норми різниці між двома послідовними наближеннями до 10^{-3} :

$$\| \mathbf{U}_s^{j+1} - \mathbf{U}_s^j \| < 10^{-3}. \quad (27)$$

Виконання критерію (27) було досягнуто за дев'ять ітерацій. Результати розв'язання стаціонарної задачі (26) наведено на рис. 4. Векторне поле швидкостей показано стрілками, а тиск — кольором. Найбільша швидкість (до 20 м/год) спостерігається в основі зварювальної дуги, а тиск майже ніде не відрізняється від 10^5 Па.

Для розв'язання нестационарної задачі треба провести дискретизацію рівняння (25) за часом. Позначимо через k момент часу, а через Δt — приріст за часом. Тоді зворотна схема Ейлера, що апіорі збігається, виглядає так:

$$\mathbf{M}_s \frac{\mathbf{U}_s^{k+1} - \mathbf{U}_s^k}{\Delta t} + (\mathbf{K}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{U}_s^{k+1})) \mathbf{U}_s^{k+1} = \mathbf{F}_s.$$

За цією схемою для кожного $(k+1)$ -го моменту часу треба розв'язувати нелінійну систему рівнянь

$$(\mathbf{M}_s + \Delta t (\mathbf{K}_s + \mathbf{C}_s(\mathbf{U}_s^{k+1}))) \mathbf{U}_s^{k+1} = \mathbf{M}_s \mathbf{U}_s^k + \Delta t \mathbf{F}_s. \quad (28)$$

Розв'язок нестационарної задачі знайдено на відрізку часу $t \in [0; 5]$ с з кроком $\Delta t = 0,01$ с. Для кожного моменту часу систему (28) розв'язували методом простої ітерації. Початковим наближенням для $(k+1)$ -го моменту часу обрано розв'язок у k -й момент часу. Критерієм збіжності ϵ (27). Для його досягнення знадобилося від п'яти ітерацій (у початкові моменти часу) до трьох (у кінцеві моменти). Це пояснюється тим, що, поперше, при малих значеннях Δt нелінійності у (28) впливають менше, ніж у (26). По-друге, початкове наближення обирається ближче до шуканого розв'язку. По-третє, зі зростанням значення k розв'язок наближається до стаціонарного, і норма різниці між розв'язками в сусідні моменти часу зменшується. У випадку, що розглядається, за 5 с усі швидкості та тиски практично виходять на стаціонарний рівень: евклідова норма різниці між розв'язком нестационарної задачі в момент $t = 5$ с та розв'язком стаціонарної задачі складає 0,0018.

Висновки

Вперше запропоновано тривимірну модель температурного режиму процесу зварювання, яка передбачає розрахунки течії розплавленого металу в зварювальній ванні та визначення форми потоків. Для розрахунків використано метод МКЕ. Дискретизацію рівнянь Нав'є—Стокса для нестисливої рідини проведено за схемою Гальоркіна. Використано тетраедральний кінцевий елемент з чотирма ступенями волі для тиску та десятима для кожної координати вектору швидкості.

Усі матриці та вектори нелінійної системи рівнянь отримано в явному вигляді за допомогою аналітичного інтегрування функцій форми та їхніх похідних за об'ємом кінцевого елемента. Запропонований підхід дозволяє швидко заповнювати матриці та вектори МКЕ, що прискорює розрахунки тривимірних систем.

Результати чисельних розрахунків свідчать про те, що і стаціонарну, і нестационарну задачу в кожен момент часу можна розв'язати методом простої ітерації, який швидко збігається. Дискретизацію за часом у нестационарній задачі проведено за зворотною схемою Ейлера, яка теж є збіжною.

Результати розрахунків течії розплаву в зварювальній ванні показують, що швидше за все він рухається в основі зварювальної дуги, а повільніше за все — на границі з твердим тілом. Тиск у розплаві ванни мало відрізняється від номінального. Отримані результати дозволяють внести відповідні уточнення у вибір параметрів режиму дугового зварювання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дмитрик В.В., Шевченко В.В.* К эффективности использования тепла расплава ванны // Автоматическая сварка, 2001. № 4, с. 25—27.
2. *Акулов А.И., Дмитрик В.В., Бабушкина В.А.* Способ определения направления движения потоков жидкого металла из головной в хвостовую часть сварочной ванны. А.с. СССР №1776524.В23К31.12. Бюл. № 43.Опубл. 23.11.1992.
3. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975, 544 с.
4. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение, 1974, 344 с.
5. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979, 392 с.
6. *Donea J., Huerta A.* Finite Element Methods for Flow Problems. NY: Wiley, 2003, 362 p.
7. *Jaijan W.* Solution to Incompressible Navier-Stokes Equations by Using Finite Element Method. Arlington: The University of Texas, 2010, 124 p.
8. *Reusken A.* Numerical Methods for the Navier—Stokes Equations. Aachen: RWTH, 2012, 62 p.
9. *Волков П.К., Переверзев А.В.* Метод конечных элементов для решения краевых задач регуляризованных уравнений несжимаемой жидкости в переменных «скорость-давление» // Математическое моделирование, 2003, 15, № 3, с. 15—28.
10. *Гобыш А.В.* Трёхмерные конечноэлементные аппроксимации уравнений Навье—Стокса, Стокса, Эйлера // Сб. науч. трудов НГТУ, 2006, № 1 (43), с. 55—60.
11. *Дмитрик В.В., Калиниченко В.И.* Численное решение краевых задач электродуговой сварки на основе схемы Галеркина // Доп. НАУ, 2002, № 5, с. 59—64.
12. *Baker A.* A Finite Element Solution Algorithm for the Navier—Stokes Equations. Washington, DC.: NASA, 1974, 78 p.
13. *Pironneau O.* Finite Element Methods for Fluids. Paris: Wiley, 1989, 176 p.
14. *Іглін С.П.* Оптимізація форми елементів конструкцій. Харків: НТУ «ХП», 2009, 240 с.
15. *FreeCAD — Your Own 3D Parametric Modeler.* <https://www.freecadweb.org/>.
16. *Partial Differential Equation Toolbox User's Guide.* The MathWorks, Inc. 1995—2018, 1796 p.
17. *Computational fluid dynamics & heat transfer solver for MATLAB.* <https://quicker-sim.com/>.

Отримано 13.11.19

REFERENCES

1. Dmitrik, V.V. and Shevchenko, V.V. (2001), "About the efficiency of heat use of the molten pool", *Avtomaticheskaya svarka*, no. 4, pp. 25-27.
2. Akulov, A.I., Dmitrik, V.V. and Babushkina, V.A. (1992), "The method of determining the direction of motion of the flows of liquid metal from the head to the tail of the weld pool", *A.s. SSSR*, no. 1776524.B23K31.12.
3. Zienkiewicz, O.C. (1971), *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [The Finite Element Method in Engineering Science], McGraw-Hill, London, UK.
4. Postnov, V.A. and Kharkhurim I.Ya. (1974), *Metod konechnykh elementov v raschetah sudovykh konstrukciy* [The finite element method in the calculation of ship structures], Sudostroyeniye.
5. Segerlind, L.J. (1976), *Primeneniye metoda konechnykh elementov* [Applied Finite Element Analysis], John Wiley and Sons, New York, USA.
6. Donea, J. and Huerta, A. (2003), *Finite Element Methods for Flow Problems*, Wiley, New York, USA.
7. Jaijan, W. (2010), *Solution to Incompressible Navier-Stokes Equations by Using Finite Element Method*, The University of Texas, Arlington, USA.
8. Reusken, A. (2012), *Numerical Methods for the Navier-Stokes Equations*, RWTH, Aachen.
9. Volkov, P.K. (2003), "The finite element method for solving boundary value problems of the regularized equations of an incompressible fluid in the "velocity-pressure" variables", *Matematicheskoe modelirovanie*, Vol. 15, no. 3, pp. 15-28, Moscow, Russia.
10. Gobysh, A.V. (2006), "Three-dimensional finite element approximations of the Navier-Stokes, Stokes, Euler equations", *Sbornik nauchnykh trudov NTGU*, no. 1(43), pp. 55-60.
11. Dmitrik, V.V. and Kalinichenko, B.I. (2002), "Numerical solution of boundary value problems of electric arc welding based on the Galerkin scheme", *Dopovidi NANU*, no. 5, pp. 59-64.
12. Baker, A. (1974), *A Finite Element Solution Algorithm for the Navier-Stokes Equations*, DC: NASA, Washington, USA.
13. Pironneau, O. (1989), *Finite Element Methods for Fluids*, Wiley, Paris, France.
14. Iglin, S.P. (2009), *Optimizaciya formy elementiv konstrukciy* [The Shape Optimization of Structure Elements], NTU KhPI, Kharkiv, Ukraine.
15. "FreeCAD – Your Own 3D Parametric Modeler", available at: <https://www.freecadweb.org/> (accessed January 27, 2020).
16. (1995-2018), "Partial Differential Equation Toolbox User's Guide", The MathWorks.
17. "Computational fluid dynamics & heat transfer solver for MATLAB", available at: <https://quickersim.com/> (accessed January 27, 2020).

Received 13.11.19

С.П. Іглін, В.В. Дмитрик, В.Ю. Скульський

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В СВАРОЧНОЙ ВАННЕ

В трехмерной постановке решена задача о движении расплавленного металла в сварочной ванне в процессе электродуговой сварки. Исследована скорость потоков жидкого металла в расплаве ванны. Используются тетраэдральные конечные элементы. Дискретизация уравнений Навье—Стокса по координатам в пространстве выполнена по схеме

Галеркина с аналитическим интегрированием по объему элемента. Для решения нестационарной задачи использована обратная схема Эйлера. Приведены численные результаты.

К л ю ч е в ы е с л о в а: расплав, сварочная ванна, уравнения Навье—Стокса, метод конечных элементов, схема Галеркина, трехмерная задача.

S.P. Iglin, V.V. Dmitrik, V.Yu. Skulskyi

INVESTIGATION OF LIQUID METAL MOVEMENT IN A WELDING BATH

The problem of the movement of liquid metal in a welding pool in arc welding process is solved in three-dimensional formulation. The velocities of liquid metal flows in the bath melt were investigated. Tetrahedral finite elements are used. Discretization of Navier-Stokes equations by coordinates in space is carried out according to the Galerkin scheme with analytical integration along the element's volume. The Eulerian inverse scheme is used to solve the non-stationary problem. Numerical results are presented.

К е у в о р д с: melt, welding pool, Navier-Stokes equations, finite element method, Galerkin scheme, three-dimensional problem.

ІГЛІН Сергій Петрович, канд. техн. наук, доцент, професор кафедри прикладної математики Національного технічного університету України ТУ «Харківський політехнічний інститут». У 1976 р. закінчив Харківський політехнічний інститут. Область наукових досліджень — оптимізація, чисельні методи, теплофізичні процеси, статистика, теорія графів.

ДМИТРИК Віталій Володимирович, д-р техн. наук, професор, зав. кафедрою зварювання Національного технічного університету України ТУ «Харківський політехнічний інститут». У 1974 р. закінчив Український заочний політехнічний інститут. Область наукових досліджень — теплові та фізико-хімічні процеси, у металі зварювальних з'єднань.

СКУЛЬСЬКИЙ Валентин Юрійович, д-р техн. наук, пров. наук. співроб. Інституту електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України. У 1979 р. закінчив Київський політехнічний інститут. Область наукових досліджень — дослідження структури, властивостей енергомашинобудівних сталей і їх зварних з'єднань, розробка технологічних процесів зварювання виробів для енергетичної галузі.

