УДК 514.18 **Р.М.Колочавін**

# РОЗРАХУНОК КОЛИВАНЬ ДВОЛАНКОВИХ МАЯТНИКІВ

*Київський національний університет будівництва і архітектури*

***Наведено спосіб складання диференціальних рівнянь опису коливань дволанкового маятника. Спосіб базується на розв'язанні системи диференціальних рівнянь відносно кутів, утворених ланками маятника з вертикалями.***

**Постановка проблеми**. Маятникові коливальні системи широко застосовуються у машинах і механізмах, наприклад, гасителях вібрацій та різноманітних заспокоювачів, у віброустаткуванні, у церковних дзвонах, у морських бакенах, розважальних атракціонах у сільськогосподарських молотарках, у, тощо. Дослідженням цих систем займаються фахівці багатьох областей точних наук: теоретичної механіки, теорії машин і механізмів, прикладної й обчислювальної математики, тощо. На ефективність функціонування перерахованих пристроїв істотно впливають їх експлуатаційні параметри, у тому числі і пов'язані з їх геометричною формою. Особливо це стосується багатоланкових маятникових механічних систем [1]. При дослідженні цього різновиду пристроїв бажано було б унаочнити взаємне положення окремих ланок маятника у певні моменти часу, а також передбачити варіанти нестійкості (хаотичності) коливань. Ці два питання можуть стати предметом дослідження прикладної геометрії, адже взаємне положення ланок маятника можна унаочнити із застосуванням комп'ютерної анімації, а хаотичні коливанна можна дослідити за допомогою графічних зображень – фазових портретів.

**Огляд літературних джерел**. В літературі докладно описано випадки дволанкового та триланкового маятників [1, 2]. Відомі результати складання системи диференціальних рівнянь для опису руху ланок маятників. Але для розв'язання у замкнутому вигляді таких систем диференціальних рівнянь часто бракує обчислювальних ресурсів комп'ютерів. Тому застосовують різного роду інтерактивні інструменти для моделювання, імітації й аналізу динамічних систем (наприклад, MatLab Simulink). Вони мають деякі недоліки при розробці високоточних моделей динамічних систем із великою кількістю диференціальних рівнянь, особливо коли важлива швидкість їхнього виконання. Крім того існують обмеження на величини кутів відхилень ланок маятників. Тому доцільним буде дослідження коливань багатоланкового маятника, який базується на розв'язанні системи диференціальних рівнянь стосовно узагальнених координат маятника – тобто кутів, утворених з вертикалями відповідними ланками маятника.

**Постановка завдання**. Розробити спосіб унаочнення схеми коливань дволанкового маятника, який базується на розв'язанні системи можуть стати предметом дослідження прикладної геометрії, адже взаємне положення ланок маятника можна унаочнити із застосуванням комп'ютерної анімації, а варіанти хаотичності коливань можна дослідити за допомогою спеціальних графічних зображень – фазових портретів.

З позицій прикладної геометрії ці два питання повністю не розкриті у зайнятій науковій ніші. Звідси стає зрозумілою актуальність обраної теми досліджень, яка полягає у розробці алгоритмічного забезпечення програм геометричного моделювання багатоланкових механічних маятникових коливань вантажів, та вивчення цього процесу засобами унаочнення у часі фазових портретів і анімаційного моделювання положень ланок маятникових коливальних систем.

**Висновок**. Наведений спосіб опису коливань дволанкового маятника базується на розв'язанні системи диференціальних рівнянь відносно кутів, утворених ланками маятника з вертикалями.

## Література


1. *Гаврилов С.В., Коноплев В.А.* Компьютерные технологии исследования мехатронных многозвенных систем. М.: СПб.: Наука, 2004, 191 с.
2. *Бутиков Е.И., Кондратьев А.С.* Механика: Учеб. пособие: М.; СПБ.: Физматлит и др., 2000. - 352 с.;
3. *Мартынов Б.А.*Теория колебаний. Математические модели динамических систем. Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2002. 56 с.
4. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 472 с.
5. *Тер Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики М.: Наука, 1974. 222с.


## РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ ДВУХЗВЕННЫХ МАЯТНИКОВ


***Р.М.Колочавін***



Приведен способ составления дифференциальных уравнений описания колебаний двухзвенного маятника. Способ базируется на решении системы дифференциальных уравнений относительно углов, образованных звеньями маятника с вертикалями.


## CALCULATION OF FLUCTUATIONS OF TWO-TIER PENDULUMS


***R.M.Kolochavin***



The way of drawing up the differential equations of the description of fluctuations of a two-tier pendulum is given. The way is based on the decision of system of the differential equations concerning the corners formed by links of a pendulum with verticals.

диференціальних рівнянь відносно кутів, утворених ланками маятника з вертикалями.

**Основна частина**. Наведемо спрощення, які звичайно приймаються при складанні рівнянь Лагранжа (як приклад – для подвійного маятника): маятник утворений двома невагомими і нерозтяжними твердими прутами, що не згинаються, рух маятника здійснюється в межах площини; дві маси, що рухаються, розташовані на кінцях другої ланки (рис. 1). Вважається, що кути відхилення не великі, і що тертя руху відсутнє.

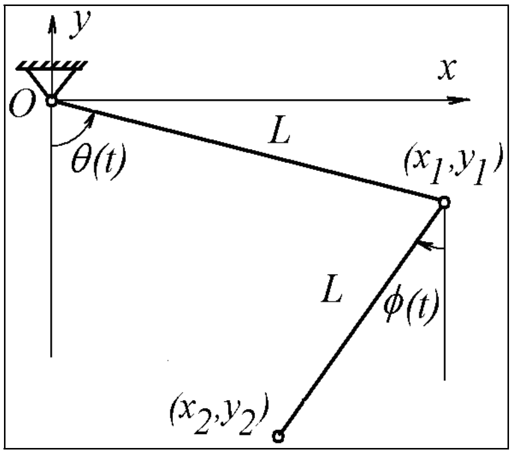

**Рис. 1. Параметри подвійного маятника**

Як узагальнені координати ми вибираємо $\theta$ і $\phi$, що представляють собою кути відхилення від вертикалі першої й другої маси, відповідно.

Для переходу від декартових до узагальнених координат, використовуємо співвідношення

$$x_1 = L\sin\theta \qquad y_1 = -L\cos\theta, \tag{1}$$

де індекс 1 показує, що вирази стосуються першої маси.

Наведемо вирази для обчислення кінетичної й потенціальної енергії першої маси. Кінетична енергія в декартових координатах має вигляд

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2. \tag{2}$$

Тоді одержуємо вирази для швидкості першої маси $\dot{x}_1$ й $\dot{y}_1$ :

$$\dot{x}_1 = L\dot{\theta}\cos\theta \qquad \dot{y}_1 = L\dot{\theta}\sin\theta. \tag{3}$$

Потенціальна енергія в декартових координатах залежить лише від y,

$$U_1 = mgy \Rightarrow -mgL\cos\theta. \tag{4}$$

Тепер підставляючи замість $\dot{x}_1$ і $\dot{y}_1$ у рівняння для кінетичної енергії $T_1$ знаходимо в термінах узагальнених координат:

$$T_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^{\,2} \Rightarrow \frac{1}{2}m((\dot{\theta}L\cos\theta)^2 + (\dot{\theta}L\sin\theta)^2) \Rightarrow \frac{1}{2}m(L^2\dot{\theta}^2). \tag{5}$$

Коли відомі кінетична й потенціальна енергії для першої маси, то можна перейти до обчислень, пов'язаних з другою масою. Декартові координати другої маси можна визначити аналогічно викладеному, використовуючи першу масу як точку відліку. Таким чином,

$$\begin{gathered} x_2 = x_1 + L\sin\phi \qquad y_2 = y_1 - L\cos\phi \\ \Rightarrow x_2 = L(\sin\theta + \sin\phi) \quad y_2 = L(-\cos\theta - \cos\phi) \end{gathered}. \tag{6}$$

Ми слідуємо тієї ж самої процедури, щоб знайти $T_2$ й $U_2$. Спочатку знайдемо координати швидкості другої маси:

$$\dot{x}_2 = L(\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\phi}\cos\phi) \qquad \dot{y}_2 = L(\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi)\,. \tag{7}$$

Використовуємо швидкість, щоб знайти кінетичну енергію.

$$T_2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2) \Rightarrow \frac{1}{2}mL^2\left[(\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\phi}\cos\phi)^2 + (\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\phi}\sin\phi)^2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mL^2\begin{bmatrix}(\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi + \dot{\phi}^2\cos^2\phi) + \\ (\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\phi}^2\sin^2\phi)\end{bmatrix}$$

Або, після перетворень, одержуємо

$$T_2 = \frac{1}{2}mL^2\left(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) + \dot{\phi}^2\right). \tag{8}$$

Так само знаходимо вираз для $U_2$

$$U_2 = mgy_2 \Rightarrow mgL(-\cos\theta - \cos\phi)\,. \tag{1.9}$$

Застосовуючи тригонометричну тотожність

$$\cos a\cos b + \sin a\sin b = \cos(a-b)\,. \tag{10}$$

і поєднуючи (5) і (8), знаходимо загальну кінетичну енергію $T_{tot}$ , а також поєднуючи (1.4) і (1.9), знаходимо потенціальну енергію $U_{tot}$ :

$$T_{tot} = \frac{1}{2}mL^2\left(2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)\right); \tag{11}$$

$$U_{tot} = mgL(-2\cos\theta - \cos\phi)\,. \tag{12}$$

Таким чином, ми визначили повну кінетичну й потенціальну енергію для системи функція двох узагальнених координат. Ця інформація для визначення рівнянь рухів далі використовується як елемент лагранжевої механіки. Функція Лагранжа системи (лагранжиан) визначається як $L \equiv T - U$, тобто для розглянутої системи маємо лагранжіан у вигляді

$$L = \frac{1}{2}mL^2\left(2\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)\right) + mgL(2\cos\theta + \cos\phi)\,. \tag{13}$$

У лагранжевій механіці необхідно знайти рівняння руху для кожної змінної при використанні наступного співвідношення [2, 3]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv 0\,. \tag{14}$$

Це співвідношення має місце для всіх узагальнених координат $q_i$. Спочатку знайдемо рівняння руху для координати $\theta$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(2mL^2\dot{\theta} + mL^2\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)\right) = 2mL^2\ddot{\theta} + mL^2\ddot{\phi}\cos(\theta-\phi) - mL^2\dot{\phi}(\dot{\theta}-\dot{\phi})\sin(\theta-\phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mL^2\dot{\theta}\dot{\phi}\sin(\theta-\phi) - 2mgL\sin\theta$$

Після виконання аналітичних перетворень одержуємо

$$2\ddot{\theta} - \ddot{\phi}\cos(\theta-\phi) + \dot{\phi}^2\sin(\theta-\phi) + \frac{2g}{L}\sin\theta = 0\,. \tag{15}$$

Далі виконаємо те ж саме для $\phi$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right)=\frac{d}{dt}\left(mL^2\dot\phi+mL^2\dot\theta\cos(\theta-\phi)\right)=mL^2\ddot\phi+mL^2\ddot\theta\cos(\theta-\phi)-mL^2\dot\theta(\dot\theta-\dot\phi)\sin(\theta-\phi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}=-mL^2\dot\theta\dot\phi\sin(\theta-\phi)-mgL\sin\phi$$

Перетворимо це в стандартну форму,

$$\ddot\phi+\ddot\theta\cos(\theta-\phi)-\dot\theta^2\sin(\theta-\phi)+\frac{g}{L}=0\,. \qquad (16)$$

Отже, було отримано подвійну систему диференціальних рівнянь другого порядку (15) – (16). Розв'язання її точно аналітичними методами навряд чи можливо (адже на практиці ці рівняння ще будуть ускладнені певними деталями). Тому систему рівнянь розв'язують чисельно за допомогою математичних пакетів наприклад, Maple або Mathcad. Для зручності необхідно спочатку виконати деякі перетворення.

Спочатку, розв'яжемо (15) відносно $\ddot\theta$:

$$\ddot\theta=\frac{-1}{2}\ddot\phi\cos(\theta-\phi)-\frac{1}{2}\dot\phi^2\sin(\theta-\phi)-\frac{g}{L}\sin\theta\,. \qquad (17)$$

Тоді включаючи цю величину в (16), одержуємо:

$$\ddot\phi=\frac{1}{1-.5\cos^2(\theta-\phi)}\left(\frac{1}{2}\dot\phi^2\sin(\theta-\phi)\cos(\theta-\phi)+\frac{g}{L}\sin\theta\cos(\theta-\phi)+\dot\theta^2\sin(\theta-\phi)-\frac{g}{L}\sin\phi\right)$$

(18)

Далі розв'язуємо (16) відносно $\ddot\phi$:

$$\ddot\phi=-\ddot\theta\cos(\theta-\phi)+\dot\theta^2\sin(\theta-\phi)-(g/L)\sin\phi\,. \qquad (19)$$

І підставляючи це назад в (15), маємо:

$$\ddot\theta=\frac{-1}{2-\cos^2(\theta-\phi)}\left(\dot\theta^2\sin(\theta-\phi)\cos(\theta-\phi)-\frac{g}{L}\sin\phi\cos(\theta-\phi)+\dot\phi^2\sin(\theta-\phi)+\frac{2g}{L}\sin\theta\right)$$

(20)

В результаті одержано рівняння для $\ddot\theta$ й $\ddot\phi$ тільки в термінах диференціалів більше низького порядку.

Рівняння Лагранжа є одним з математичних інструментів, які використовується в класичній механіці. Ці рівняння дозволяють описувати у тому числі і рух багатоланкового маятника.

Далі розглянемо руху подвійного маятника за умови малої амплітуди. У цьому випадку величина $|(\theta-\phi)|$ дорівнює 0, що у свою чергу дозволяє вважати $\cos(\theta\pm\phi)\Rightarrow 1$ і $\sin(\theta\pm\phi)\Rightarrow 0$, і $\sin\theta\approx\theta$. У такий спосіб отримана система рівнянь (15) – (16) приймає вигляд

$$\ddot\theta=\frac{g}{L}(\phi-2\theta);\quad \ddot\phi=\frac{2g}{L}(\theta-\phi)\,. \qquad (21)$$

Якщо ми покладемо $\theta=B_1e^{i\omega t}$ $\phi=B_2e^{i\omega t}$ й візьмемо другі похідні за часом і потім підставимо ці величини назад в (21), ми одержуємо

$$
\begin{aligned}
-\omega^2 B_1 &= \frac{g}{L}B_2 - \frac{2g}{L}B_1 \\
-\omega^2 B_2 &= \frac{2g}{L}B_1 - \frac{2g}{L}B_2
\end{aligned}
\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2g}{L} & \frac{-g}{L} \\ \frac{-2g}{L} & \frac{2g}{L} \end{bmatrix} \vec{B} = \omega^2 \vec{B}\,. \tag{22}
$$

Щоб знайти величину для ω, ми повинні знайти власні значення для цієї системи рівнянь. В результаті знаходимо

$$
\omega^2 = \frac{g\left(2 \pm \sqrt{2}\right)}{L}. \tag{23}
$$

Це приводить до двох характерних частот системи,

$$
\omega_1 = \sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)g}{L}}\ ,\ \ \omega_2 = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)g}{L}}\,. \tag{24}
$$

Для знаходження нормальних станів системи, ми повинні знайти власні вектори системи. Для цього ми повинні включити знайдені власні значення назад у матрицю в (22) і визначити, коли та система буде дорівнювати нульовому вектору [4, 5]:

$$
\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{L}}\left(2+\sqrt{2}\right):
$$

$$
\begin{bmatrix} \frac{g}{L}\left(2-2-\sqrt{2}\right) & \frac{-g}{L} \\ \frac{-2g}{L} & \frac{g}{L}\left(2-2-\sqrt{2}\right) \end{bmatrix} \vec{B} = \vec{0}\quad . \tag{25}
$$

$$
\Rightarrow \frac{g}{L}\left(-B_1\sqrt{2} - B_2\right) = 0 \qquad \Rightarrow -\sqrt{2}B_1 = B_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}
$$

Подібно виконаємо для другого власного значення,

$$
\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{L}}\left(2-\sqrt{2}\right):
$$

$$
\begin{bmatrix} \frac{g}{L}\left(2-2+\sqrt{2}\right) & \frac{-g}{L} \\ \frac{-2g}{L} & \frac{g}{L}\left(2-2+\sqrt{2}\right) \end{bmatrix} \vec{B} = \vec{0}\quad . \tag{26}
$$

$$
\Rightarrow \frac{g}{L}\left(B_1\sqrt{2} - B_2\right) = 0 \qquad \Rightarrow \sqrt{2}B_1 = B_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}
$$

Це означає, що будь-які два кути, які задовольняють цим відношенням, (типу $5 = \theta,\ \ 5\sqrt{2} = \phi$ або $3 = \theta,\ \ -3\sqrt{2} = \phi$) будуть нормальними коливаннями (модами) системи. Випадок, що обидва кути - та ж сама ознака, - симетричний мода коливання й коли ці дві - протилежні ознаки антисиметрична мода [99].

Далі знайдемо рівняння руху для подвійного маятника, коли маси й довжини не рівні. Оберемо першу довжину й масу, відповідно, $l_1$ і $m_1$, а другу довжину й масу, відповідно, $l_2$ і $m_2$; тоді маємо рівняння для координат вузлових точок:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\theta \\ y_1 &= -l_1 \cos\theta \\ x_2 &= x_1 + l_2 \sin\phi \Rightarrow l_1 \sin\theta + l_2 \sin\phi \\ y_2 &= y_1 - l_2 \cos\phi \Rightarrow -l_1 \cos\theta - l_2 \cos\phi \end{aligned} . \tag{27}$$

Потенціальна енергія

$$\begin{aligned} &U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\ &\Rightarrow -(m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta - m_2 g l_2 \cos\phi \end{aligned} . \tag{28}$$

Кінетичну енергія знайдемо так само як і у попередньому випадку: знаходячи похідні часу кожної з координат (як в (3) і (7)) і включаючи їх у рівняння для кінетичної енергії (як в (5) і (8) і використовуючи тотожність (10)), одержуємо

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( l_1^2 \dot\theta^2 + l_2^2 \dot\phi^2 + 2 l_1 l_2 \dot\theta \dot\phi \cos(\theta - \phi) \right). \tag{29}$$

Тепер можна знайти функцію Лагранжа (як в (13)):

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( l_1^2 \dot\theta^2 + l_2^2 \dot\phi^2 + 2 l_1 l_2 \dot\theta \dot\phi \cos(\theta - \phi) \right) \\ + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\theta + m_2 g l_2 \cos\phi \end{aligned} . \tag{30}$$

Застосування тих же самих лагранжевих методів як в (14) стосовно $\theta$ дає рівняння руху,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m_1 l_1^2 \dot\theta + m_2 l_1^2 \dot\theta + m_2 l_1 l_2 \dot\phi \cos(\theta - \phi) \\ &\frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} \right) = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot\theta + m_2 l_1 l_2 \ddot\phi \cos(\theta - \phi) - m_2 l_1 l_2 \dot\phi \sin(\theta - \phi)(\dot\theta - \dot\phi) \\ &\frac{\partial L}{\partial \theta} = -l_1 g (m_1 + m_2) \sin\theta - m_2 l_1 l_2 \dot\theta \dot\phi \sin(\theta - \phi) \\ &\Rightarrow (m_1 + m_2) l_1 \ddot\theta + m_2 l_2 \ddot\phi \cos(\theta - \phi) + m_2 l_2 \dot\phi^2 \sin(\theta - \phi) + g (m_1 + m_2) \sin(\theta) = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

а стосовно $\phi$ дає рівняння,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = m_2 l_2^2 \dot\phi + m_2 l_1 l_2 \dot\theta \cos(\theta - \phi) \\ &\frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} \right) = m_2 l_2 \ddot\phi + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta \cos(\theta - \phi) - m_2 l_1 l_2 \dot\theta \sin(\theta - \phi)(\dot\theta - \dot\phi) \\ &\frac{\partial L}{\partial \phi} = m_2 l_1 l_2 \dot\theta \dot\phi \sin(\theta - \phi) - l_2 m_2 g \sin\phi \\ &\Rightarrow m_2 l_2 \ddot\phi + m_2 l_1 \ddot\theta \cos(\theta - \phi) - m_2 l_1 \dot\theta^2 \sin(\theta - \phi) + m_2 g \sin\phi = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Щоб було зручно використовувати рівняння (32) у цифровій формі, доцільно було б їх розв’язати як попередньо (17) - (20), коли одержано рівняння для $\ddot\theta$ й $\ddot\phi$ тільки в термінах диференціалів низького порядку.

При дослідженні маятникових пристроїв бажано було б унаочнити взаємне положення окремих ланок маятника у певні моменти часу, а також передбачити варіанти нестійкості (хаотичності) коливань. Ці два питання