УДК 519.65:004.94

В. О. Головко

МОДЕЛЮВАННЯ ТОМОГРАФІЧНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ БІЛІНІЙНИХ СПЛАЙНІВ

Анотація. *Особливість запропонованого підходу полягає в апроксимації області зондування в томографії білінійним сплайном. Запропоновано використовувати білінійний сплайн для регуляризації розв'язку оберненої томографічної задачі. Розроблено алгоритми вирішення прямої та оберненої томографічних задач. Реалізовано наведені алгоритми у середовищі MatLab. Перевірено алгоритми вирішення томографічних задач на модельних прикладах. Експериментально встановлено залежність числа обумовленості від схеми розташування випромінювачів і приймачів та їх кількості. Розглянуто шляхи оптимізації розв'язку.*

Ключові слова: *акустична томографія, ультразвук, білінійний сплайн, неруйнівний контроль, пряма томографічна задача, обернена томографічна задача*

V. O. Holovko

MODELING OF TOMOGRAPHY PROBLEMS USING BILINEAR SPLINES

Abstract. *The peculiarity of the proposed approach consists in approximating of the sensing field of tomography by bilinear spline. Proposed to use bilinear spline for regularized solution in inverse tomography problem. Algorithms solving direct and inverse tomography problems are proposed and implemented in MatLab. Tomographic algorithms for solving problems are tested on model data. Dependence between the condition number and the layout of emitters and receivers and their number are experimentally determined. The ways of optimizing the solution are considered.*

Keywords*: acoustic tomography, ultrasound, bilinear spline, non-destructive testing, forward tomography problem, inverse tomography problem*

В. А. Головко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ БИЛИНЕЙНЫХ СПЛАЙНОВ

Аннотация. *Особенность предложенного подхода заключается в аппроксимации области зондирования в томографии билинейным сплайном. Предложено использовать билинейный сплайн для регуляризации решения обратной томографической задачи. Разработаны алгоритмы решения прямой и обратной томографических задач. Реализовано приведённые алгоритмы в среде MatLab. Проверено алгоритмы решения томографических задач на модельных примерах. Экспериментально установлена зависимость числа обусловленности от схемы расположения излучателей и приемников и их количества. Рассмотрены пути оптимизации решения.*

Ключевые слова: *акустическая томография, ультразвук, билинейный сплайн, неразрушающий контроль, прямая томографическая задача, обратная томографическая задача*

Вступ

Акустична томографія використовує методи комп'ютерної томографії для вирішення оберненої задачі. Вона добре підходить для визначення властивостей об'єкта зондування, отриманих за рахунок вимірювань звукових хвиль вздовж поверхні зондування. Акустична томографія застосовується в сейсмології, технологічних процесах, промисловому неруйнівному контролі, все частіше в області медичної візуалізації і навіть в метеорології.

На відміну від рентгенівських променів, які використовуються в звичайній комп'ютерній томографії, методи звукової томографії повинні враховувати особливості поширення звукових хвиль, такі, як відбиття, переломлення і дифракцію. В неоднорідному середовищі ультразвукові імпульси поширюються не лінійно, що ускладнює вирішення оберненої томографічної задачі (ОТЗ) та створює додаткове навантаження на обчислювальні можливості техніки.

Необхідність високого рівня обчислювальної потужності і пов'язаної з ним обробки даних являється історичним фактором, який обмежує розвиток акустичної томографії у порівнянні з комп'ютерною томографією та іншими методами. Тим не менш, за останні роки завдяки розвитку електроніки, ситуація різко змінилась, відбувся експоненціальний ріст обчислювальної потужності. Це дозволило вирішувати обернені задачі для томографічних сигналів. Також з'явилась можливість розпаралелювати обробку великої кількості даних. Ці дві тенденції дозволили створити томографічні системи з великою кількістю

© Головко В.О, 2014

датчиків. Практичним результатом стала поява нових високо-якісних ультразвукових томографів, які застосовуються у клінічних дослідженнях.

Питанню розв'язку оберненої задачі присвячені багато праць як вітчизняних, так і закордонних науковців, зокрема роботи [1, 5, 7]. Широко представлені роботи з практикного використання акустичної томографії: визначення температури в атмосфері, виявлення ракових пухлин [4], побудови температурних карт водоймищ [2], дослідження внутрішньої структури океану [9]. Застосування сплайнів розглянуто у роботі [6], зокрема застосування кубічних сплайнів для реконструкції томографічних зображень представлено у роботі [3].

Загальні відомості

Установка для акустичної томографії може бути побудована двома способами. В першому випадку маємо набір стаціонарних випромінювачів і приймачів, в другому – пару «випромінювач-приймач», яка обертається навколо об'єкта дослідження. Другий спосіб може бути зведений до першого послідовним записом всіх вимірів.

Датчики, в свою чергу, можуть бути різні за призначенням або перемикатись між режимами «випромінювач» та «приймач». Схема з багатьма датчиками є дорожчою, але дає можливість знімати показання одночасно та розпаралелювати обчислення. Варіант з рухливою парою «випромінювач-приймач» є дешевшим. Вибір конкретної схеми обумовлений пошуком компромісу між вартістю та швидкістю в програмно-апаратній реалізації таких систем. Наприклад, в медицині використовується схема з багатьма датчиками, тому що пріоритетом є швидкість отримання результату. В даній роботі також використовується схема зондування із багатьма датчиками.

Якість відновлення зображення залежить від якості сигналів, отриманих за допомогою системи акустичної томографії та ефективності алгоритму відновлення. Останній залежить від того, наскільки добре моделюється розповсюдження звукових хвиль.

Постановка задачі

Розглянемо прямокутну область

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x \le b, 0 \le y \le d\}. \qquad (1)$$

На Ω розглянемо рівномірну сітку $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$,

$$\begin{aligned} \Delta_x &: 0 < x_1 < \ldots < x_i < x_N = b, \\ \Delta_y &: 0 < y_1 < \ldots < y_j < y_M = d, \end{aligned} \qquad (2)$$

котра ділить область Ω на прямокутні комірки, що не перетинаються:

$$\Omega_{ij} = \{(x, y) \mid x \in (x_i, x_{i+1}), y \in (y_j, y_{j+1})\}, \qquad (3)$$

а $\Omega_{ij}, i = 0, \ldots, N-1, j = 0, \ldots, M-1$.

Кількість комірок дорівнює $K = M \times N$.

Кількість вузлів, утворених такою сіткою, визначається за формулою.

$$\mathrm{V} = (\mathrm{M}+1) \cdot (\mathrm{N}+1) \qquad (4)$$

Задамо на сітці вузлів матрицю випромінювачів:

$$\mathrm{T} = \{(0, t_k)\}, \qquad (5)$$

де $k = 0, \ldots, P$, $0 \le t_k \le d$ та матрицю приймачів

$$\mathrm{R} = \{(r_n, s_n)\}, \qquad (6)$$

де $n = 0, \ldots, Q, 0 < r \le b, 0 \le s \le d$.

Нехай область зондування задана деякою функцією $w(x, y)$. Значення функції у вузлах рівномірної сітки задані матрицею:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{N+1,M+1}} = \{a_{ij}\}, \qquad (7)$$

де $a_{ij} = w(x_i, y_j), i = 0, \ldots, N, j = 0, \ldots, M$.

На кожній із комірок задано білінійний сплайн[8]

$$S(x, y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} a_{ij} \cdot B(x, y), \qquad (8)$$

де a_{ij} – значення у відповідних вузлах сітки, $B(x, y)$ – спеціальні базисні функції білінійного сплайна для заданого фрагмента.

Білінійний сплайн характеризується 4 параметрами: $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$.

Знайдемо значення сигналу на кожному із випромінювачів (пряма задача)

$$U = PA, \qquad (9)$$

де A – значення функції у вузлах сітки; P – матриця планування.

Обернена задача полягає у знаходженні значень у вузлах сітки при відомих U і P (обернена задача)

$$\widetilde{A} = G^{-1} \cdot W, \qquad (10)$$

де $G = (P'P)$; $W = P'U$; U – значення у точках приймачів; P – матриця планування.

Алгоритмізація

Розроблені алгоритми працюють з будь-якою розмірністю сітки та кількістю датчиків.

Алгоритм вирішення прямої томографічної задачі має такий вигляд:

1) Задати область зондування (1).

2) Задати розмірність сітки $M \times N$.

3) Задати сітку області (2):

$$x_0, x_1 \ldots x_i \ldots x_N;$$

$$y_0, y_1 \ldots y_j \ldots y_M.$$

4) Задати значення у вузлах сітки (7):

$$A = a_{00}, a_{01}, \ldots a_{NM}.$$

5) Задати координати випромінювачів і приймачів, матриці T і R.

6) Сформувати матриці координат зондуючих променів: T' – початок, R' – кінець.

7) Розрахувати параметри сплайну для локальних прямокутних областей, через які проходить промінь. Повторити для всіх зондуючих променів.

8) Звести подібні коефіцієнти і сформувати матрицю планування P.

9) Розрахувати значення у вузлах приймачів за формулою (9).

Алгоритм вирішення оберненої томографічної задачі:

1. Задати значення у вузлах приймачів – U.

2. Задати матрицю планування – P, яку отримали при вирішенні ПТЗ.

3. Знайти значення у вузлах сітки області зондування за формулою (10).

Приклад

Розроблені алгоритми вирішення прямої та оберненої томографічних задач реалізовані у середовищі MatLab та були апробовані на ряді практичних прикладів. У проведених експериментах кількість випромінювачів та їх розташування залишались постійними. Різниця між ними полягала у збільшені кількості приймачів. В зв'язку з обмеженістю об'єму статті розглянемо тільки один із них. Спочатку вирішимо пряму томографічну задачу (ПТЗ).

Нехай область зондування задано деякою функцією

$$w(x, y) = \cos\left(x \cdot m + \frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \sin(y \cdot n + \pi)^2 + k, \qquad (11)$$

де $m = 0.7, n = 2, k = 0, 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4$.

Будуємо схему зондування, що включає 3 випромінювача (T_1-T_3) і 23 приймача (R_1-R_{23}) (рис. 1).

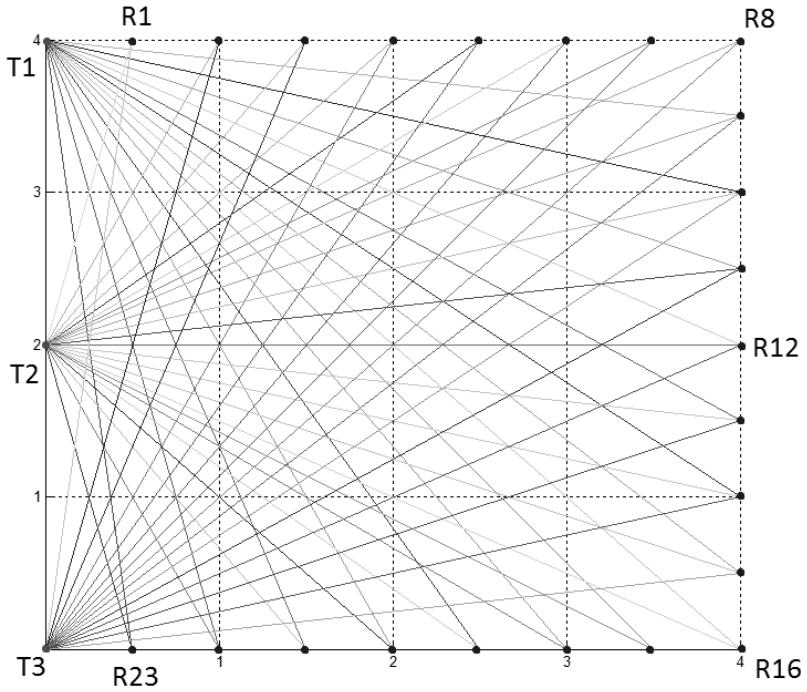

Рис. 1. Схема зондування

При такій схемі розміщення випромінювачів і приймачів отримаємо 53 зондуючих промені. Будемо вважати, що звукова хвиля проходить лінійно.

Спершу необхідно знайти координати перетину прямої зондування із кожною із локальних областей. Для цього сформуємо відповідну матрицю із цих координат. Повторюючи цю операцію для всіх зондуючих променів, отримаємо 53 масиви координат точок перетину прямокутних локальних областей. Масиви мають різну розмірність залежно від кількості комірок, через які проходить промінь.

Наступним кроком є знаходження коефіцієнтів білінійного сплайну для кожної із комірок, через які проходить промінь.

Отримавши коефіцієнти сплайна для всіх комірок, групуємо подібні та формуємо матрицю планування. Матриця має специфічно розріджений вигляд (рис. 2).

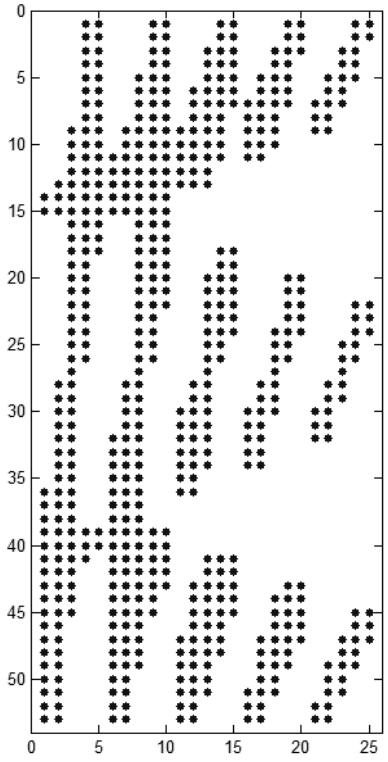

Рис. 2. Матриця планування

Точками показані ненульові елементи матриці.

Кількість рядків дорівнює кількості зондуючих променів, а кількість стовпців – кількості вузлових точок. Розмірність матриці для даної моделі – 53×25.

За відомою матрицею планування обчислюємо значення матриці A і знаходимо значення у вузлах приймачів U за формулою (9). Таким чином отримали розв'язок ПТЗ.

Другий етап – вирішення ОТЗ. Обернена томографічна задача полягає у знаходженні вузлів сітки за відомими значеннями приймачів за МНК. Так як ОТЗ відноситься до некоректних задач, то необхідно шукати такі схеми зондування, які забезпечують найкращу обумовленість матриці.

При використанні сплайнів для апроксимації, обернена матриця є добре обумовленою. Гладкість сплайна сприяє регуляризації розв'язку.

При відомих матрицях U і P обернена задача вирішується за формулою (10). Для конкретно заданої моделі матриця G є добре обумовленою (табл. 1).

Похибка обчислень розраховується так:

$$\Delta A = \widetilde{A} - A \qquad (12)$$

В таблиці 1 наведено дані, отримані у ході проведення експериментів. Показується залежність числа обумовленості матриці G від кількості зондуючих променів та схеми їх розташування. Наведено обернене значення (RCOND) до числа обумовленості. У роботі не розглядаються схеми розташування датчиків для 1-4 експериментів.

Чим ближче значення RCOND до одиниці, тим краще обумовлена матриця. Як видно із таблиці, у першому випадку при 28 зондуючих променях отримали велику похибку обчислень. У другому випадку, при такій же кількості зондучих променів число обумовленості і похибка різко зменшились в $1{,}15*10^{11}$ раз. Це пояснюється зміною розташування одного із приймачів. Промінь зондування у даному випадку пройшов через недостатньо покриту променями область. Але у ході експериментальних досліджень виявилось, що така схема є нестійкою, тому що будь-які зміни розташування інших датчиків призводять до збільшення похибки. Залежність числа обумовленості від кількості датчиків і схеми розташування не встановлена. У даному випадку більш доцільно збільшити кількість приймачів, щоб достатньо щільно покрити область зондування.

Похибка обчислень для вибраної моделі є достатньо низькою – $1.4396*10^{-10}$.

1. Залежність похибки та числа обумовленості від кількості зондуючих променів.

№ експери-менту	Кількість випромінювачів	Кількість приймачів	Кількість зондуючих променів	RCOND	Похибка (ΔA)
1	3	12	28	8.3289e-20	4.0179e+05
2	3	13	28*	2.9880e-09	3.4824e-06
3	3	15	31	1.1048e-07	3.8705e-08
4	3	14	32	8.2482e-07	3.9213e-10
5	**3**	**23**	**53****	**6.9629e-06**	**1.4396e-10**

* – змінена схема зондування, ** – схема зондування(рис.1)

Таким чином, ОТЗ для вибраної схеми зондування (рис. 1) є вирішеною. Однак постає питання оптимального розміщення випромінювачів і приймачів, визначення мінімально необхідної кількості при збереженні достатньої точності розв'язку.

Висновки

У ході роботи були вирішені такі задачі:

– отримано розрахункові вирази для заданої томографічної схеми зондування при апроксимації поля білінійним сплайном;

– розроблено алгоритми вирішення прямої та оберненої томографічних задач;

– перевірено алгоритми вирішення томографічних задачах на модельних прикладах.

У подальшій роботі необхідно врахувати той факт, що звукові хвилі не розповсюджуються прямолінійно у неоднорідному середовищі. Врахування відбиття, переломлення підвищить точність реконструкції зображення, але в той же час ускладнить алгоритм та збільшить час вирішення задачі.

Список використаної літератури

1. Duric N., Li C., and Roy O., (2011), Acoustic Tomography: Promise Versus Reality, *IEEE International Ultrasonics Symposium, Florida, USA,* October 18-21, 2011, Washington, DC, IEEE, pp. 2033 – 2041.

2. Goodney A. Acoustic Tmography with an Underwater Sensor Network, Oceans, *Proceedings of the Oceans*, *Hampton Road, VA,* October 14-19, 2012, Washington, DC, IEEE, pp. 1 – 10.

3. Huang S.-C., Phelps M.E., Hoffman E.J., Kuhl, and David E., (1980), Cubic Splines for Filter Design in Computed Tomography, *Nuclear Science, IEEE Transactions on,* Vol. 27, pp. 1368 – 1374.

4. Jovanovic I., Vetterli M., and Sbaiz L. (Dirs.). Inverse Problems in Acoustic Tomography: theory and Applications. EPFL, Lausanne, 2008.

5. Математические задачи комп'ютерной томографии / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, А. А. Тимонов. – М. : Наука, 1987. – 160 с.

6. Нолет Г. Сейсмическая томография. С приложениями в глобальной сейсмологии и разведочной геофизике; пер. с англ. / Г. Нолет [и др.]. – М. : Мир, 1990. – 415 с.

7. Сизиков В. С. Обратные прикладные задачи и MatLab / В. С. Сизиков. – СПб : Лань, 2011, 256 с.

8. Шелевицький І. В. Методи та засоби сплайн-технології обробки сигналів складної форми. / під ред. Шутка М. О. – Кривий Ріг : Європейський університет, 2002. – 304 с.

9. Шуруп А. С. Модели активно-пассивной акустической томографии неоднородного движущегося океана : дис. … канд.физ.-мат.наук : 01.04.06 / Шуруп Андрей Сергеевич. – М. : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2008. – 173 с.

У другому практичному прикладі (табл. 1) було змінено розташування одного приймача.

Отримано 28.02.2014

References

1. Duric N., Li C., and Roy O., (2011), Acoustic Tomography: Promise versus Reality, *IEEE International Ultrasonics Symposium, Florida, USA,* October 18–21, 2011,

Washington, DC, IEEE, pp. 2033 – 2041 (In English).

2. Goodney A. Acoustic Tomography with an Underwater Sensor Network, Oceans, *Proceedings of the Oceans*, *Hampton Road, VA,* October 14–19, 2012*,* Washington, DC, IEEE, pp. 1 – 10 (In English).

3. Huang S.-C., Phelps M.E., Hoffman E.J., and Kuhl David E., (1980), Cubic Splines for Filter Design in Computed Tomography, *Nuclear Science, IEEE Transactions on,* Vol. 27, pp. 1368 – 1374 (In English).

4. Jovanovic I., Vetterli M., and Sbaiz L. (Dirs.). Inverse Problems in Acoustic Tomography: theory and Applications. EPFL, Lausanne, 2008 (In English)

5. Tihonov A.N., Arsenin V.Ja., and Timonov A.A., Matematicheskie zadachi komp'juternoj tomografii [Mathematical Problems of Computer Tomography], (1987), *Nauka Publ.,* Moscow, 160 p. (In Russian).

6. Nolet G. Sejsmicheskaja tomografija. S prilozhenijami v global'noj sejsmologii i razvedochnoj geofizike [Seismic Tomography. With Applications in Global Seismology and Geophysics], (1990), *Mir Publ,* Moscow, Russian Federation (In Russian)

7. Sizikov V.S. Obratnye prikladnye zadachi i MatLab [Inverse Application Tasks and MatLab], (2011), Lan', SPb. (In Russian)

8. Shelevic'kij, I. V. Metodi ta zasobi splajn-tehnologii obrobki signaliv skladnoi formi [Methods and Means of Spline Signal Processing Technology of Complex Shape], (2002), *Evropejs'kij Universitet Publ.*, Krivij Rig, Ukraine (In Ukrainian).

9. Shurup A.S. Modeli aktivno-passivnoj akusticheskoj tomografii neodnorodnogo dvizhushhegosja okeana [Models of Active-passive Acoustic Tomography Inhomogeneous Moving Ocean], (2008), *MGU im. M. V. Lomonosova,* Moscow, Russian Federation (In Russian).

Головко Владислав Олексійович, аспірант каф. електроніки Інституту аеронавігації Нац. авіаційного ун-ту, м. Кривий Ріг, проспект Гагаріна, буд. 61А, кв.103, тел. (097) 347-52-33.
E-mail: golovko.vlad@gmail.com