УДК 519.161

Ю. М. Бастриков, канд. техн. наук,
Л. И. Протасова

ВЫБОР ВЕТВИ В МЕТОДЕ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Предложен алгоритм выбора ветвей, используемых при ветвлении дерева поиска решения в методе ветвей и границ. Указанная оценка позволяет сократить количество ветвлений дерева поиска решения задачи коммивояжера. Предложен алгоритм решения задачи. Приведен пример решения задачи с использованием предложенной оценки.

Ключевые слова: *задача коммивояжера, метод ветвей и границ, дерево поиска решения, алгоритм решения задачи, оценка ветви, выбор ветви, расширенная оценка ветви, приращения матрицы стоимостей первого и второго порядка, преобразование матрицы стоимостей*

Yu. M. Bastrikov, PhD.,
L. I. Protasova

BRANCH CHOICE IN A BRANCH-AND-BOUND METHOD

The algorithm of branches choicing used for branching of search of decision tree in a branch-and-bound is offered in the article. An estimation allowing to shorten decision search branching amount at the decision of task of traveling salesman tree is offered. The algorithm of task decision is offered. An example of task decision with the use of the offered estimation is given.

Keywords: *task of traveling salesman, branch-and-bound, decision search tree, algorithm of task decision, estimation of branch, choice of branch, extended estimation of branch, first and the second order costs matrix increases, transformation of costs matrix*

Ю. М. Бастріков, канд. техн. наук,
Л. І. Протасова

ВИБІР ГІЛКИ В МЕТОДІ ГІЛОК І МЕЖ

Запропоновано алгоритм вибору гілок, що використовується при галуженні дерева пошуку рішення в методі гілок і меж. Вказана оцінка дає змогу скоротити кількість галужень дерева пошуку вирішення задачі комівояжера. Запропоновано алгоритм розв`язання задачі. Наведено приклад розв`язання задачі з використанням запропонованої оцінки.

Ключові слова: *задача комівояжера, метод гілок і меж, дерево пошуку рішення, алгоритм розв`язання задачі, оцінка гілки, вибір гілки, розширена оцінка гілки, прирости матриці вартостей першого і другого порядку, перетворення матриці вартостей*

Введение. Широко известным подходом к решению задачи коммивояжера является [3-10] метод ветвей и границ [10]. Задача коммивояжера – типичная задача оптимизации. В этой задаче коммивояжер должен посетить n городов и возвратиться в исходный пункт [6], при этом требуется минимизировать общую стоимость транспортных расходов, т.е. найти маршрут минимальной стоимости. Переезжая из города i в город j, коммивояжер терпит убыток α_{ij}.

К этой задаче легко применить метод ветвей и границ, получая алгоритм, в соответствии с которым поиск решения продолжается всякий раз, когда стоимость текущего частичного решения равняется или превосходит стоимость лучшего решения, найденного до сих пор.

Результаты исследования. При выборе ветви в процессе расщепления корня дерева – поиска решения – используется ветвь, дающая наибольший рост оценки поддерева. Выбор такой ветви осуществляется по следующему алгоритму:

из предварительно преобразованной матрицы стоимостей $M0$ выбирается нуль, который при замене на бесконечность «разрешает» вычитать наибольшее число из его строки и столбца [6]. Там же приведена оценка количества ветвлений дерева поиска решения для случайной матрицы порядка n равная $O(1{,}26^n)$. Оценка получена на основании экспериментальных данных.

Целью данной работы является получение расширенной оценки ветви, которая позволит сократить количество ветвлений.

Алгоритм, приведенный в [6] для оценки «перспективности» ветви, использует суммарную стоимость ветвей, выходящих из узла i, и ветвей, входящих в узел j, т.е.

$$\Delta a_{ij} = \Sigma a_{ik} + \Sigma a_{kj},\ k = 1,2,\ldots, n{-}1, n.$$

Так может быть записана оценка для случая рассмотрения только нулевых ветвей. В общем случае, когда рассматриваемая ветвь может иметь ненулевую стоимость, оценка ветви запишется так:

$$\Delta a_{ij} = \Sigma a_{ik} + \Sigma a_{kj} - 3a_{ij},\ k = 1,2,\ldots, n\text{-}1, n.$$

Достаточно просто расширить оценку, учитывая все остальные ветви, смежные с ветвью a_{ij}, а именно ветви, входящие в узел i, и ветви, выходящие из узла j. Тогда расширенная оценка

$$\Delta_p a_{ij} = \Sigma a_{ik} + \Sigma a_{kj} - \Sigma a_{jk} - \Sigma a_{ki} - 3a_{ij} + 3a_{ji},$$

$$k = 1,2,\ldots, n\text{-}1, n. \qquad (1)$$

Дополнительные ветви, участвующие в расширенной оценке, на рис.1 выделены тонкой линией.

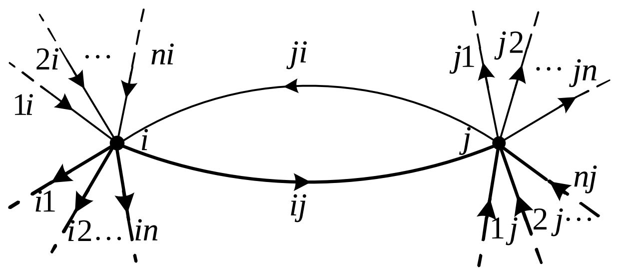


Рис. 1. Дополнительные ветви, используемые в расширенной оценке

Использование расширенной оценки в виде (1) не исключает ветвлений дерева поиска решения. Для уменьшения количества ветвлений зададим элементам матрицы $M0$ приращения обратно пропорциональные расширенной оценке. В преобразованной матрице $M1$ элементы определяются соотношением

$$a_{ij}1 = a_{ij}0 - \alpha\Delta_p a_{ij}0, \qquad (2)$$

где $a_{ij}1$ – элемент преобразованной матрицы;

$a_{ij}0$ – элемент исходной матрицы;

α – коэффициент (в примере рассмотренном ниже $\alpha = 0{,}005$);

$\Delta_p a_{ij}0$ – расширенная оценка.

Аналогично получаем элементы матрицы $M2$, используя соотношение

$$a_{ij}2 = a_{ij}1 - \alpha\Delta_p a_{ij}1. \qquad (3)$$

Вычитая значения расширенной оценки для элементов матрицы $M0$ из значений расширенной оценки элементов матрицы $M1$, получаем элементы матрицы приращений $D1$ и, соответственно, элементов матрицы $D2$:

$$d_{ij}1 = \Delta_p a_{ij}1 - \Delta_p a_{ij}0, \qquad (4)$$

$$d_{ij}2 = \Delta_p a_{ij}2 - \Delta_p a_{ij}1. \qquad (5)$$

Формируем матрицу приращений второго порядка $DD1$, вычитая из $D2$ матрицу $D1$:

$$DD1 = D2 - D1. \qquad (6)$$

Максимальный элемент матрицы $DD1$ определяет ветвь искомого пути. Запоминая полученную ветвь, исключаем соответствующие ей строку, столбец и диагональный элемент из исходной матрицы $M0$. Строку j, соответствующую исключаемому диагональному элементу, переносим на освободившееся место строки i.

Таким образом, получаем первую ветвь искомого пути коммивояжера, а порядок матрицы стоимостей уменьшаем на единицу. Если после исключения строки (столбца) получаем матрицу без нулей в некоторой строке (столбце), необходимо повторить операцию приведения матрицы – вычесть минимальный элемент из соответствующей строки (столбца).

Повторив приведенные выше вычисления (n–3) раза, получаем полный искомый путь.

Рассмотрим предлагаемый алгоритм на примере, приведенном в [6, с. 142]. Стоимость оптимального пути (1–4–6–7–3–5–2–1) для этой матрицы стоимостей (рис. 2) равна 30.

	1	2	3	4	5	6	7	
1		0	83	9	30	6	50	178
2	0		66	37	17	12	26	158
3	29	1		19	0	12	5	66
4	32	83	66		49	0	80	310
5	3	21	56	7		0	28	115
6	0	85	8	42	89		0	224
7	18	0	0	0	58	13		89
	82	190	279	114	243	43	189	

Рис. 2. Матрица стоимостей $M0$–7

Справа и внизу приведены дополнительно суммы элементов матрицы, используемые для вычисления расширенных оценок (1).

	1	2	3	4	5	6	7	
1		-0,64	82,26	9,155	29,28	6,515	49,5	176,1
2	0,64		66,07	37,45	16,46	11,97	26,05	158,6
3	29,73	0,93		20,34	-0,415	14,03	5,64	70,26
4	31,84	82,55	64,66		48,01	-0,705	79,72	306,1
5	3,715	21,54	56,41	7,99		0,21	27,69	117,6
6	-0,515	85,03	5,97	42,705	88,79		-1,6	220,4
7	18,5	-0,05	-0,64	0,28	58,31	14,6		91
	83,92	189,4	274,7	117,9	240,4	46,62	187	

Рис. 3. Матрица стоимостей *M*1–7

	1	2	3	4	5	6	7
1		-1,274	81,57	9,295	28,59	7,028	49,02
2	1,274		66,18	37,87	15,92	11,9	26,11
3	30,43	0,822		21,64	-0,859	16,04	6,277
4	31,70	82,13	63,36		47,05	-1,428	79,49
5	4,407	22,08	56,86	8,945		0,365	27,36
6	-1,028	85,10	3,958	43,43	88,64		-3,192
7	18,98	-0,115	-1,277	0,509	58,63	16,19	

Рис. 4. Матрица стоимостей *M*2–7

Используя выражения (1), (2) и (3), вычисляем расширенные оценки и формируем преобразованные матрицы *M*1 (рис. 3) и *M*2 (рис. 4).

Согласно (4), (5) и (6) вычисляем матрицы *D*1–7, *D*2–7 и *DD*1–7 (рис. 5, 6 и 7). Отрицательные значения приращений для *D*1 и *D*2 не приводятся. В матрицу *DD*1 включены приращения только для нулевых ветвей исходной матрицы *M*0-7.

	1	2	3	4	5	6	7
1		0	0	3,07	0	0,31	0
2	1,28		0	6,42	0	8,7	0
3	7,95	7,66		8,32	5,89	3,58	0,68
4	0	0	0		0	3,63	0
5	4,67	0,6	0	7,02		11,1	2,98
6	0	0	0	0	0		0
7	4,84	3,02	0	10,16	0	1,64	

Рис. 5. Матрица стоимостей *D*1–7

	1	2	3	4	5	6	7
1		0	0	3,002	0	0,183	0
2	1,114		0	6,248	0	8,620	0
3	7,694	7,600		7,915	5,931	3,057	0,520
4	0	0	0		0	3,763	0
5	4,452	0,464	0	6,712		10,939	3,025
6	0	0	0	0	0		0
7	4,672	3,002	0	9,991	0	1,240	

Рис. 6. Матрица стоимостей *D*2–7

	1	2	3	4	5	6	7
1		0,166	0	0	0	0	0
2	-0,166		0	0	0	0	0
3	0	0		0	0,041	0	0
4	0	0	0		0	0,133	0
5	0	0	0	0		-0,161	0
6	0,127	0	0	0	0		0,4
7	0	-0,018	0,16	-0,169	0	0	

Рис. 7. Матрица стоимостей *DD*1–7

Выбираем максимальное значение из матрицы *DD*1 (0,4) и соответствующую ей ветвь (6–7) определяем как ветвь оптимального пути.

К особенности предлагаемого алгоритма можно отнести формирование и сравнение в неявной форме всех гамильтоновых циклов [1, 2]. Лидирующая ветвь (6–7) на рис. 7 «поднимает» смежные ей ветви – (4–6) и (7–3), а так же ветвь (3–5) – смежную ветви (7–3). Все перечисленные ветви принадлежат минимальному гамильтонову циклу.

Исключаем строку 6, столбец 7 и диагональную ветвь (7–6). Строку 7 исходной матрицы ставим на место удаленной строки 6. Матрица порядка n = 6, полученная из исходной матрицы порядка n = 7, приведена ниже (рис. 8).

	1	2	3	4	5	6	7	
1		0	83	9	30	6		128
2	0		66	37	17	12		132
3	29	1		19	0	12		61
4	32	83	66		49	0		230
5	3	21	56	7		0		87
6	18	0	0	0	58			76
7								0
	82	105	271	72	154	30	0	

Рис. 8. Матрица стоимостей *M*0–6

Используя (1), (2) и (3), формируем преобразованные матрицы *M*1–6 и *M*2–6 (рис. 9, 10).

	1	2	3	4	5	6	7	
1		-0,095	82,53	9,215	29,84	5,82		127,3
2	0,095		65,79	36,96	16,47	12,27		131,6
3	29,47	1,21		20,13	-0,13	13,46		64,15
4	31,78	83,03	64,86		48,50	-0,56		227,6
5	3,16	21,53	56,12	7,495		-0,31		88,00
6	18,18	-0,28	-1,46	0,56	58,30			75,31
7								0
	82,69	105,4	267,8	74,37	152,99	30,69	0	

Рис. 9. Матрица стоимостей *M*1–6

	1	2	3	4	5	6	7
1		-0,19	82,084	9,42	29,692	5,635	
2	0,19		65,609	36,909	15,938	12,555	
3	29,916	1,391		21,249	-0,275	14,925	
4	31,580	83,091	63,751		48,029	-1,12	
5	3,308	22,062	56,275	7,971		-0,636	
6	18,365	-0,555	-2,925	1,12	58,636		
7							

Рис. 10. Матрица стоимостей *M*2–6

Согласно (4), (5) и (6) вычисляем матрицы *D*1–6, *D*2–6 и *DD*1–6 (рис. 11–13).

	1	2	3	4	5	6	7
1		0	0	2,07	0	1,08	
2	0		0	4,14	0,36	0	
3	4,86	5,85		4,23	5,04	0	
4	0	0	0		0	0	
5	2,43	0	0	3,78		5,22	
6	0	1,08	1,08	0	0		
7							

Рис. 11. Матрица стоимостей *D*1–6

	1	2	3	4	5	6	7
1		0,017	0	2,031	0	1,112	
2	0		0	4,146	0,455	0	
3	4,775	5,812		4,026	5,063	0	
4	0	0	0		0	0,101	
5	2,401	0	0	3,691		5,275	
6	0	1,13	1,343	0	0		
7							

Рис. 12. Матрица стоимостей *D*2–6

	1	2	3	4	5	6	7
1		0,017	0	0	0	0	
2	-0,017		0	0	0	0	
3	0	0		0	0,023	0	
4	0	0	0		0	0,101	
5	0	0	0	0		0,055	
6	0	0,05	0,263	-0,101	0		
7							

Рис. 13. Матрица стоимостей *DD*1–6

По матрице *DD*1–6 определяем максимальный элемент (0,263) и соответствующую ветвь оптимального пути – (6–3), что соответствует для исходной матрицы ветви (7–3). Исключаем ветвь (6–3) из матрицы *M*0-6 и получаем матрицу порядка $n = 5$ (рис. 14). Из столбца 4 вычитаем 7 для получения нуля.

	1	2	3	4	5	6	7	
1		0		2	30	6		38
2	0			30	17	12		59
3								0
4	32	83			49	0		164
5	3	21		0		0		24
6	29	1		12	0			42
7								0
	64	105	0	44	96	18	0	

Рис. 14. Матрица стоимостей *M*0–5

	1	2	3	4	5	6	7
1		0,014		0	0	0	
2	-0,014			0	0	0	
3							
4	0	0			0	0,099	
5	0	0		-0,002		-0,067	
6	0	0		0	0,067		
7							

Рис. 15. Матрица стоимостей *DD*1–5

По максимальному значению матрицы *DD*1–5 (0,099) (рис. 15), (промежуточные матрицы *M*1–5, *M*2–5, *D*1–5 и *D*2–5 опущены), определяем следующую ветвь оптимального пути – (4–6), совпадающую с соответствующей ветвью исходной матрицы *M*0–7. Исключаем ветвь (4–6) из матрицы *M*0–5 и получаем матрицу *M*0–4 (рис. 16).

	1	2	3	4	5	6	7	
1		0		2	30			32
2	0			30	17			47
3								0
4	29	1			0			30
5	3	21		0				24
6								0
7								0
	32	22	0	32	47	0	0	

Рис. 16. Матрица стоимостей *M*0–4

	1	2	3	4	5	6	7
1		-0,0175		0	0		
2	0,0175			0	0		
3							
4	0	0			0,015		
5	0	0		-0,015			
6							
7							

Рис. 17. Матрица стоимостей *DD*1–4

По максимальному значению матрицы *DD*1–4 (0,0175) (рис. 17) (матрицы *M*1–4, *M*2–4, *D*1–4 и *D*2–4 опущены) определяем следующую ветвь оптимального пути для матрицы – (2–1), что совпадает с соответствующей ветвью исходной матрицы *M*0–7. Исключаем ветвь (2–1) из матрицы *M*0-4, вычитаем 2 из второй строки и получаем матрицу *M*0–3 (рис. 18).

	1	2	3	4	5	6	7	
1								0
2				0	28			28
3								0
4		1			0			1
5		21		0				21
6								0
7								0
	0	22	0	0	28	0	0	

Рис. 18. Матрица стоимостей *M*0–3

	1	2	3	4	5	6	7
1							
2				0,072	0		
3							
4		0			0,0072		
5		0		-0,0072			
6							
7							

Рис. 19. Матрица стоимостей *DD*1–3

Ветвь оптимального пути для матрицы *M*0–3 – (2–4) определяется по максимальному элементу матрицы *DD*1–3 (рис. 19), что для исходной матрицы соответствует ветви

(1–4). Ветви (5–2) и (3–5) исходной матрицы – ветви, замыкающие контур, не имеют альтернативы. Таким образом, получен полный оптимальный контур обхода 7 городов.

Заключение. Рассмотренный пример показывает уменьшение количества ветвлений при использовании предлагаемой оценки для решения задачи коммивояжера. Предлагаемый алгоритм позволил получить искомый путь без ветвлений дерева поиска решения. Количество арифметических операций, используемых для определения одной ветви искомого пути, пропорционально количеству ветвей исходной матрицы, т.е. предположительно может быть оценено как – $O(n^2)$, тогда для определения всего пути ожидаемое количество операций не больше $O(n^3)$.

Предлагаемый алгоритм не гарантирует получения оптимального пути для любых условий задачи, но позволяет значительно уменьшить число ветвлений дерева поиска решения. При расчете примера и составлении матриц была использована программа Microsoft Excel.

Список использованной литературы

1. А.с. 750502 СССР, МКИ^3 G 06 G 7/122. Устройство для решения экстремальных комбинаторных задач / Ю. М. Бастриков, Л. И. Гутенмахер, В. С. Янина (СССР). – № 2592268/18-24; Заявлено 20.03.78; Опубл. 23.07.80, Бюл. № 27 // Открытия. Изобрет. Пром. образцы. Товар. знаки. – 1980. – № 27. –248 с.

2. А.с. 1716548 СССР, МКИ^5 G 06 G 7/48. Устройство для решения экстремальных комбинаторных задач / Ю. М. Бастриков, А. В. Фрид (СССР). – № 465779/24; Заявлено 02.03.89; Опубл. 28.02.92, Бюл. №8 // Изобретения. – 1992. – № 8. – С. 215 – 216.

3. Вагнер, Г. Основы исследования операций / Г. Вагнер – М. : Мир, 1973. – Т.2. – 488 с.

4. Липский, В. Комбинаторика для программистов / В. Липский – М.: Мир, 1988. – 200 с.

5. Кротов, В. Ф. Основы теории оптимального управления: Учеб. пособие для эконом. вузов [В. Ф. Кротов, Б. А. Лагоша, С. М. Лобанов и др.] / Под ред. В. Ф. Кротова. – М. : Высшая школа, 1990. – 430 с., ил.

6. Рейнгольд, Э. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика./ Э. Рейнгольд,. Ю. Нивергельт., Н. Део. – М. : Мир. 1980. – 476 с.

7. Сухарев, А. Г. Курс методов оптимизации: Учеб. пособие. – 2-е изд./ А. Г Сухарев, А. В. Тимохов, В. В Федоров. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 368 с.

8. Танаев, В. С. Теория расписаний. Многостадийные системы / В. С. Танаев, Ю. Н. Сотсков, В. А Струсевич. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. (Экон.-мат. б-ка), 1989. – 328 с.

9. Gomory, R. E. The traveling Salesmen Problem, in Proceedings of the IBM Scientific Computing Simposium on Combinatorial Problems, IBM Data Processing Division, White Plains, N. Y., 1966.

10. Little J. D. C. An Argorithm for the Travelling Salesman Problem, Oprations Rescarch, 11 / J. D. C Little, K. G. Murty, D. W. Sweeney, C. Katel. – 1963, – 898 p.

Получено 15.04.2013

References

1. A. s. the 750502 the USSR, МКЕ3 G 06 G 7/122. Device for the decision of extreme combinatorics tasks / Y. M. Bastrikov, L. E. Gutenmacher, V. S. Janena (the USSR). – № 2592268/18-24; 20.03.78 is declared; Published 23.07.80, Bulletin № 27 // Opening. Inventions. Industrial standards. Commodity. signs. – 1980. – № 27. –248 p. [in Russian].

2. A. s. 1716548 the USSR, МКЕ5 G 06 G 7/48. Device for the decision of extreme combinatorics tasks / Y. M. Bastrikov, A. V. Frid (the USSR). – № 465779/24; 02.03.89 is declared; Published 28.02.92, Bulletin №8 // Inventions. – 1992. – № 8. – P. 215 – 216 [in Russian].

3. Wagner G. Bases of operations analysis / G. Wagner – Moscow : World, 1973. – V. 2. 488 p. [in Russian].

4. Lipsky, V. Combinatorics for programmers. / Lipsky V. – M.: the World, 1988. – 200 p. (in Russian)

5. Crotov, V. F Bases of optimal management theory: Studies. manual for steward. institutions / of higher learning of [V.F. Crotov, B.A. Lagosha, C.M. Lobanov of and other] / Under release V.F. Crotov. – Moscow : H. S., 1990. – 430 p., with illustrations [in Russian].

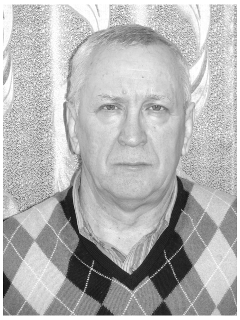
6. Reyngold, E. Combinatorics algorithms. Theory and practice / E. Reyngold, Y. Nevelgelt, N. Deo – Moscow : World, 1980. – 476 p. [in Russian].

7. Sukharev, A. G. Optimization methods course: Studies. manual. it is a 2-th publ / A. G. Sukharev, A. V. Timochov, B. B Fedorov. – Moscow : FIZMATLIT, 2005. – 368 p. [in Russian].

8. Tanaev, B. S. Theory of time-tables. Much phasic systems / B. S. Tanaev, Y. N. Sotskov, V. A. Strusevich – Moscow : Science. Main release of physicist-mathematician of literature. – 1989. – 328 p. (Economic-mathematical library) [in Russian].

9. Gomory, R. E. The traveling Salesmen Problem, in Proceedings of the IBM Scientific Computing Simposium on Combinatorial Problems, IBM Data Processing Division, White Plains, N. Y., 1966. [in English].

10. Little, J. D. C. An Argorithm for the Travelling Salesman Problem, Oprations Rescarch, 11[J. D. C Little, K. G. Murty, D. W. Sweeney, C. Katel], – 1963. – 898 c. [in English].



Бастриков Юрий Максимович,
канд. техн. наук, доцент каф. компьютеризованных систем управления Одесского нац. политехн.ун-та,
тел. 8-063-20-20-789,
E-mail: liud2009@mail.ru

Протасова Людмила Ивановна,
ст. преподаватель каф. компьютеризованных систем управления Одесского нац. политехн.ун-та,
тел. 8-067-415-17-12,
E-mail: liud2009@mail.ru