Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

ISSN 2413-158X (online)
ISSN 2413-1571 (print)

http://fmo-journal.fizmatsspu.sumy.ua/

Василенко Я.П. Застосування апроксимаційно-ітеративного методу до розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, заданих неявно // Фізико-математична освіта : науковий журнал. – 2016. – Випуск 2(8). – С. 35-47.

Vasylenko Y.P. Application approximal-iterative method to the solution of ordinary differential equations defined implicitly // Physics and Mathematics Education : scientific journal. – 2016. – Issue 2(8). – P. 35-47.

УДК 519.62

Я.П. Василенко
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, Україна

ЗАСТОСУВАННЯ АПРОКСИМАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЗАДАНИХ НЕЯВНО

Постановка проблеми. В роботах [1, 2, 3] В.К. Дзядиком був запропонований і теоретично обґрунтований апроксимаційно-ітеративний метод (АІ-метод) чисельно-аналітичного наближення розв'язків задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь виду

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0,\ x \in [x_0, x_0 + h].$$

Досить часто в прикладних галузях виникає необхідність розв'язувати задачі Коші, в яких залежність похідної від розв'язку задається неявно. На даний час існують чисельні методи їх розв'язування [див., напр., 4]. У даній статті досліджуються особливості застосування АІ-методу для отримання наближеного аналітичного розв'язку задачі Коші

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

$$y(x_0) = y_0,\ x \in [x_0, x_0 + h] \tag{2}$$

Як відомо із теорії звичайних диференціальних рівнянь [див., напр., 5], при виконанні наступних умов відносно функції $F(x, y, y')$ в околі точки $(x_0, y_0, y_0^{'})$, де $y_0^{'}$ — один із коренів рівняння $F(x_0, y_0, y_0^{'}) = 0$:

– $F(x, y, y')$ неперервна по x і неперервно-диференційована по y і $y^{'}$;

– її похідна по $y^{'}$ $\dfrac{\partial F}{\partial y^{'}}(x, y, y^{'}) \neq 0$,

в достатньо малому околі точки x_0 існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ задачі Коші (1), (2), для якого $\varphi(x_0) = y_0$.

Зауважимо, що вказані умови існування розв'язків задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь мають локальний характер.

Мета статті. У даній статті пропонується більш конкретний опис області існування розв'язків задачі (1), (2) (подібно до статті [6] для неявних функцій) і апроксимаційно-ітеративний алгоритм його знаходження. Наведено оцінки відхилень у випадках скінченої гладкості функції $F(x, y, y')$ та її аналітичності.

Виклад основного матеріалу.

Ітераційний процес Пікара. Нехай функція F володіє властивостями:

1) $F(x, y, y')$ задана в області $D = (x_0, y_0, y_0^{'}, h, a, b)$:

$$x_0 \le x \le x_0 + h, \left|y - y_0\right| \le a, \left|y^{'} - y_0^{'}\right| \le b;$$

2) $F(x_0, y_0, y_0^{'}) = 0$;

3) $F(x, y, y')$ має частинні похідні до порядку $r \ge 2$ включно, неперервні в області D;

4) $\dfrac{\partial F}{\partial y^{'}} \ne 0$ в області D.

Вважаючи, що розв'язок задачі (1), який проходить через точку $(x_0, y_0, y_0^{'})$, є відомим, продиференціюємо тотожність $F(x, y(x), y'(x)) = 0$ по x. В результаті отримаємо

$$F_x^{'}(x, y(x), y'(x)) + F_y^{'}(x, y(x), y'(x))y'(x) + F_{y^{'}}^{'}(x, y(x), y'(x))y''(x) \equiv 0.$$

Звідси будемо мати:

$$y'' = -\frac{F_x^{'}(x, y(x), y'(x)) + F_y^{'}(x, y(x), y'(x))y'(x)}{F_{y^{'}}^{'}(x, y(x), y'(x))}.$$

Шляхом інтегрування по відрізку $[x_0, x]\,(x_0 \le x \le x_0 + h)$ отримаємо:

$$y'(x) = y_0^{'} - \int_{x_0}^{x} \frac{F_x^{'}(\xi, y(\xi), y'(\xi)) + F_y^{'}(\xi, y(\xi), y'(\xi))y'(\xi)}{F_{y^{'}}^{'}(\xi, y(\xi), y'(\xi))} d\xi, \qquad (3)$$

$$y(x) = y_0 + y_0^{'}(x - x_0) - \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi} \frac{F_x^{'}(\eta, y(\eta), y'(\eta)) + F_y^{'}(\eta, y(\eta), y'(\eta))y'(\eta)}{F_{y^{'}}^{'}(\eta, y(\eta), y'(\eta))} d\eta d\xi \qquad (4)$$

Очевидно, що у випадку, коли $y_0^{'}$ є фіксованим коренем рівняння $F(x_0, y_0, y_0^{'}) = 0$, то задача Коші (1), (2) еквівалентна системі інтегральних рівнянь(3), (4).

Далі для компактності викладу введемо позначення:

$$p(x) := y'(x),$$

$$\psi(x, y(x), p(x)) := \frac{F_x^{'}(x, y(x), p(x)) + F_y^{'}(x, y(x), p(x))p(x)}{F_{y^{'}}^{'}(x, y(x), p(x))}$$

Теорема 1. Якщо функція F в рівнянні (1) володіє властивостями 1)–4), то існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ задачі (1), (2), визначений на сегменті $[x_0, x_0 + h_1]$, де $h_1 = \min\{h, \dfrac{a}{\left|y_0^{'}\right| + \dfrac{Mh}{2}}, \dfrac{b}{M}\}$, $M := \max\limits_{D}\left|\psi(x, y, p)\right|$, такий що $\varphi'(x_0) = y_0^{'}$. Крім того, $\varphi \in C_{[x_0, x_0 + h_1]}^{r+1}$.

Доведення. Згідно методу Пікара (див. напр., [7]) послідовні наближення до розв'язку $y(x)$ системи рівнянь (3), (4) (а, відповідно, і до розв'язку задачі (1), (2)) будуються за наступними ітеративними формулами:

$$y_0(x) \equiv y_0,\; p_0(x) \equiv y_0^{'},$$

$$y_{\nu+1}(x) = y_0 + y_0^{'}(x - x_0) - \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi} \psi(\eta, y_\nu(\eta), p_\nu(\eta)) d\eta d\xi \qquad (5)$$

$$p_{\nu+1}(x) = p_0(x) - \int_{x_0}^{x} \psi(\xi, y_\nu(\xi), p_\nu(\xi)) d\xi,\; \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

Для того щоб, перейти від ітерації $\nu + 1$ до ітерації $\nu + 2$, необхідно, щоб виконувалися нерівності:

$$\left|y - y_0\right| \le a, \left|y^{'} - y_0^{'}\right| \le b \qquad (6)$$

Нерівності (6) будуть виконані, якщо поставити вимогу, щоб

$$\left|y_0^{'}(x - x_0) - \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi} \psi(\eta, y_\nu(\eta), p_\nu(\eta)) d\eta d\xi\right| \le a,$$

$$\left|\int_{x_0}^{x}\psi(\xi, y_\nu(\xi), p_\nu(\xi))d\xi\right| \le b$$

або

$$|x-x_0|\cdot\left(|y_0'|+\frac{Mh}{2}\right)\le a,\ |x-x_0|\cdot M \le b, \tag{7}$$

де $M := \max\limits_D |\psi(x,y,p)|$.

Для доведення збіжності методу Пікара і отримання оцінки відхилення нам буде зручно скористатися функцією

$$\delta_\nu(x) := |y_\nu(x)-y_{\nu-1}(x)| + |p_\nu(x)-p_{\nu-1}(x)|.$$

Якщо покласти $B := \max\limits_D \left|\dfrac{F_y'(x,y,p)}{F_{y'}'(x,y,p)}\right|$ і позначити через A константу Ліпшиця для функції $\dfrac{F_x'(x,y,p)}{F_{y'}'(x,y,p)}$ по змінним y і p, то функція $\psi(x,y,p)$, буде задовольняти умову Ліпшиця по тим самим змінним з константою $A+B$, тобто

$$|\psi(x,y_1,p_1)-\psi(x,y_2,p_2)| \le (A+B)(|y_1-y_2|+|p_1-p_2|)$$

для довільних y_1, y_2 і p_1, p_2 із області D.

Зауважимо, що функція $\dfrac{F_x'(x,y,p)}{F_{y'}'(x,y,p)}$ задовольняє умову Ліпшиця в силу того, що $r \ge 2$ і $\dfrac{\partial F}{\partial y'} \ne 0$ в області D.

Із (5) видно, що

$$\delta_{\nu+1}(x) \le (A+B)\left\{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi}\delta_\nu(\eta)d\eta d\xi + \int_{x_0}^{x}\delta_\nu(\xi)d\xi\right\},\ \nu = 1, 2, \cdots,$$

$$\delta_1(x) \le \alpha|x-x_0|\cdot\left(1+\frac{h}{2}\right),$$

де $\alpha = C + B|y_0'|$, $C := \max\limits_D \left|\dfrac{F_x'(x,y,p)}{F_{y'}'(x,y,p)}\right|$.

Далі маємо

$$\delta_2(x) \le \alpha(A+B)\left(1+\frac{h}{2}\right)\left(\frac{|x-x_0|^3}{3!}+\frac{|x-x_0|^2}{2!}\right) \le \alpha(A+B)\frac{|x-x_0|^2}{2!}\left(1+\frac{h}{2}\right)^2,$$

$$\delta_3(x) \le \alpha(A+B)^2\left(1+\frac{h}{2}\right)^2\left(\frac{|x-x_0|^4}{4!}+\frac{|x-x_0|^3}{3!}\right) \le \alpha(A+B)^2\frac{|x-x_0|^3}{3!}\left(1+\frac{h}{2}\right)^3,$$

…

$$\delta_{\nu+1}(x) \le \alpha(A+B)^\nu\frac{|x-x_0|^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\left(1+\frac{h}{2}\right)^{\nu+1} \le \alpha(A+B)^\nu\frac{h^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\left(1+\frac{h}{2}\right)^{\nu+1}. \tag{8}$$

Оскільки, в силу (7) ряди

$$y_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty}[y_{\nu+1}(x)-y_\nu(x)],\quad p_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty}[p_{\nu+1}(x)-p_\nu(x)]$$

сходяться рівномірно на $[x_0, x_0+h]$ (бо мажоруються збіжними числовими рядами), то їх суми

$$y(x) = y_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty}[y_{\nu+1}(x)-y_\nu(x)] = \lim_{\nu\to\infty} y_\nu(x),$$

$$p(x) = y_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[p_{\nu+1}(x) - p_\nu(x)\right] = \lim_{\nu\to\infty} p_\nu(x)$$

є розв'язками інтегральних рівнянь (3), (4), причому неперервно-диференційованими на $[x_0, x_0 + h]$. Отримане $y(x)$ є розв'язком задачі Коші (1), (2).

Покажемо, що знайдені функції $y(x)$ і $p(x)$ будуть єдиними в класах неперервно-диференційованих та неперервних функцій відповідно. Для цього припустимо, що існують, крім того, ще функції $\overline{y}(x)$ і $\overline{p}(x)$, які теж задовольняють рівнянням (3), (4). Тоді

$$\left|y(x) - \overline{y}(x)\right| \le (A+B)\left\{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi}\left(\left|y(\eta) - \overline{y}(\eta)\right| + \left|p(\eta) - \overline{p}(\eta)\right|\right)d\eta d\xi\right\},$$

$$\left|p(x) - \overline{p}(x)\right| \le (A+B)\left\{\int_{x_0}^{x}\left(\left|y(\xi) - \overline{y}(\xi)\right| + \left|p(\xi) - \overline{p}(\xi)\right|\right)d\xi\right\}.$$

Нехай ε — достатньо мале число, тоді отримаємо

$$\max_{|x-x_0|\le\varepsilon}\left|y(x) - \overline{y}(x)\right| \le (A+B)\cdot\Delta\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \max_{|x-x_0|\le\varepsilon}\left|p(x) - \overline{p}(x)\right| \le (A+B)\cdot\Delta\cdot\varepsilon,$$

де $\Delta := \max\limits_{|x-x_0|\le\varepsilon}\left|y(x) - \overline{y}(x)\right| + \max\limits_{|x-x_0|\le\varepsilon}\left|p(x) - \overline{p}(x)\right|$.

В результаті

$$\Delta \le \Delta(A+B)\varepsilon\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

або

$$1 \le (A+B)\varepsilon\left(1 + \frac{h}{2}\right), \quad (\varepsilon \le h).$$

Але остання нерівність є неможливою, якщо взяти $\varepsilon < \dfrac{1}{(A+D)\left(1 + \frac{h}{2}\right)}$.

Зауважимо, що умова, з якої знаходиться довжина h_1 відрізка існування розв'язку задачі Коші (1), (2), слідує із нерівностей (7).

Із єдиності функцій $y(x)$ і $p(x) = y'(x)$ слідує, що вони перетворюють рівняння (3), (4) в тотожності і, отже, $y(x)$ має похідні до $(r+1)$-го порядку включно, неперервні на $[x_0, x_0 + h_1]$.

Наслідок. Із (8) легко отримується наступна оцінка відхилення:

$$\left|y(x) - y_\nu(x)\right| + \left|p(x) - p_\nu(x)\right| \le \sum_{j=\nu}^{\infty}\delta_j(x) \le$$

$$\le \alpha(A+B)^\nu\frac{h^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\left(1 + \frac{h}{2}\right)^{\nu+1} \le \alpha(A+B)^\nu\frac{h^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\left(1 + \frac{h}{2}\right)^{\nu+1}\cdot e^q, \tag{9}$$

де $q := (A+B)h\cdot\left(1 + \dfrac{h}{2}\right)$.

Апроксимаційно-ітеративний алгоритм. Слідуючи роботі [2], розглянемо інтерполяційний оператор

$$A_n^0(f^0;\xi) = \sum_{i-0}^{n} f^0(\xi_i)l_i^0(\xi),$$

заданий на відрізку [-1,1], де для кожного n $-1 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n = 1$ — екстремальні точки многочлена Чебишева 1-го роду $T_n(\xi) = \cos(\arccos\xi)$, $l_i^0(\xi)$ — фундаментальні многочлени Лагранжа по вузлах $\{\xi_i\}_{i=0}^{n}$. Пересадку оператора A_n^0 на сегмент $[x_0, x_0 + h]$, що нас цікавить, будемо здійснювати за формулами

$$\xi = -1 + \frac{2}{h}(x - x_0) : [x_0, x_0 + h] \to [-1,1],$$

$$f^0(\xi) = f^0\left(-1 + \frac{2}{h}(x - x_0)\right) = f(x),\ \ x \in [x_0, x_0 + h],$$

$$A_n^0(f^0;\xi) = \sum_{i-0}^{n} f^0(\xi_i) l_i^0(\xi) = \sum_{i-0}^{n} f(x_i) l_i(x) =: A_n(f;x).$$

де $x_i = x_0 + \frac{h}{2}(\xi_i + 1)$, $l_i(x) = l_i^0\left(-1 + \frac{h}{2}(x - x_0)\right)$. Звідси, зокрема, видно, що $\|A_n\| = \|A_n^0\|$.

Систему наближених значень $y_{vj} \approx y(x_j)$, $p_{vj} \approx p(x_j)$ для шуканих функцій $y(x)$ і $p(x)$ (розв'язків системи (3), (4)) в точках $x_j = x_j(n)$ побудуємо за наступними ітеративними формулами:

$$y_{0j} := y_0,\ \ p_{0j} := y_0',\ \ j = \overline{0,n},$$

$$y_{\nu 0} := y_0,\ \ p_{\nu 0} := y_0',\ \ \nu = 1, 2, \cdots,$$

$$y_{vj} = y_0 + y_0'(x_j - x_0) - \frac{h^2}{4}\sum_{i=0}^{n} \frac{F_x'(x_i, y_{\nu-1,i}, p_{\nu-1,i}) + F_y'(x_i, y_{\nu-1,i}, p_{\nu-1,i}) p_{\nu-1,i}}{F_{y'}'(x_i, y_{\nu-1,i}, p_{\nu-1,i})} b_{ij}, \tag{10}$$

$$p_{vj} = y_0' - \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n} \frac{F_x'(x_i, y_{\nu-1,i}, p_{\nu-1,i}) + F_y'(x_i, y_{\nu-1,i}, p_{\nu-1,i}) p_{\nu-1,i}}{F_{y'}'(x_i, y_{\nu-1,i}, p_{\nu-1,i})} a_{ij},$$

де

$$a_{ij} = a_{ij}(n) = \int_{-1}^{\xi_j} l_i^0(\xi) d\xi,\ \ b_{ij} = b_{ij}(n) = -\left(a_{ij} \cdot \cos\frac{j\pi}{n} + \int_{-1}^{\xi_j} \xi \cdot l_i^0(\xi) d\xi\right). \tag{11}$$

Зауважимо, що наведені в (10) числа є значеннями наступних поліномів (степенів $n+2$ і $n+1$ відповідно) в точках $x_j = x_j(n)$:

$$y_0(n;x) = y_0,\ p_0(n;x) \equiv y_0',$$

$$y_\nu(n;x) = y_0 + y_0'(x - x_0) - \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s} A_n(\psi_{\nu-1}(n;\cdot);t) dt ds =$$

$$= y_0 + y_0'(x - x_0) - \sum_{i=0}^{n} \psi_{\nu-1}(n;x_i) \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s} l_i(t) dt ds, \tag{12}$$

$$p_\nu(n;x) = y_0' - \int_{x_0}^{x} A_n(\psi_{\nu-1}(n;\cdot);t) dt = y_0' - \sum_{i=0}^{n} \psi_{\nu-1}(n;x_i) \int_{x_0}^{x} l_i(t) dt,\ \ \nu = 1, 2, \cdots,$$

де для скорочення позначено

$$\psi_\nu(n;x) := \psi(x, y_\nu(n;x), p_\nu(n;x)).$$

На основі (11), використовуючи заміну $t = x_0 + \frac{h}{2}(\xi + 1) \Leftrightarrow\ \xi = -1 + \frac{2}{h}(t - x_0)$, отримаємо наступні співвідношення:

$$\int_{-1}^{x_j} l_i(t) dt = \int_{-1}^{x_j} l_i^0\left(-1 + \frac{2}{h}(t - x_0)\right) dt = \frac{h}{2}\int_{-1}^{\xi_j} l_i^0(\xi) d\xi = \frac{h}{2} a_{ij},$$

$$\int_{x_0}^{x_j}\int_{x_0}^{s} l_i(t) dt ds = \int_{x_0}^{x_j} l_i(t) \int_{t}^{x_j} ds dt = \int_{x_0}^{x_j} l_i(t)(x_j - t) dt = \int_{x_0}^{x_j} l_i^0\left(-1 + \frac{2}{h}(t - x_0)\right)(x_j - t) dt = \tag{14}$$

$$= \frac{h^2}{4}\int_{x_0}^{x_j} l_i^0(\xi)(\xi_j - \xi) d\xi = \frac{h^2}{4}\left(a_{ij} \cdot \xi_j - \int_{-1}^{\xi_j} \xi \cdot l_i^0(\xi) d\xi\right) = \frac{h^2}{4} b_{ij}$$

Зауважимо, що замість оператора A_n^0 можна використовувати інші підходящі суматорні оператори.

Явна формула для чисел a_{ij} отримана в роботі [2]. Вона має вигляд

$$a_{ij} = \frac{\varepsilon_i}{n}\left[1 - c_j + \frac{c_i}{2}\left(1 - c_{2j}\right) + \sum_{\nu=2}^{n} \varepsilon_\nu c_{i\nu}\left(\frac{c_{j(\nu-1)}}{\nu-1} - \frac{c_{j(\nu+1)}}{\nu+1} - \frac{2}{\nu^2-1}\right)\right],$$

де $\varepsilon_0 = \varepsilon_n = \frac{1}{2},\ \varepsilon_i = 1,\ i = \overline{1, n-1}$ і $c_k := \cos\frac{k\pi}{n}$.

Для знаходження чисел b_{ij} обчислимо інтеграл $\int_{-1}^{\xi_j} \xi \cdot l_i^0(\xi)d\xi$, скориставшись співвідношеннями (див. [1]),

$$l_i^0(\xi) = \frac{\varepsilon_i}{n}\left[1 + 2\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu \cos\frac{\nu i\pi}{n} T_\nu(\xi) - (-1)^{n-i} T_n(\xi)\right],$$

$$\int_0^x T_\nu(\xi)d\xi = \frac{1}{2}\left[\frac{T_{\nu+1}(x)}{\nu+1} - \frac{T_{\nu-1}(x)}{\nu-1}\right] + \gamma_n,\ \ \nu = 2, 3, \cdots,\ \ \gamma_n = const,$$

$$T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x),\ \ n = 2, 3, \cdots.$$

Отримаємо

$$\int_{-1}^{\xi_j} \xi \cdot l_i^0(\xi)d\xi = \frac{\varepsilon_i}{n}\int_{-1}^{\xi_j}\left[\xi + 2\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu \cos\frac{\nu i\pi}{n}\xi T_\nu(\xi) - (-1)^{n-i}\xi T_n(\xi)\right]d\xi =$$

$$= \frac{\varepsilon_i}{n}\left\{\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{j\pi}{n} - 1\right) + \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu \cos\frac{\nu i\pi}{n} \cdot \int_{-1}^{\xi_j}\left(T_{\nu-1}(\xi) + T_{\nu+1}(\xi)\right)d\xi\right\} -$$

$$- \frac{\varepsilon_i}{n}\left\{(-1)^{n-i}\frac{1}{2}\int_{-1}^{\xi_j}\left(T_{n-1}(\xi) + T_{n+1}(\xi)\right)d\xi\right\} =$$

$$= \frac{\varepsilon_i}{n}\left\{\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2j\pi}{n} - 1\right) - \cos\frac{i\pi}{n}\int_{-1}^{\xi_j}\left(T_0(\xi) + T_2(\xi)\right)d\xi + \cos\frac{2i\pi}{n}\int_{-1}^{\xi_j}\left(T_1(\xi) + T_3(\xi)\right)d\xi\right\} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_i}{n}\left\{\sum_{\nu=3}^{n}(-1)^\nu \cos\frac{\nu i\pi}{n} \cdot \int_{-1}^{\xi_j}\left(T_{\nu-1}(\xi) + T_{\nu+1}(\xi)\right)d\xi - (-1)^{n-i}\frac{1}{2}\int_{-1}^{\xi_j}\left(T_{n-1}(\xi) + T_{n+1}(\xi)\right)d\xi\right\} =$$

$$= \frac{\varepsilon_i}{n}\left\{\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2j\pi}{n} - 1\right) - \cos\frac{i\pi}{n}\left[\left(1 - \cos\frac{j\pi}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos\frac{3j\pi}{n} + \cos\frac{j\pi}{n} + \frac{1}{3} - 1\right)\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_i}{n}\left\{\cos\frac{2i\pi}{n}\left[\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2j\pi}{n} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(\cos\frac{4j\pi}{n} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2j\pi}{n} - 1\right)\right)\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_i}{n}\left\{\sum_{\nu=3}^{n}\frac{(-1)^\nu}{2}\cos\frac{\nu i\pi}{n}\left[\frac{1}{\nu+2}(-1)^{\nu+2}\left(\cos\frac{(\nu+2)j\pi}{n} - 1\right) - \frac{1}{\nu-2}(-1)^{\nu-2}\left(\cos\frac{(\nu-2)j\pi}{n} - 1\right)\right]\right\} -$$

$$- \frac{\varepsilon_i}{n}\left\{\frac{(-1)^{n-i}}{4}\left[\frac{1}{n+2}(-1)^{n+2}\left(\cos\frac{(n+2)j\pi}{n} - 1\right) - \frac{1}{n-2}(-1)^{n-2}\left(\cos\frac{(n-2)j\pi}{n} - 1\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{\varepsilon_i}{n}\left\{\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2j\pi}{n} - 1\right) - \cos\frac{i\pi}{n}\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\cos\frac{j\pi}{n} - \frac{1}{6}\cos\frac{3j\pi}{n}\right] + \frac{1}{8}\cos\frac{2i\pi}{n}\left[\cos\frac{4j\pi}{n} - 1\right]\right\} +$$

$$+\frac{\varepsilon_i}{n}\left\{\frac{1}{2}\sum_{\nu=3}^{n}\cos\frac{\nu i\pi}{n}\left[\frac{\cos\frac{(\nu+2)j\pi}{n}}{\nu+2}-\frac{\cos\frac{(\nu-2)j\pi}{n}}{\nu-2}+\frac{4}{\nu^2-4}\right]\right\}-$$

$$-\frac{\varepsilon_i}{n}\left\{\frac{(-1)^i}{4}\left[(-1)^j\left(\frac{\cos\frac{2j\pi}{n}}{n+2}-\frac{\cos\frac{2j\pi}{n}}{n-2}\right)+\frac{4}{n^2-4}\right]\right\}=$$

$$=\frac{\varepsilon_i}{n}\left\{\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2j\pi}{n}-1\right)-\cos\frac{i\pi}{n}\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cos\frac{j\pi}{n}-\frac{1}{6}\cos\frac{3j\pi}{n}\right]+\frac{1}{8}\cos\frac{2i\pi}{n}\left[\cos\frac{4j\pi}{n}-1\right]\right\}+$$

$$+\frac{\varepsilon_i}{n}\left\{\frac{1}{2}\sum_{\nu=3}^{n}\varepsilon_\nu\cos\frac{\nu i\pi}{n}\left[\frac{\cos\frac{(\nu+2)j\pi}{n}}{\nu+2}-\frac{\cos\frac{(\nu-2)j\pi}{n}}{\nu-2}+\frac{4}{\nu^2-4}\right]\right\}.$$

Із (14) з врахуванням позначення $c_k := \cos\frac{k\pi}{n}$ знайдемо, що

$$b_{ij}=-\left\{a_{ij}\cdot c_j+\frac{\varepsilon_i}{n}\left\{\frac{1}{4}\left(c_{2j}-1\right)-c_i\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{2}c_j-\frac{1}{6}c_{3j}\right]+\frac{1}{8}c_{2i}\left[c_{4j}-1\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\sum_{\nu=3}^{n}\varepsilon_\nu c_{\nu i}\left[\frac{c_{(\nu+2)j}}{\nu+2}-\frac{c_{(\nu-2)j}}{\nu-2}+\frac{4}{\nu^2-4}\right]\right\}\right\},\quad i=\overline{0,n},\quad j=\overline{0,n}.$$

Після того, як будуть обчислені наближені значення $y_{\nu j}$, $p_{\nu j}$, $\nu=1,2,\cdots$, $j=\overline{0,n}$ (див. (10)), поліноми $y_\nu(n;x), p_\nu(n;x)$ згідно (12) знаходяться за формулами

$$y_\nu(n;x)=y_0+y_0'(x-x_0)-\sum_{i=0}^{n}\psi(x_i,y_{\nu-1,i},p_{\nu-1,i})\Pi_{2i}(x),$$

$$p_\nu(n;x)=y_0'-\sum_{i=0}^{n}\psi(x_i,y_{\nu-1,i},p_{\nu-1,i})\Pi_{1i}(x),$$

де, як неважко переконатися,

$$\Pi_{1i}(x)=\frac{h}{2}\frac{\varepsilon_i}{n}\left\{(\zeta+1)\left(1-\cos\frac{i\pi}{n}(\zeta+1)\right)+\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu(-1)^\nu\cos\frac{\nu i\pi}{n}\cdot\left[\frac{T_{\nu+1}(\zeta)}{\nu+1}-\frac{T_{\nu-1}(\zeta)}{\nu-1}-\frac{2(-1)^\nu}{\nu^2-1}\right]\right\}$$

$$\Pi_{2i}(x)=\frac{h}{2}\left[\zeta\cdot\Pi_{1i}(x)-\frac{h}{2}\frac{\varepsilon_i}{n}\left\{(\zeta^2-1)-\cos\frac{i\pi}{n}\left[\frac{T_3(\zeta)}{6}+\frac{\zeta}{2}+\frac{2}{3}\right]+\frac{1}{8}\cos\frac{2i\pi}{n}\left[T_4(\zeta)-1\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu(-1)^\nu\cos\frac{\nu i\pi}{n}\cdot\left[\frac{T_{\nu+2}(\zeta)}{\nu+2}-\frac{T_{\nu-2}(\zeta)}{\nu-2}-\frac{4(-1)^\nu}{\nu^2-4}\right]\right\}\right],$$

$$\zeta=-1+\frac{2}{h}(x-x_0),\ \ \varepsilon_0=\varepsilon_n=\frac{1}{2},\ \ \varepsilon_i=1,\ \ i=\overline{1,n-1}.$$

Оцінка відхилення. Випадок достатньої гладкості $F(x,y,y')$.

Якщо функція $F(x,y,y')$ володіє властивостями 1) - 4), то є справедливою наступна теорема.

Теорема 2. При наближенні розв'язку задачі Коші (1), (2) і його похідної поліномами $y_\nu(n;x), p_\nu(n;x)$, побудованими за формулами (12), для всіх $x\in[x_0,x_0+h_2]$, де

$$h_2 = \min\left\{h_1, \frac{a}{\left|y_0^{'}\right| + \left\|A_n^0\right\| \frac{Mh}{2}}, \frac{b}{\left\|A_n^0\right\| M}\right\}, \tag{15}$$

h_1 – довжина проміжку існування розв'язку задачі (1), (2), $\left\|A_n^0\right\|$ – норма оператора інтерполювання, $M := \max\limits_D |\psi(x, y, p)|$, має місце оцінка

$$\left|y(x) - y_\nu(n;x)\right| + \left|p(x) - p_\nu(n;x)\right| \le h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right)\left(1 + \left\|A_n^0\right\|\right) \cdot \left[\frac{1 - q_1^{\ \nu}}{1 - q_1} \cdot E_n(y'')_{C[x_0, x_0 + h_2]} + \right.$$

$$\left. + \alpha q_1^{\ \nu} \left\|A_n^0\right\|^{-1} \exp\left\{(A + B)h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right) + \left\|A_n^0\right\|^{-1}\right\}\right] +$$

$$+ \alpha (A + B)^\nu \frac{h_2^{\ \nu+1}\left(1 + \frac{h_2}{2}\right)^{\nu+1}}{(\nu + 1)!} \cdot \exp\left\{(A + B)h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right)\right\}, \tag{16}$$

де $q_1 := (A + B)h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \left\|A_n^0\right\|$, $\alpha := C + B\left|y_0^{'}\right|$, $E_n(y'')_{C[x_0, x_0 + h_2]}$ – величина найкращого наближення функції $y''(x)$ многочленами степені не вище n в просторі неперервних на $[x_0, x_0 + h_2]$ функцій, значення величин A, B, C ті ж самі, що і в теоремі 1.

Зауваження. Відомо [8], що для оператора інтерполювання A_n^0 по чебишевських вузлах $\xi_i = -\cos\frac{i\pi}{n}$, $i = \overline{0, n}$

$$\left\|A_n^0\right\| \le \frac{2}{\pi} \cdot \ln n + 1.$$

Доведення теореми 2. Для скорочення записів введемо позначення

$\Delta_\nu(n;x) := \left|y(x) - y_\nu(n;x)\right| + \left|p(x) - p_\nu(n;x)\right|$, $\psi_\nu(x) := \psi(x, y_\nu(x), p_\nu(x))$,,

Для здійснення ітераційного процесу по формулах (12), необхідно, щоб

$$\left|y_\nu(n;x) - y_0\right| \le a, \ \left|p_\nu(n;x) - y_0^{'}\right| \le b.$$

Згідно (12)

$$\left|y_\nu(n;x) - y_0\right| \le \left|x - x_0\right|\left(\left|y_0^{'}\right| + \left\|A_n^0\right\| \frac{Mh}{2}\right), \ \left|p_\nu(n;x) - y_0^{'}\right| \le \left|x - x_0\right| \cdot \left\|A_n^0\right\| M.$$

Звідси слідує умова (15).

Оцінимо величину $\Delta_\nu(n;x)$, враховуючи (13):

$$\Delta_\nu(n;x) = \left|\int_{x_0}^{x}\left[A_n(\psi_{\nu-1}(n;\cdot);t) - \psi_{\nu-1}(t)\right]dt\right| + \left|\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s}\left[A_n(\psi_{\nu-1}(n;\cdot);t) - \psi_{\nu-1}(t)\right]dtds\right| =$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x}\left[A_n(\psi_{\nu-1}(n;\cdot) - \psi_{\nu-1}(\cdot);t) + A_n(\psi_{\nu-1}(\cdot);t) - \psi_{\nu-1}(t)\right]dt\right| +$$

$$+ \left|\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{s}\left[A_n(\psi_{\nu-1}(n;\cdot) - \psi_{\nu-1}(\cdot);t) + A_n(\psi_{\nu-1}(\cdot);t) - \psi_{\nu-1}(t)\right]dtds \le\right|$$

$$\le h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \left\|A_n^0\right\|(A + B)\Delta_{\nu-1}(n;x) + h_2\left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \left\|A_n(y_\nu^{''}(\cdot);x) - y_\nu^{''}(x)\right\|_{C_{I_2}} =$$

$$= q_1\Delta_{\nu-1}(n;x) + h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\cdot\left\|A_n(y_\nu''(\cdot);x) - y_\nu''(x)\right\|_{C_{I_2}} \le$$

$$\le q_1^2\Delta_{\nu-2}(n;x) + q_1 h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\cdot\left\|A_n(y_{\nu-1}''(\cdot);x) - y_{\nu-1}''(x)\right\|_{C_{I_2}} +$$

$$+h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\cdot\left\|A_n(y_\nu''(\cdot);x) - y_\nu''(x)\right\|_{C_{I_2}} \le \cdots \le h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\cdot\sum_{j=1}^{\nu} q_1^{\nu-j}\left\|A_n(y_j''(\cdot);x) - y_j''(x)\right\|_{C_{I_2}} \le$$

$$\le h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\cdot\left(1+\left\|A_n^0\right\|\right)\sum_{j=1}^{\nu} q_1^{\nu-j} E_n(y_j'')_{C_{I_2}}. \qquad (17)$$

Для отримання останньої нерівності ми скористалися нерівністю Лебега [3].

Звідси, використовуючи (9) і той факт, що

$$y_\nu''(x) = \psi_{\nu-1}(x),\ \ \nu = 1, 2, \cdots,$$

бачимо, що

$$\left\|y_j''(x) - y''(x)\right\| = \left\|\psi_{j-1}(x) - \psi(x)\right\| \le (A+B)\left(\left\|y_{j-1}(x) - y(x)\right\| + \left\|p_{j-1}(x) - p(x)\right\|\right) \le$$

$$\le \alpha\exp\left\{(A+B)h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\right\}\frac{\left[(A+B)h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\right]^j}{j!},$$

тобто

$$y_j''(x) = y''(x) + \varepsilon(x)\alpha\exp\left\{(A+B)h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\right\}\frac{\left[(A+B)h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\right]^j}{j!},\ \ |\varepsilon(x)| \le 1.$$

Отже,

$$E_n(y_j'')_{C_{I_2}} \le E_n(y'')_{C_{I_2}} + \alpha\exp\left\{(A+B)h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\right\}\frac{\left[(A+B)h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\right]^j}{j!}.$$

Після підстановки цієї оцінки в (17) і з врахуванням того, що $e^\xi - \le \xi e^\xi$ для довільних $\xi > 0$, отримаємо

$$\Delta_\nu(n;x) \le h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\cdot\left(1+\left\|A_n^0\right\|\right)\left\{\frac{1-q_1^\nu}{1-q_1}E_n(y'')_{C_{I_2}} + \alpha\exp\left\{(A+B)h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\right\}q_1^\nu\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\left\|A_n^0\right\|^{-1}}{j!}\right\} \le$$

$$\le h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\cdot\left(1+\left\|A_n^0\right\|\right)\left\{\frac{1-q_1^\nu}{1-q_1}E_n(y'')_{C_{I_2}} + \alpha\exp\left\{(A+B)h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right) + \left\|A_n^0\right\|^{-1}\right\}\left\|A_n^0\right\|^{-1}q_1^\nu\right\}.$$

Із цієї нерівності і (9) слідує (16). Теорема 2 доведена.

Оцінка відхилення. Аналітичний випадок.

У випадку аналітичності функції $F(x,y,y')$ має місце значно краща наближення.

Відштовхуючись від деякого відрізка $[x_0, x_0+h]$ і деякого $r \ge 1$, слідуючи роботам [2, 3], побудуємо замкнену область Ω_r в комплексній площині, обмежену еліпсом Жуковського

$$\partial\Omega_r = \left\{(z_1, z_2) \in R^2 : z_1 = x_0 + \frac{h}{2} + a_r\cos t,\ z_2 = b_r\sin t,\ t \in [-\pi, \pi]\right\},$$

$$a_r = \frac{h}{2}(r + r^{-1}),\ \ b_r = \frac{h}{2}(r - r^{-1}),$$

$$\Omega_r = \left\{ z = z_1 + iz_2 \in C : \left(\frac{z_1 - (x_0 + \frac{h}{2})}{a_r} \right)^2 + \left(\frac{z_2}{b_r} \right)^2 \le 1 \right\}.$$

При $r = 1$ множина Ω_r вироджується у відрізок $[x_0, x_0 + h]$.

Замість області D теореми 1 розглянемо замкнену область $\overline{D} = \overline{D}(x_0, y_0, y_0', h, a, b, r)$:

$$\overline{D} = \left\{ (z, w.w') \in C^3 : z \in \Omega_r,\ |w - y_0| \le a,\ |w' - y_0'| \le b \right\}.$$

Будемо припускати, що функція $F(z, w, w')$ є аналітичною в $\operatorname{int} \overline{D}$ і володіє в $\overline{D}$ властивостями 1) – 4). Тоді для оцінки наближення розв'язку задачі Коші (1) – (2) справедлива теорема.

Теорема 3. При перерахованих вище умовах поліноми $y_\nu(n;x)$ і $p_\nu(n;x)$ (12) наближають розв'язок задачі (1) – (2) і його похідну на відрізку $[x_0, x_0 + h_2]$ (h_2 знаходиться із умови (15), в якій M має той самий зміст) таким чином, що

$$|y(x) - y_\nu(n;x)| + |p(x) - p_\nu(n;x)| \le .$$

$$\le 2h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \left(1 + \|A_n^0\|\right) \frac{1 - q^\nu}{1 - q} \|\psi\|_{C_{\overline{D}}} \frac{1}{(r-1)r^n} + \alpha (A + B)^{-1} e^q \frac{q^{\nu+1}}{(\nu+1)!}, \tag{18}$$

де $q = (A + B) h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right)$, A – константа Ліпшиця функції $\dfrac{F_x'(x, y, p)}{F_{y'}'(x, y, p)}$ в області $\overline{D}$,

$$B := \max_{\overline{D}} \left| \frac{F_y'(x, y, p)}{F_{y'}'(x, y, p)} \right|,\ \alpha = C + B|y_0'|,\ C := \max_{\overline{D}} \left| \frac{F_x'(x, y, p)}{F_{y'}'(x, y, p)} \right|,$$

$$\psi(x, y, p) := \frac{F_x'(x, y, p) + F_y'(x, y, p) p}{F_{y'}'(x, y, p)}.$$

Наслідок. Якщо $(A + B) h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) < \frac{1}{2}$, то для всіх $x \in [x_0, x_0 + h_2]$

$$|y(x) - y_\nu(n;x)| + |p(x) - p_\nu(n;x)| \le .$$

$$\le 4{,}8 h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{\pi} \ln n + 2\right) \cdot \|\psi\|_{C_{\overline{D}}} \left(\frac{h_2}{4c}\right)^{n+1} + \alpha (A + B)^{-1} e^{\frac{1}{2}} \frac{q^{\nu+1}}{(\nu+1)!},$$

Де c – радіус круга аналітичності по z функції $\psi(z, w(z), w'(z))$ з центром в точці $x_0 + \frac{h_2}{2}$, тобто $c = \frac{h_2}{4}(r - r^{-1})$.

Доведення теореми 3. Використовуючи позначення, введені при доведенні попередньої теореми, маємо

$$\Delta_\nu(n;x) \le \left| \int_{x_0}^{x} \left[A_n(\psi_{\nu-1}(n;\cdot);t) - \psi_{\nu-1}(n;t) + \psi_{\nu-1}(n;t) - \psi_{\nu-1}(t) \right] dt \right| +$$

$$+ \left| \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{s} \left[A_n(\psi_{\nu-1}(n;\cdot);t) - \psi_{\nu-1}(n;t) + \psi_{\nu-1}(n;t) - \psi_{\nu-1}(t) \right] dt ds \right|.$$

Враховуючи тепер нерівність Лебега іі теорему Бернштейна (див., наприклад, [2, 3]), отримаємо

$$\Delta_\nu(n;x) \le h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) E_n(\psi_{\nu-1}(n;t))_{C_{I_2}} \left(\|A_n^0\| + 1 \right) + (A + B) h_2 \left(1 + \frac{h_2}{2}\right) \|\psi_{\nu-1}(n;x) - \psi_{\nu-1}(x)\|_{C_{I_2}} \le$$

$$\leq \left(\left\|A_n^0\right\|+1\right)h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\frac{2}{r-1}\left(\frac{1}{r}\right)^n\|\psi\|_{C_{\bar{D}}}+q\|\psi_{\nu-1}(n;x)-\psi_{\nu-1}(x)\|_{C_{I_2}}\leq\cdots\leq$$

$$\leq 2h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\left(\left\|A_n^0\right\|+1\right)\cdot\|\psi\|_{C_{\bar{D}}}\frac{1}{r-1}\left(\frac{1}{r}\right)^n\cdot\left(1+q+\cdots+q^{\nu-1}\right)=$$

$$=2h_2\left(1+\frac{h_2}{2}\right)\left(\left\|A_n^0\right\|+1\right)\cdot\|\psi\|_{C_{\bar{D}}}\frac{1}{r-1}\left(\frac{1}{r}\right)^n\cdot\frac{\left(1-q^{\nu}\right)}{1-q}.$$

Звідси і з нерівності (9) слідує справедливість (18). Теорема 3 доведена.

За допомогою викладеного вище апроксимаційно-ітеративному алгоритму були розв’язані наступні приклади, точний розв’язок яких є відомим.

Приклад 1.

$xy'(x^3y'-1)-y=0,\ \ y(2)=0$.

Шукаємо розв’язок, для якого $y'(2)=\frac{1}{8}$.

Точний розв’язок: $y(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)$.

Приклад 2.

$\left(y'\right)^2-y^2=0,\ \ y(0)=1$.

Шукаємо розв’язок, для якого $y'(0)=-1$.

Точний розв’язок: $y(x)=e^{-x}$.

Приклад 3.

$\left(y'\right)^2+y^2\sin^2 x=e^{2\sin x},\ \ y(0)=1$.

Шукаємо розв’язок, для якого $y'(0)=1$.

Точний розв’язок: $y(x)=e^{\sin x}$.

Ітераційний процес, побудований по формулах (10), продовжувався до тих пір, поки величини $\left|y_{\nu j}-y_{\nu-1,j}\right|$ і $\left|p_{\nu j}-p_{\nu-1,j}\right|$ для всіх $j=\overline{0,n}$ не ставали меншими за 10^{-11}. Похибка отриманих наближень встановлювалась шляхом порівняння значень побудованих по формулах (12) поліномів в 50 точках на кожному із розглянутих відрізків із точними значеннями.

Результати обчислень наведені в таблиці. Порожні клітинки в таблиці означають, що при великих *n* точність наближення не збільшується через обмеженість розрядності комп’ютера.

Приклади		1			2			3		
n \ h		1,0	0,5	0,1	1,0	0,5	0,1	1,0	0,5	0,1
3	ε_y	$2{,}4\cdot10^{-5}$	$7{,}8\cdot10^{-7}$	$1{,}0\cdot10^{-10}$	$2{,}3\cdot10^{-5}$	$5{,}1\cdot10^{-7}$	$4{,}1\cdot10^{-11}$	$2{,}0\cdot10^{-3}$	$1{,}4\cdot10^{-5}$	$2{,}7\cdot10^{-11}$
	$\varepsilon_{y'}$	$8{,}6\cdot10^{-5}$	$5{,}4\cdot10^{-6}$	$3{,}4\cdot10^{-9}$	$8{,}5\cdot10^{-5}$	$3{,}5\cdot10^{-6}$	$1{,}4\cdot10^{-9}$	$6{,}0\cdot10^{-3}$	$8{,}5\cdot10^{-5}$	$4{,}2\cdot10^{-10}$
4	ε_y	$2{,}5\cdot10^{-6}$	$4{,}3\cdot10^{-8}$	$1{,}3\cdot10^{-12}$	$9{,}3\cdot10^{-7}$	$8{,}9\cdot10^{-9}$	$3{,}6\cdot10^{-12}$	$1{,}0\cdot10^{-4}$	$1{,}0\cdot10^{-6}$	$1{,}1\cdot10^{-11}$
	$\varepsilon_{y'}$	$9{,}8\cdot10^{-6}$	$3{,}3\cdot10^{-7}$	$4{,}3\cdot10^{-11}$	$3{,}4\cdot10^{-6}$	$6{,}7\cdot10^{-8}$	$7{,}2\cdot10^{-12}$	$3{,}9\cdot10^{-4}$	$8{,}0\cdot10^{-6}$	$3{,}6\cdot10^{-10}$
5	ε_y	$1{,}7\cdot10^{-7}$	$1{,}6\cdot10^{-9}$	$1{,}0\cdot10^{-12}$	$1{,}8\cdot10^{-8}$	$8{,}8\cdot10^{-11}$	$3{,}6\cdot10^{-12}$	$5{,}3\cdot10^{-6}$	$1{,}3\cdot10^{-8}$	$7{,}3\cdot10^{-12}$
	$\varepsilon_{y'}$	$9{,}0\cdot10^{-7}$	$1{,}6\cdot10^{-8}$	$1{,}0\cdot10^{-12}$	$9{,}3\cdot10^{-8}$	$9{,}1\cdot10^{-10}$	$3{,}6\cdot10^{-12}$	$4{,}5\cdot10^{-5}$	$1{,}3\cdot10^{-7}$	$1{,}0\cdot10^{-11}$
6	ε_y	$1{,}1\cdot10^{-8}$	$5{,}6\cdot10^{-11}$		$3{,}2\cdot10^{-10}$	$3{,}6\cdot10^{-12}$		$7{,}2\cdot10^{-7}$	$8{,}0\cdot10^{-10}$	$7{,}3\cdot10^{-12}$
	$\varepsilon_{y'}$	$9{,}0\cdot10^{-8}$	$9{,}0\cdot10^{-10}$		$2{,}4\cdot10^{-9}$	$5{,}3\cdot10^{-11}$		$7{,}2\cdot10^{-6}$	$1{,}6\cdot10^{-8}$	$7{,}3\cdot10^{-12}$
7	ε_y	$8{,}2\cdot10^{-10}$	$2{,}4\cdot10^{-12}$		$7{,}3\cdot10^{-12}$	$3{,}6\cdot10^{-12}$		$1{,}0\cdot10^{-8}$	$4{,}5\cdot10^{-11}$	
	$\varepsilon_{y'}$	$9{,}5\cdot10^{-9}$	$5{,}4\cdot10^{-11}$		$6{,}8\cdot10^{-11}$	$2{,}7\cdot10^{-12}$		$8{,}8\cdot10^{-8}$	$2{,}0\cdot10^{-9}$	
8	ε_y	$8{,}6\cdot10^{-11}$	$1{,}2\cdot10^{-12}$		$7{,}3\cdot10^{-12}$			$6{,}6\cdot10^{-9}$	$7{,}3\cdot10^{-12}$	
	$\varepsilon_{y'}$	$1{,}1\cdot10^{-9}$	$3{,}4\cdot10^{-12}$		$6{,}8\cdot10^{-11}$			$8{,}4\cdot10^{-8}$	$1{,}0\cdot10^{-11}$	

Приклади		1			2			3		
n \ h		1,0	0,5	0,1	1,0	0,5	0,1	1,0	0,5	0,1
9	ε_y	$8{,}2\cdot10^{-12}$	$1{,}0\cdot10^{-12}$		$3{,}2\cdot10^{-12}$			$4{,}1\cdot10^{-10}$	$7{,}3\cdot10^{-12}$	
	$\varepsilon_{y'}$	$1{,}2\cdot10^{-10}$	$1{,}0\cdot10^{-12}$		$2{,}7\cdot10^{-12}$			$5{,}9\cdot10^{-9}$	$1{,}0\cdot10^{-11}$	
10	ε_y	$1{,}0\cdot10^{-12}$						$3{,}1\cdot10^{-11}$	$7{,}3\cdot10^{-12}$	
	$\varepsilon_{y'}$	$1{,}2\cdot10^{-12}$						$5{,}4\cdot10^{-10}$	$7{,}3\cdot10^{-12}$	
ν		13-15	11	7	9-10	7	5	13-16	11-12	8

Позначення:
h – довжина відрізка, на якому шукалися наближення розв’язку та його похідної;
n – степінь наближаючих поліномів;
ν – число ітерацій;
ε_y – фактична точність наближення розв’язку;
$\varepsilon_{y'}$ – – фактична точність наближення похідної.

Як видно із таблиці, шляхом зменшення довжини відрізка h і збільшення степенів наближаючи поліномів n можна досягти практично довільної допустимої комп’ютерної точності, що узгоджується із отриманими апріорними оцінками. Така ж ситуація спостерігається при розв’язанні даних прикладів з подвійною точністю.

Висновки. Таким чином, розроблений апроксимаційно-ітераційний алгоритм є цілком придатним для отримання наближених розв’язків задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь, не розв’язних відносно похідної. Особливою перевагою АІ-методу є можливість побудови наближених розв’язків в аналітичному вигляді (у вигляді поліномів). Можливі напрямки наступних досліджень: застосування АІ-методу до розв’язування неявних звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків та систем диференціальних рівнянь.

Список використаних джерел

1. Дзядык В.К. Аппроксимационно-итеративный метод приближения полиномами решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев, 1984. – 25 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 84.27).
2. Дзядык В.К. Аппроксимационно-итеративный метод приближения полиномами решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1986. – 26, № 3. – С. 357–372.
3. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1988. – 304 с.
4. Новиков Е.А., Юматова Л.А. Некоторые методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной // Докл. АН СССР. – 1987. – 295, № 4. – С. 809–812.
5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М: Наука, 1970. – 279 с.
6. Зубов В.И. К вопросу существования и приближенного представления неявных функций // Вестн. Ленинград. ун-та. Сер. математики, механіки и астрономии. – 1956. – № 19, вып.4. – С. 48. – 54.
7. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. – М: Изд-во иностр. лит., 1957. – 443 с.
8. Dzjadik V.K., Ivanov V.V. On some asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to Chebyshev nodal points // Analysis Math. – 1983. – № 9. – P. 85-97.

Анотація. Василенко Я.П. Застосування апроксимаційно-ітеративного методу до розв’язування звичайних диференціальних рівнянь, заданих неявно.

В статті розглянуто використання апроксимаційно-ітеративного методу для наближення розв’язку та його похідної задачі Коші для рівняння F(x, y, y’) = 0. При звичайних щодо функції F(x, y, y’) припущеннях за допомогою ітераційного процесу Пікара описується область існування розв’язку поставленої задачі. Наведені оцінки відхилень отриманих за допомогою апроксимаційно-ітеративного алгоритму наближень від точного розв’язку та його похідної в аналітичному випадку і у випадку скінченої гладкості функції F(x, y, y’).

Ключові слова*: задача Коші для звичайних диференціальних рівнянь, нерозв'язних відносно похідної, апроксимаційно-ітеративний метод, ітераційний процес Пікара, поліноміальне наближення, величина найкращого наближення.*

Аннотация. Василенко Я.П. Применение аппроксимационно-итеративного метода к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных неявно.

В статье рассмотрено использование аппроксимационно-итеративного метода для приближения решения и его производной задачи Коши для уравнения F (x, y, y ') = 0. При обычных относительно функции F (x, y, y') предположениях с помощью итерационного процесса Пикара описывается область существования решения поставленной задачи. Приведены оценки отклонений полученных с помощью аппроксимационно-итеративного алгоритма приближений от точного решения и его производной в аналитическом случае и в случае конечной гладкости функции F (x, y, y ').

Ключевые слова*: задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной, аппроксимационно-итеративный метод, итерационный процесс Пикара, полиномиальное приближение, величина наилучшего приближения.*

Abstract. Vasylenko Y.P. Application approximal-iterative method to the solution of ordinary differential equations defined implicitly.

The article examines the use approximal-iterative method to approximate the solution and its derivative of the Cauchy problem for the equation F(x, y, y') = 0. Under normal on the function F(x, y, y') assumptions through an iterative process by Picard described region of existence of the solution of the problem. The estimates deviations obtained by approximation-iterative algorithm for the approximation of the exact solution and its derivative in the analytic case and in the case of finite smoothness functions F(x, y, y') presented herein.

Keywords: *Cauchy problem for ordinary differential equation unsolved relative to derivative approximal-iterative method, iterative process Picard, polynomial approximation, the value of the best approximation.*