№ 1 (s) (3), 2020

УДК 62-551.4

A. O. Lozynskyy
Lviv Polytechnic National University,
Department of Electromechatronics and Computerized Electromechanical Systems,
andriy.o.lozynskyy@lpnu.ua

L. I. Demkiv
Lviv Polytechnic National University,
Department of Electromechatronics and Computerized Electromechanical Systems,
lyubomyr.i.demkiv@lpnu.ua

O. Y. Lozynskyy
Lviv Polytechnic National University,
Department of Electromechatronics and Computerized Electromechanical Systems,
orest.y.lozynskyi@lpnu.ua

Y. O. Biletskyi
Lviv Polytechnic National University,
Department of Electromechatronics and Computerized Electromechanical Systems,
yurii.o.biletskyi@lpnu.ua

OPTIMIZATION OF THE ELECTROMECHANICAL SYSTEM BY FORMATION OF A FEEDBACK MATRIX BASED ON STATE VARIABLES

https://doi.org/ 10.23939/sepes2020.01s.018

The task of providing the required dynamic performance of technical systems is one of the main tasks of the automatic control theory. The synthesis of such systems is carried out based on certain criteria that characterize control quality. Today the most common criterion of the functioning of a dynamic system is an integral quadratic form, which includes not only the coordinates of the object, and also the control influences. It should be noted that the inclusion of the control component in the integrated quality criterion allows, in the case of its minimization, to receive control influences of limited amplitude, which is especially important during the design of the a control systems for electromechanical objects. Thus, one of the modern approaches to creating optimal linear stationary dynamic systems consist in:

- **writing equations that describe such systems in the state-space form;**
- **formation of systems optimality criteria in the form of an integral functional of the quadratic forms of these variables and control influences;**
- **minimization of these functionals by constructing regulators as a set of feedback based on state variables and synthesis of coefficients of these connections.**

The problem belongs to the class of variational problems and in general, it is reduced to solving Riccati equations, differential or algebraic: differential for nonstationary systems, when the matrix P, which is included in this equation, depends on time and the integral quality criterion has limits of integration from t_1 to t_2, or algebraic, when we have a stationary system, it is clear that the matrix P does not depend on time and the limit of integration of the quality criterion is from zero to infinity. It is for many electromechanical systems that it is advisable to minimize such a criterion at long intervals. Such systems include tracking systems, stabilization systems, etc. Thus, the problem of synthesis of the optimal electromechanical system by finding the control influences of such a system based on the principle of analytical design of regulators, as the problem is called in Ukrainian literature, or as in Western literature – "linear quadratic regulator".

The article contains problem statement, the research relevance, purpose statement, analysis of the latest research and publications, presentation of the main material, conclusions and bibliography.

Keywords: control systems, linear–quadratic regulator, Riccati equations, state-space representation, transients.*ї*

Problem statement

Based on the above-mentioned principles, to synthesise a set of feedbacks of a specific open electromechanical system, to build transients of the coordinates of the object and to compare the results in terms of overshoot and performance.

Topicality of the research

The relevance of the study is due to the accepted currently requirements for the formation of transients in dynamic systems, in particular in systems described by state variable models.

Aim and objectives

The purpose of this article is to synthesize the optimal electromechanical system by finding the control signal of such system based on the principles of the linear quadratic regulator problem.

Analysis of recent research and publications

General questions of the synthesis of optimal linear stationary dynamical systems based on the solutions of the Riccati equations are given in [1–5]. In [6, 7] the issues of synthesis of optimal linear systems with quadratic quality criteria based on the principles of Bellman Dynamic Programming are considered, using Riccati matrix equations again. As we can see, this is a powerful apparatus for the synthesis of optimal dynamical systems, despite the fact that [8, 9] indicates some difficulties in solving nonlinear Riccati equations, especially for high-order systems.

Presentation of the main results of the research.

Suppose we have an open loop electromechanical system for a DC motor speed control [5], the block diagram of which is shown in Fig. 1.

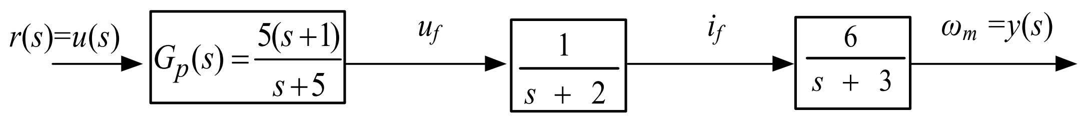

Fig. 1. Block diagram of the studied electromechanical system

The signal graph of this system is shown in Fig. 2.

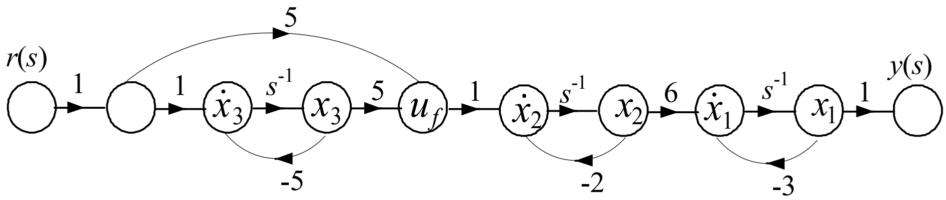

Fig. 2. The Signal graph of the studied electromechanical system

Here the state variables are $x_1 = \omega_m$ – angular motor speed; $x_2 = i_f$ – field current; x_3 – intermediate coordinate.

Based on the above structure of the controller, we can find the relationship between the state variables x_3 and $\dot{x}_2$, to form a model in the state variables.

This relationship is calculated by subtracting from the linear dependency between the variables *r* and u_f the path indicated by the branch with a transmission factor of 5 [10]. Therefore,

$$\frac{5+5s^{-1}}{1+5s^{-1}} - 5 = \frac{-20s^{-1}}{1+5s^{-1}} \quad \text{or} \quad \frac{-20}{s+5} + 5 = \frac{5(s+1)}{s+5}$$

and the relationship between x_3 and $\dot{x}_2$ is represented by a branch weighing -20 Then the graph of a closed looped system will look like Fig. 3, where the existing regulator is represented by a parallel connection of a branch with the factor “5” and a branch with the factor $\frac{-20}{s+5}$.

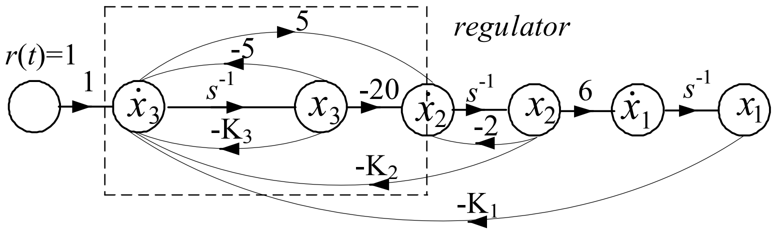

Fig. 3. Graph of a closed loop system

Let's form a closed loop system as a state variables model system. Then the vector-matrix equation of such system will be written as follows:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}$$

where $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Now, selecting the optimization criterion in the form

$$J = \int_0^{\infty} \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{U}^2 \right) dt \to \min.$$

where there is a component $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{U}^2$, and not $\mathbf{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{R_2} \cdot \mathbf{U}$, because the system with one input and one output, and $\boldsymbol{\alpha} = 0.5$, which means that the components of the criterion are equivalent, and **Q** – identity matrix, let’s write the control signal as

$$\mathbf{U} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{X},$$

where **K** – feedback matrix.

In [6] it was proved that for a linear stationary system under the quadratic optimization criterion the control signal has the form

$$\mathbf{U} = -\boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{X},$$

where **P** – a matrix that is found by solving the algebraic Riccati equation

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} - \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P} = -\mathbf{Q},$$

and the feedback factor matrix is written as

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P}$$

To calculate the time processes of the state variables of such a closed electromechanical system, it is first necessary to synthesize a matrix of feedback coefficients.

Therefore, taking into account the matrices **A** and **B** and assuming that **Q** – is the identity matrix, we write the Riccati equation in the following form

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 0 & -20 & -5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} -$$

$$-\boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

Multiplying the matrices and solving the resulting system of equations in symbolic form using the automatic package "Mathematika", we get seven options for solutions not only real but also complex-conjugate. Based on the compliance with the Sylvester criterion [11] and the system stability conditions, we have chosen a solution when P_{11} = 0.1389; P_{12}=P_{21}=0.0899; P_{22}=0.2978; P_{13}=P_{31}= -0,1618; P_{32}=P_{23}= =-0.8228; P_{33} = 3.2378, in which the matrix **P** is positive-definite.

Given the expression for the matrix $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$, we find the feedback matrix as:

$$\mathbf{K} = -\alpha^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} = -\boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 5P_{21} + P_{31} & 5P_{22} + P_{32} & 5P_{23} + P_{33} \end{vmatrix}$$

and, accordingly, the expressions for the feedback coefficients for the state variables will be as follows:

$$K_1 = -2(5P_{21} + P_{31}); \quad K_2 = -2(5P_{22} + P_{32}); \quad K_3 = -2(5P_{23} + P_{33}).$$

Therefore, the control signal will be written as:

$$U = -2[(5P_{21} + P_{31})x_1 + (5P_{22} + P_{32})x_2 + (5P_{23} + P_{33})x_3].$$

And, taking into account the chosen solutions for P_{ij}, we get

$$U = -0.576\, x_1 - 1.332x_2 + 1.754x_3.$$

Now there is a question of construction of transients in such electromechanical system where it is necessary to use a set of feedbacks based on state variables x_1 and x_2 and x_3 and the synthesized values of these gains factors.

To do this, in the Simulink environment of the MATLAB package we will create models for calculating the time processes of the state variables in the form of Fig. 4*a*, 4*b*.

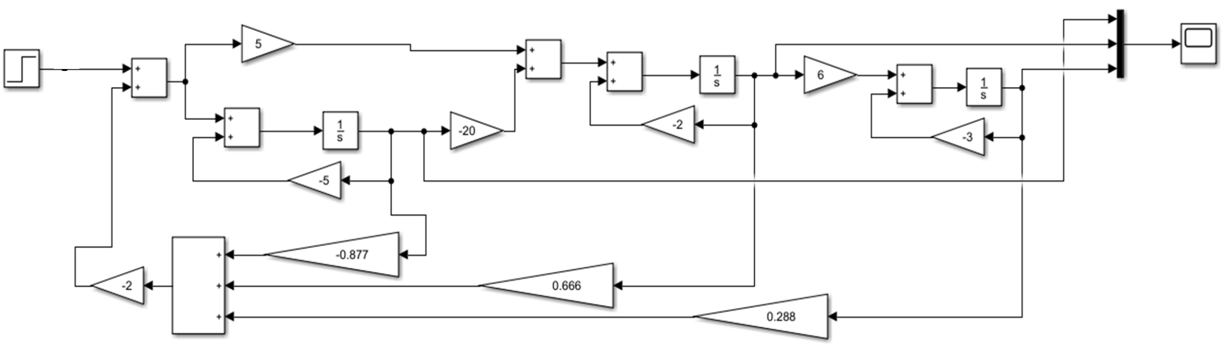

Fig. 4a. The system is closed by three feedbacks

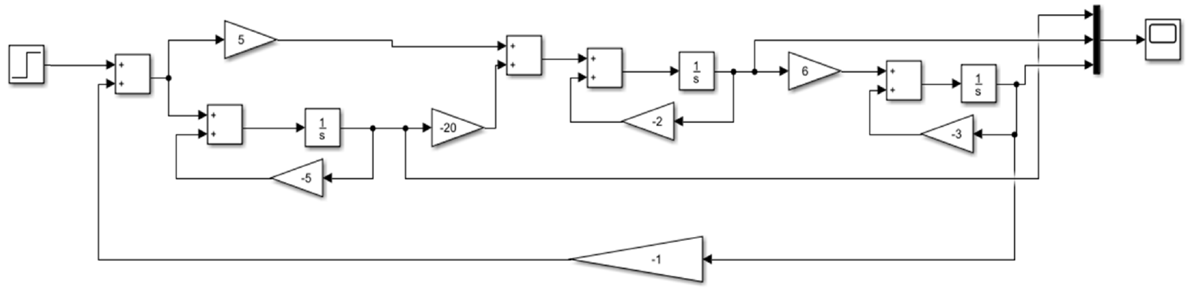

Fig. 4b. The system is closed by a single feedback

The transients of state variables with the feedback coefficients K_1 and K_2 and K_3 synthesized by solving the Riccati equation are presented in Fig. 5.

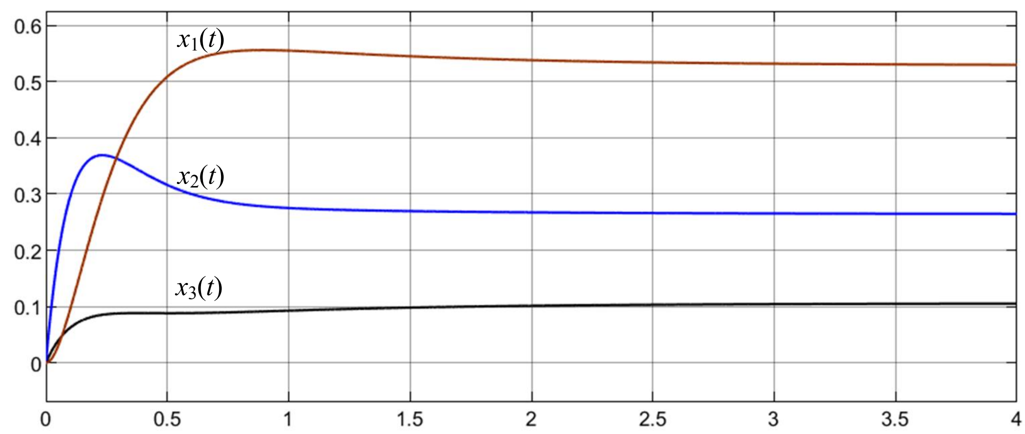

Fig. 5. Oscillograms of transients of state variables $x_1(t)$, $x_2(t)$ and $x_3(t)$
of the closed loop system with three feedbacks (K_1, K_2 and K_3)

Analysis of these processes shows that in a steady state the state variables have the following values:

$$x_{1\text{est}} = 0.53; \quad x_{3\text{est}} = 0.265; \quad x_{3\text{est}} = 0.1.$$

The magnitude of overshoot of the state variables are

$$\sigma x_1 = 0.02 \text{ or } 3.7\ \%; \quad \sigma x_2 = 0.1 \text{ or } 18.8\ \%; \quad \sigma x_3 = 0.$$

and, accordingly, the performance of the processes will be as follows

$$t_1 = 0.55\text{s}; \; t_3 = 0.55\text{s}; \; t_3 = 0.25\text{s}.$$

If the feedbacks are formed only by two state variables $x_1(t)$ and $x_2(t)$, namely assuming that the feedback factor by the coordinate $x_3(t)$ is zero, then we have the following picture Fig. 6.

As a result of the analysis of these processes we will receive:

$$x_{1\text{est}} = 0.55; \quad x_{3\text{est}} = 0.225; \quad x_{3\text{est}} = 0.1;$$

$$\sigma x_1 = 0.04 \text{ or } 7.2\ \%; \quad \sigma x_2 = 0.1 \text{ or } 18\ \%; \quad \sigma x_3 = 0;$$

$$t_1 = 1.5\text{s}; \; t_3 = 1\text{s}; \; t_3 = 1.55\text{s}.$$

Fig. 7 shows the processes of change of variables $x_1(t)$, $x_2(t)$ and $x_3(t)$ for the case of a closed loop system with traditional single feedback by output coordinate $x_1(t)$.

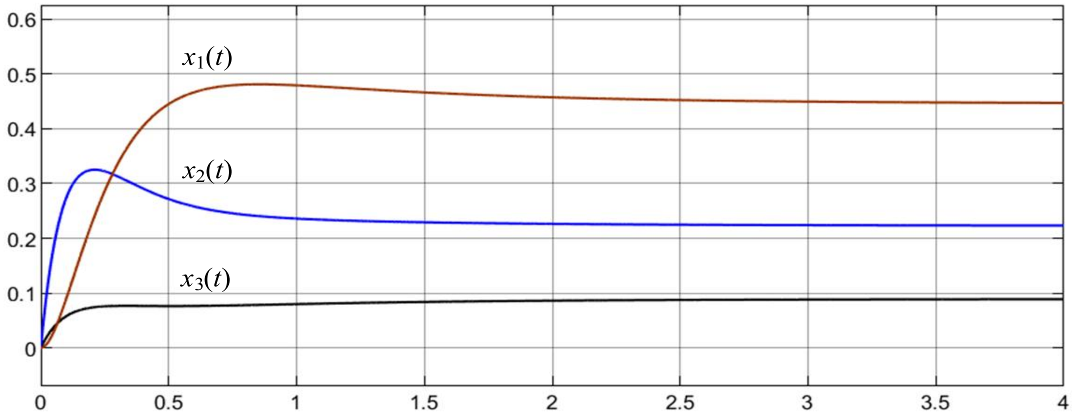

Fig. 6. Oscillograms of transients of state variables $x_1(t)$, $x_2(t)$ and $x_3(t)$ of the closed loop system with two feedbacks (K_3= 0)

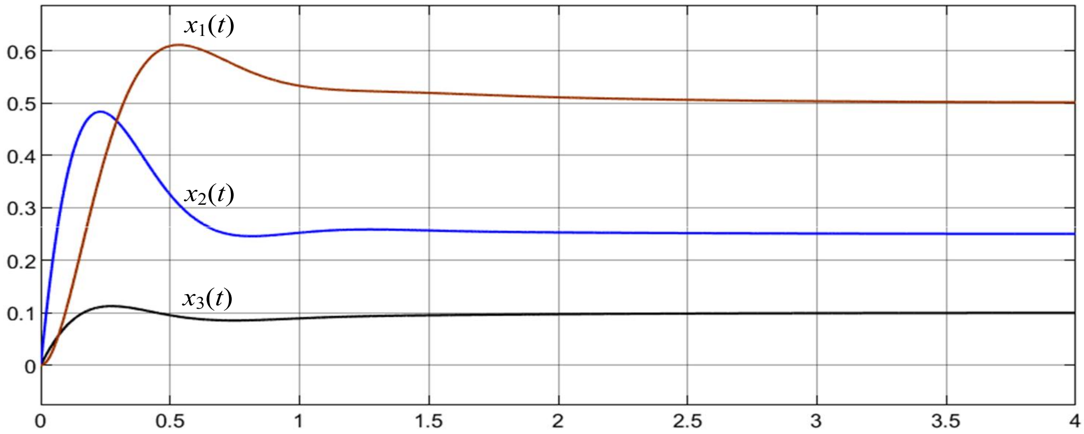

Fig. 7. Oscillograms of transients of state variables $x_1(t)$, $x_2(t)$ and $x_3(t)$ of the closed loop system with single feedback (K_1= 1)

The indicators that interest us for the processes of Fig. 7 are as follows:

$$x_{1\text{est}} = 0.5; \quad x_{3\text{est}} = 0.25; \quad x_{3\text{est}} = 0.1;$$

$$\sigma x_1 = 0.1 \text{ or } 20\ \%; \ \sigma x_2 = 0.23 \text{ or } 46\ \%; \ \sigma x_3 = 0.02 \text{ or } 4\%;$$

$$t_1 = 2\text{s}; \ \ t_3 = 1\text{s}; \ \ t_3 = 0.5\text{s}.$$

Finally, Fig. 8 shows the processes of state variables x_1 (t) and x_2 (t) and x_3 (t) for the case of an open loop system.

Accordingly, the static and dynamic indicators for this case are as follows:

$$x_{1\text{est}} = 1; \quad x_{3\text{est}} = 0.5; \quad x_{3\text{est}} = 0.2.$$

$$\sigma x_1 = 0.02 \text{ or } 20\ \%; \quad \sigma x_2 = 0.2 \text{ or } 20\ \%; \quad \sigma x_3 = 0\ \%;$$

$$t_1 = 2.5\text{s}; \ \ t_3 = 1.55\text{s}; \ \ t_3 = 0.5\text{s}.$$

Analyzing the data of these figures, we conclude that in the case when there is no feedback on the variable $x_3(t)$, namely K_3 =0, we have an increase in overshoot $\sigma x_1 = 7.2\ \%$ for Fig.6 against $\sigma x_1 = 3.7\ \%$ for Fig. 5 and a significant reduction in the performance of the processes of all state variables with a slight difference in their established values.

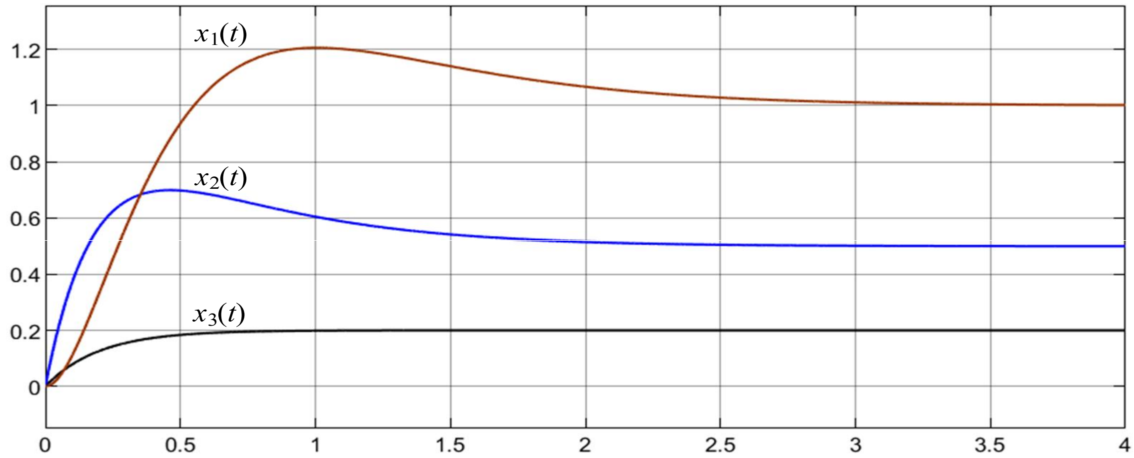

Fig. 8. Oscillograms of transients of state variables $x_1(t)$, $x_2(t)$ and $x_3(t)$ of the open loop system

As for the comparison of processes on Fig. 5 and processes in the open loop system on Fig.8, there is a clear decrease in the established values of state variables in Fig. 5, but we have a significant improvement of the dynamic indicators of the processes in this figure, including overshoot and performance.

In the case of only one feedback on the state variable $x_1(t)$ with the traditional value K_1=1, we have the processes of Fig. 7, where established values of state variables are almost identical to the processes of Fig. 5, but significantly worsened dynamic indicators such as overshoot and performance. Thus, the synthesized dynamical system with state variables feedback coefficients K_1, K_2 and K_3 proved to be the best in terms of process dynamics. It is clear that the required established value of the output variable can always be adjusted by selecting the right value of task signal.

Conclusions

As our research has shown, modern software allows us to analytically find solutions of the Riccati equation and check them for compliance with the Sylvester criterion, and thus provide the ability to effectively use the principle of linear-quadratic regulator for the synthesis of dynamic systems, in particular, the synthesis of optimal electromechanical systems with the set indicators of dynamics such as performance of processes and their overshoot.

References

1. *Egupov N., Methods of the classical and modern theory of automatic control: Synthesis of regulators and theory of optimization of automatic control systems. Textbook. Moscow, Russia: The Bauman University Publishing House, 2000. 736 p. (Rus)*

2. *Willems J. C Least square stationary optimal control and the algebraic Riccati equation // IEEE Trans. Autom. Control. 1971. Vol. 6. P. 621–634*

3. *Kim D. Theory of Automatic control, Vol. 2: Multi-dimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems. Moscow: FIZMATHLIT, 2004. 464 p. (Rus)*

4. *Bernsterein D. S. LQG control with an H-performance bound: A.Riccati equation approach / D. S. Bernsterein, W. M. Haddad // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. Vol. 34. No 3*

5. *Dorf R., Bishop R. Modern control systems. Translated by V. Kopylov, Moscow, Russia: Binom. Laboratory of knowledge, 2002. 832 p. (Rus).*

6. *Poljak B., Shherbakov P., Robust stability and control. Moscow, Russia: Nauka, 2002. 303 p. (Rus)*

7. Lozynskyj O., Lozynskyj A., Marushhak Ya., Paranchuk Ya., Tcyapa V., Synthesis of linear optimal dynamic systems: Tutorial, Lviv, Ukraine: Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2016. 392 p. (Ukr)

8. J. Hsu and A. Meyer, Modern Control Principle and Applications. Transl. From Eng. Edited by Yu. I. Topchev. M: Mashinostroyeniye, 1972. 544 p

9. Petersen I. R., Hollot C. V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems // Automatica. 1986. Vol. 22, No 4. 397–411

10. Lozynskyj O. Y., Biletskyi Y. O., Lozynskyj A. O., Moroz V. I. Formation of the fundamental matrix of an open electromechanical system and its application for the calculation of time processes of state variables // Energy engineering and control systems. 2020. Vol. 6. No 2 (Ukr, on review)

11. Kaleniuk P., Rudavskyi Y., Tatsiyi R., Differential equations: Tutorial, Lviv, Ukraine: Publishing House of Lviv Polytechnic National University, 2014. 380 p. (Ukr)

Список використаних джерел

1. Методы классической и современной теории управления: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. / под ред. Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 200. 736 с.

2. Willems J. C Least square stationary optimal control and the algebraic Riccati equation // IEEE Trans. Autom. Control.1971. Vol. 6. P. 621–634

3. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 2: Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: ФИЗ-МАТЛИТ, 2004. 464 с.

4. Bernsterein D. S. LQG control with an H-performance bound: A.Riccati equation approach / D. S. Bernsterein, W. M. Haddad // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. Vol. 34, No 3.

5. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Б. Бишоп; пер. с. англ. Б. И. Копылова. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. 832 с.

6. Поляк Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. М.: Наука, 2002. 303 с.

7. Лозинський О. Ю Синтез лінійних оптимальних динамічних систем: навч. посіб. / О. Ю. Лозинський, А. О. Лозинський, Я. Ю. Марущак, Я. С. Паранчук, В. Б. Цяпа. Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2016. 392 с.

8. Д. Сю, А. Мейер. Современная теория автоматического управления и ее применение. пер. с анг.; под ред. Ю. И. Топчева. М: Машиностроение, 1972. С. 544

9. Petersen I. R., Hollot C. V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems // Automatica. 1986. Vol. 22, No 4, 397–411

10. Лозинський О. Ю., Білецький Ю. О., Лозинський А. О., Мороз В. І. Формування фундаментальної матриці відкритої електромеханічної системи і її застосування для розрахунку часових процесів змінних стану. Energy engineering and control systems. 2020. Vol. 6, No 2 (On review)

11. Каленюк П. І. Диференціальні рівняння: навч. посіб. / П. І. Каленюк, Ю. К. Рудавський, Р. М. Тацій та ін. Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2014. 380 с.

А. О. Лозинський
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра електроприводу і комп’ютеризованих електромеханічних систем,
andriy.o.lozynskyy@lpnu.ua

Л. І. Демків
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра електроприводу і комп’ютеризованих електромеханічних систем,
lyubomyr.i.demkiv@lpnu.ua

О. Ю. Лозинський
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра електроприводу і комп’ютеризованих електромеханічних систем,
orest.y.lozynskyi@lpnu.ua

Ю. О. Білецький
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра електроприводу і комп’ютеризованих електромеханічних систем,
yurii.o.biletskyi@lpnu.ua

ОПТИМІЗАЦІЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ ШЛЯХОМ ФОРМУВАННЯ МАТРИЦІ ЗВОРОТНИХ ЗВ’ЯЗКІВ ЗА ЗМІННИМИ СТАНУ

Задача забезпечення потрібних динамічних показників технічних систем є однією з основних задач теорії автоматичного керування. Синтез таких систем здійснюється на основі тих чи інших критеріїв, які характеризуються якість керування. На сьогоднішній день найбільш поширеним критерієм функціонування динамічної системи є інтегральний критерій від квадратичної форми, яка включає не тільки координати об’єкта, а і керуючі впливи. Тут слід зауважити, що внесення керуючої складової в інтегральний критерій якості дає змогу в разі його мінімізації отримати керуючі впливи обмеженої амплітуди, що особливо важливо підчас проектування реальних систем керування електромеханічними об’єктами. Таким чином один з сучасних підходів до створення оптимальних лінійних стаціонарних динамічних систем полягає в:

- **записі рівнянь, які описують такі системи в моделях змінних стану;**
- **формуванні критеріїв оптимальності систем у вигляді інтегрального функціоналу від квадратичних форм цих змінних і керуючих впливів;**
- **мінімізації цих функціоналів шляхом конструювання регуляторів як набору зворотних зв’язків за змінними стану і синтезі коефіцієнтів цих зв’язків;**

Поставлена задача належить до класу варіаційних задач і в загальному виді вона зводиться до розв’язку рівнянь Ріккаті, диференціального чи алгебраїчного: диференціального для нестаціонарних систем, коли матриця Р, яка входить в це рівняння, залежить від часу і інтегральний критерій якості має границі інтегрування від t_1 до t_2, або алгебраїчного, коли маємо стаціонарну систему, зрозуміло, що матриця Р не залежить від часу і границі інтегрування критерія якості є від нуля до нескінченності. Саме для багатьох електромеханічних систем вважається доцільним мінімізувати такий критерій на тривалих інтервалах часу. До таких систем можна зарахувати слідкуючі системи, системи стабілізації, тощо. Отже, виникає задача синтезу оптимальної електромеханічної системи шляхом знаходження керуючих впливів такої системи виходячи з принципів аналітичного конструювання регуляторів, як називається наведена задача в українській літературі, або як у західній літературі – “задачі про лінійний квадратичний регулятор”.

Стаття містить: постановку проблеми, актуальність дослідження, мету роботи, аналіз останніх досліджень і публікацій, виклад основного матеріалу, висновки і список літератури.

Ключові слова: ***системи керування, аналітичне конструювання регуляторів, рівняння Ріккаті, рівнняя в змінних стану, перехідні процеси.***