Scientific journal
PHYSICAL AND MATHEMATICAL EDUCATION
Has been issued since 2013.

Науковий журнал
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА
Видається з 2013.

p-ISSN 2413-1571
e-ISSN 2413-158X

DOI: 10.31110/2413-1571

https://fmo-journal.org/

DOI 10.31110/fmo2024.v39i1-09

УДК 355.433

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ БОЙОВИХ ДІЙ ЯК ЗАСІБ ВДОСКОНАЛЕННЯ ПРОФЕСІЙНОЇ ОРІЄНТОВАНОСТІ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ВВНЗ

Олександр ФУРСЕНКО
Харківський національний університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба, Україна
Olfursenko@ukr.net
https://orcid.org/0009-0008-9637-7297

Наталія ЧЕРНОВОЛ
Харківський національний університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба, Україна
n.n.chernovol@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-7988-7016

Галина БОБРИЦЬКА ✉
Харківський національний університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба, Україна
bogalina31@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-2793-5108

АНОТАЦІЯ

Формулювання проблеми. Викладання математичних дисциплін у вищих військових навчальних закладах (ВВНЗ) орієнтовано перш за все на забезпечення інструментом вивчення точних наук. При цьому в спеціальних дисциплінах не в повному обсязі використовуються можливості математики. В такій ситуації у курсантів і слухачів часто зникає мотивація до вивчення цієї науки. Тому важливо на початку вивчення вищої математики показувати на прикладах її застосування у військовій справі. Прикладом застосування є математичне моделювання бойових дій. Задачі такого типу допомагають сформувати навчальне середовище, що сприяє підвищенню мотивації курсантів до вивчення цих дисциплін та поглиблює їх професійні знання. Існує значна база задач такого типу, але з розвитком сучасних воєнних технологій та розвитком математики ця база потребує оновлення та переосмислення.

Матеріали і методи. Для виконання дослідження використано стохастичний підхід в дослідженні моделей бойових дій: введення станів відповідної системи, побудова графу переходів від одного стану до іншого з вказанням інтенсивностей, запис відповідної системи диференціальних рівнянь Колмогорова.

Результати. Надано детальний опис розв’язання прикладу стохастичної моделі “поганоорганізованого бою” для використання при викладанні окремих розділів прикладної математики і доповнення цим матеріалом традиційної методики викладання з метою підвищення мотивації вивчення математичних дисциплін курсантами та слухачами військових університетів. В запропонованому прикладі розглянуто стани системи, побудовано граф, виписано інтенсивності при переході від одного стану до іншого, виписана система диференціальних рівнянь Колмогорова, вказано метод розв’язання цієї системи і самі розв’язки, наведено кінцеві формули з підрахунку математичних сподівань кінцевого числа бойових одиниць кожної сторони та ймовірності перемоги кожної сторони.

Висновки. В роботі представлено детальний опис застосування стохастичного підходу до побудови моделей бойових дій. Наведений приклад демонструє покрокове виконання цього підходу і може бути застосований при викладанні “Теорії ймовірностей”, “Марківських процесів”, “Математичного моделювання та оптимізації досліджень” тощо в ВВНЗ.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: *Марковський процес з дискретними станами і неперервним часом; граф станів; диференціальні рівняння Колмогорова; інтенсивність; ефективна скорострільність; бойова одиниця.*

Для цитування:	Фурсенко О., Черновол Н., Бобрицька Г. Математичні моделі бойових дій як засіб вдосконалення професійної орієнтованості викладання математичних дисциплін у ВВНЗ. *Фізико-математична освіта*, 2024. Том 39. № 1. С. 64-69. DOI: 10.31110/fmo2024.v39i1-09
	Фурсенко, О., Черновол, Н., Бобрицька, Г. (2024). Математичні моделі бойових дій як засіб вдосконалення професійної орієнтованості викладання математичних дисциплін у ВВНЗ. *Фізико-математична освіта*, *39*(1), 64-69. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-09
For citation:	Fursenko, O., Chernovol, N., & Bobrytska, H. (2024). Mathematical combat models as a means of improving the profession-focused teaching of mathematics in military universities. *Physical and Mathematical Education*, *39*(1), 64-69. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-09
	Fursenko, O., Chernovol, N., & Bobrytska, H. (2024). Matematychni modeli boiovykh dii yak zasib vdoskonalennia profesiinoi oriientovanosti vykladannia matematychnykh dystsyplin u VVNZ [Mathematical combat models as a means of improving the profession-focused teaching of mathematics in military universities]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, *39*(1), 64-69. https://doi.org/10.31110/fmo2024.v39i1-09

✉ Corresponding author

MATHEMATICAL COMBAT MODELS AS A MEANS OF IMPROVING THE PROFESSION-FOCUSED TEACHING OF MATHEMATICS IN MILITARY UNIVERSITIES

Oleksandr FURSENKO
Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Ukraine
Olfursenko@ukr.net
https://orcid.org/0009-0008-9637-7297
Nataliya CHERNOVOL
Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Ukraine
n.n.chernovol@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-7988-7016
Halyna BOBRYTSKA ✉
Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Ukraine
bogalina31@ukr.net
https://orcid.org/0000-0003-2793-5108

ABSTRACT

Formulation of the problem. The teaching of mathematical disciplines in higher military educational institutions is focused primarily on providing a tool for studying the exact sciences. At the same time, the possibilities of mathematics still need to be fully utilized in particular disciplines. In this situation, cadets and students often need more motivation to study this science. Therefore, it is important to show examples of its application in military affairs at the beginning of the study of higher mathematics. An example of such an application is the mathematical modeling of combat operations. Problems of this type help create a learning environment that helps increase cadets' motivation to study these disciplines and deepen their professional knowledge. There is a significant base of tasks of this type. Still, with the development of modern military technologies and the development of mathematics, this base needs to be updated and rethought.

Materials and methods. The study used a stochastic approach to study combat models: introduction of the states of the corresponding system, construction of a graph of transitions from one state to another with an indication of intensities, and writing the corresponding system of Kolmogorov differential equations.

Results. A detailed description of the solution of an example of a stochastic model of "poorly organized combat" is given for teaching certain sections of applied mathematics and supplementing the traditional teaching methodology with this material to increase the motivation to study mathematical disciplines by cadets and students of military universities. In the proposed example, the states of the system are considered, a graph is constructed, intensities are written out during the transition from one state to another, a system of Kolmogorov's differential equations is written out, the method of solving this system and the solutions themselves are indicated, and the final formulas for calculating the mathematical expectations of the final number of combat units of each side and the probability of victory of each side are given.

Conclusions. The paper presents a detailed description of the application of the stochastic approach to the construction of combat models. This example demonstrates the step-by-step implementation of this approach. It can be used in teaching "Probability Theory," "Markov's processes," "Mathematical Modeling, and Optimization of Research," etc., in higher education institutions.

KEYWORDS: *discrete-state and continuous-time Markov process; the Kolmogorov differential equations; the intensity; effective rate of fire; combat unit.*

ВСТУП

Постановка проблеми. При викладанні вищої і прикладної математики в закладах вищої освіти, зокрема ВВНЗ, є важливим розв’язувати задачі професійної спрямованості. Задачі військово-прикладного характеру мають підготувати майбутніх офіцерів до кращого оволодіння майбутньою професією, до прийняття рішень у прогнозуванні результатів бою. Задачі професійного спрямування мотивують курсантів і слухачів до більш глибокого вивчення відповідної теми.

Аналіз актуальних досліджень. Автори Козлакова та Ковалюк (2009), Хом’юк (2004), Букатар та ін. (2009), Бондаренко (2004) пропонують вводити в курси вищої математики задачі прикладного характеру, важливі для обраних професій. В роботі (Хитряк та ін., 2016) пропонується розглянути моделі Ланчестера бойових дій в розділі “Диференціальні рівняння” дисципліни “Вища математика” ВВНЗ. Робота (Фурсенко & Черновол, 2020) пропонує запровадити моделі бойових дій з дисципліни “Вища математика” в розділі “Диференціальні рівняння” та з дисципліни “Прикладна математика” в розділах “Операційне числення” та “Теорія ймовірностей”. Дана робота продовжує дослідження в цьому напрямку, а саме розглядається приклад стохастичної моделі бойових дій для розгляду в курсі прикладної математики магістрантам ВВНЗ.

В останні роки дослідженню різних аспектів стохастичного моделювання бойових дій присвячені роботи Томаса (2000), Веса (2015), Кірні і Мартіна (2019). В роботі Чуєва (2011) запропонована система диференціальних рівнянь, що описує ‘’поганоорганізований бій” в загальному випадку, але пояснення, звідки коефіцієнти виписаної системи, як вона отримана і як розв’язується – відсутні. Дана робота на конкретному прикладі вносить ясність в цей матеріал. В інших роботах представлені різні модифікації стохастичних моделей бойових дій: ймовірнісна модель двосторонніх бойових дій, коли одна сторона притримується умов "високоорганізованого бою“, а інша –умов "поганоорганізованого бою“ (Чуєв, 2017), моделі бойових дій на морі з урахуванням видів зброї та спроможності захисту сторін (Армстронг, 2004, 2011, 2014)), для нерегулярних бойових дій (Кресс, 2020). Вищезазначені роботи не були присвячені викладенню методики побудови стохастичних моделей бойових дій, а представляють виклад результатів досліджень авторів. Необхідність сформувати у курсантів і слухачів вміння стохастичного моделювання бойових дій та, відповідно, відсутність такої методики в літературі зумовило мету статті.

Мета статті. Запропонувати детальний опис розв'язання прикладу стохастичної моделі "поганоорганізованого бою" для використання при викладанні окремих розділів прикладної математики і доповнення цим матеріалом традиційної методики викладання у вищих військових навчальних закладах з метою підвищення мотивації вивчення військовими магістрантами математичних дисциплін.

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Для виконання дослідження використано стохастичний підхід у дослідженні моделей бойових дій: введення станів відповідної системи, побудова графу переходів від одного стану до іншого з вказанням інтенсивностей, запис відповідної системи диференціальних рівнянь Колмогорова відносно станів системи.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Постановка задачі наступна. Відбувається бій між двома угрупуваннями: стороною 1 і стороною 2. Сторона 1 має в своєму складі N_1 однорідних одиниць, сторона 2 має N_2 однорідних одиниць, не обов' язково однорідних з бойовими одиницями сторони 1. Відомо, що α_1 і α_2 – ефективні скорострільності сторін 1 і 2, відповідно. Вважається, що одним пострілом можна знешкодити не більше, ніж одну бойову одиницю. Крім того, інформація про враження цілі відсутня і переніс вогню не відбувається. Завдяки останній умові цей бій в літературі називають "поганоорганізованим боєм". Потрібно з'ясувати ймовірність перемоги кожної сторони і яка кількість неушкоджених бойових одиниць залишиться в кінці бою у кожної зі сторін.

Метод розв'язання полягає в наступному. Позначимо $S_{i\,j}$ – стан системи, при якому у сторони 1 i неушкоджених одиниць, сторони 2 j неушкоджених одиниць. Вважається, що в системі $S=\{S_{i\,j}\}$ протікає марківський процес з дискретною множиною станів і неперервним часом. Позначимо $P_{i\,j}(t)$ – ймовірність того, що в момент часу t система S знаходиться в стані $S_{i\,j}$ $(i=0,1,...N_1,\ j=0,1,...N_2)$.

При описі побудови цієї моделі курсантам і магістрантам ВВНЗ для зручності розглянемо випадок $N_1=3,\ N_2=2$. Розглянемо наступний граф з вказанням інтенсивностей при переході від одного стану системи до іншого (рис. 1):

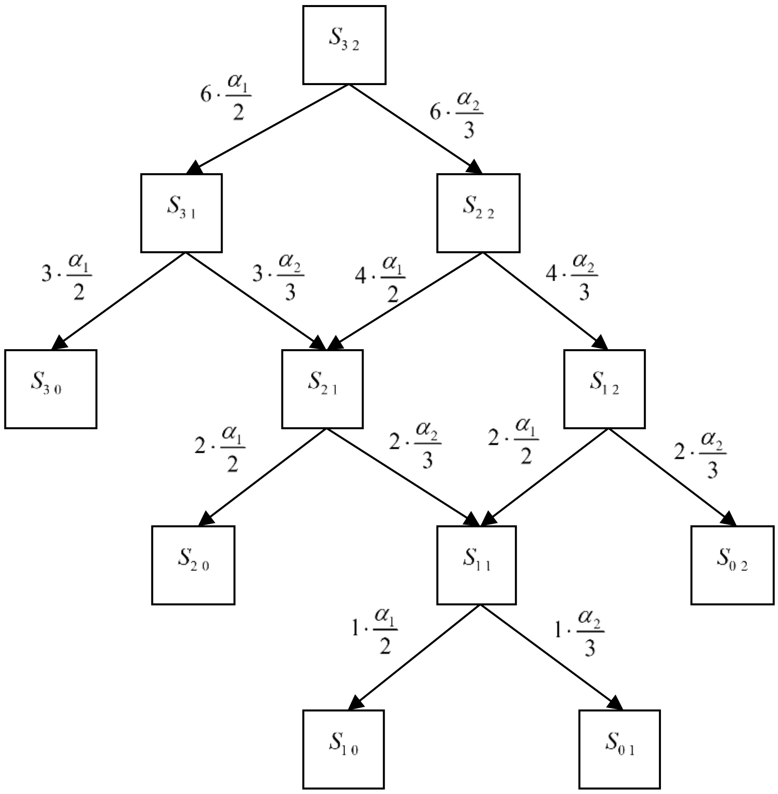

Рис. 1. Граф станів системи з указанням інтенсивностей

Джерело: авторська розробка.

Пояснимо, що першим станом системи є стан $S_{3\,2}$, при якому у сторони 1 три неушкоджені бойові одиниці, а у сторони 2 дві неушкоджені одиниці. Якщо знешкоджена одна бойова одиниця, то це наступний стан системи. Тобто наступними станами за станом $S_{3\,2}$ є стани $S_{3\,1}$ і $S_{2\,2}$. Важливими є величини $\frac{\alpha_1}{N_2}=\frac{\alpha_1}{2}$ і $\frac{\alpha_2}{N_1}=\frac{\alpha_2}{3}$ – частка успішних пострілів сторони 1 за одиницю часу, що приходиться на одну бойову одиницю сторони 2 і відповідно частка успішних пострілів сторони 2 за одиницю часу, що приходиться на одну бойову одиницю сторони 1. Пояснимо як виписуються інтенсивності при переході від стану до стану на двох прикладах. Оскільки бій є “поганоорганізованим”, тобто обстрілюються і вже вражені бойові одиниці, то при переході від стану S_{32} до стану S_{31} інтенсивність дорівнює добутку кількості пострілів сторони 1, тобто шість (кожна з трьох одиниць сторони 1 зробила постріл по кожній з двох бойових одиниць сторони 2), на частку успішних пострілів сторони 1 за одиницю часу, що приходиться на одну бойову одиницю сторони 2, тобто на $\frac{\alpha_1}{2}$. При переході від стану S_{32} до стану S_{22} інтенсивність дорівнює добутку кількості пострілів сторони 2, тобто шість (кожна з двох одиниць сторони 2 зробила постріл по кожній з трьох бойових одиниць сторони 1), на частку успішних пострілів сторони 2 за одиницю часу, що приходиться на одну бойову одиницю сторони 1, тобто на $\frac{\alpha_2}{3}$. Інші стани і інтенсивності виписуються аналогічно. Кінцевими станами системи є наступні: $S_{30}, S_{20}, S_{10}, S_{02}, S_{01}$, коли у однієї з сторін нуль неушкоджених бойових одиниць.

Далі, виходячи з вказаного графу (рис.1), виписуємо відповідну систему диференціальних рівнянь Колмогорова (правила створення рівнянь Колмогорова представлені у Кирій та Фастової (2014)).

Система розв’язується послідовно: спочатку перше рівняння, потім, підставивши розв’язок першого рівняння у друге, розв’язуємо друге рівняння і так далі (враховуючи початкові умови). Пояснимо, що перше рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, наступні п‘ять рівнянь є лінійними неоднорідними рівняннями першого порядку, які можна розв’язати, наприклад, методом Лагранжа. Останні п’ять рівнянь (зауважимо, що потрібно в них підставити раніше отримані розв’язки) розв’язуються інтегруванням лівої і правої частин рівняння (див. далі система (1)).

$$\begin{cases}
P'_{32}(t) = -\left(6\cdot\frac{\alpha_1}{2} + 6\cdot\frac{\alpha_2}{3}\right)P_{32}(t)\\
P'_{31}(t) = -\left(3\cdot\frac{\alpha_1}{2} + 3\cdot\frac{\alpha_2}{3}\right)P_{31}(t) + 6\cdot\frac{\alpha_1}{2}P_{32}(t)\\
P'_{22}(t) = -\left(4\cdot\frac{\alpha_1}{2} + 4\cdot\frac{\alpha_2}{3}\right)P_{22}(t) + 6\cdot\frac{\alpha_2}{3}P_{32}(t)\\
P'_{21}(t) = -\left(2\cdot\frac{\alpha_1}{2} + 2\cdot\frac{\alpha_2}{3}\right)P_{21}(t) + 3\cdot\frac{\alpha_2}{3}P_{31}(t) + 4\cdot\frac{\alpha_1}{2}P_{22}(t)\\
P'_{12}(t) = -\left(2\cdot\frac{\alpha_1}{2} + 2\cdot\frac{\alpha_2}{3}\right)P_{12}(t) + 4\cdot\frac{\alpha_2}{3}P_{22}(t)\\
P'_{11}(t) = -\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{3}\right)P_{11}(t) + 2\cdot\frac{\alpha_2}{3}P_{21}(t) + 2\cdot\frac{\alpha_1}{2}P_{12}(t)\\
P'_{30}(t) = 3\cdot\frac{\alpha_1}{2}P_{31}(t)\\
P'_{20}(t) = 2\cdot\frac{\alpha_1}{2}P_{21}(t)\\
P'_{10}(t) = \frac{\alpha_1}{2}P_{11}(t)\\
P'_{02}(t) = 2\cdot\frac{\alpha_2}{3}P_{12}(t)\\
P'_{01}(t) = \frac{\alpha_2}{3}P_{11}(t).
\end{cases} \tag{1}$$

Початкові умови:

$$P_{32}(0)=1,\ P_{ij}(0)=0 \text{ при } i+j<5. \tag{2}$$

В результаті розв’язання системи (1) з початковими умовами (2) отримано наступний розв’язок :

$$P_{32}(t) = e^{-(2\alpha_2+3\alpha_1)t}, \qquad P_{31}(t) = \frac{6\alpha_1}{2\alpha_2+3\alpha_1}\left(e^{-\frac{1}{2}(2\alpha_2+3\alpha_1)t} - e^{-(2\alpha_2+3\alpha_1)t}\right),$$

$$P_{22}(t) = \frac{6\alpha_2}{2\alpha_2+3\alpha_1}\left(e^{-(2\alpha_2+3\alpha_1)t} - e^{-(2\alpha_2+3\alpha_1)t}\right),$$

$$P_{12}(t) = \frac{12\alpha_2^2}{(2\alpha_2+3\alpha_1)^2}\left(e^{-\frac{1}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t} - 2e^{-\frac{2}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t} + e^{-(2\alpha_2+3\alpha_1)t}\right),$$

$$P_{21}(t) = \frac{3\alpha_1\alpha_2}{(2\alpha_2+3\alpha_1)^2}\left(5e^{-\frac{1}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t} + 9e^{-(2\alpha_2+3\alpha_1)t} - 12e^{-\frac{1}{2}(2\alpha_2+3\alpha_1)t} - 12e^{-\frac{2}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}\right),$$

$$P_{11}(t) = \frac{12\alpha_1\alpha_2^2}{(2\alpha_2+3\alpha_1)^3}\left(-21e^{-\frac{1}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t} - 3e^{-(2\alpha_2+3\alpha_1)t} + 6e^{-\frac{1}{2}(2\alpha_2+3\alpha_1)t} + 8e^{-\frac{2}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t} + 10e^{-\frac{1}{6}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}\right),$$

$$P_{30}(t) = \frac{9\alpha_1^2}{(2\alpha_2+3\alpha_1)^2}\left(-e^{-\frac{1}{2}(2\alpha_2+3\alpha_1)t} - e^{-(2\alpha_2+3\alpha_1)t} + 1\right),$$

$$P_{2\,0}(t)=\frac{9\alpha_2^2\alpha_2}{(2\alpha_2+3\alpha_1)^3}\left(-15e^{-\frac{1}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}-3e^{-(2\alpha_2+3\alpha_1)t}+8e^{-\frac{1}{2}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}+6e^{-\frac{2}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}+4\right),$$

$$P_{1\,0}(t)=\frac{18\alpha_1^2\alpha_2^2}{(2\alpha_2+3\alpha_1)^4}\left(21e^{-\frac{1}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}+e^{-(2\alpha_2+3\alpha_1)t}-4e^{-\frac{1}{2}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}-4e^{-\frac{2}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}-20e^{-\frac{1}{6}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}+6\right),$$

$$P_{0\,2}(t)=\frac{8\alpha_2^3}{(2\alpha_2+3\alpha_1)^3}\left(-3e^{-\frac{1}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}+3e^{-\frac{2}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}-e^{-(2\alpha_2+3\alpha_1)t}+1\right),$$

$$P_{0\,1}(t)=\frac{12\alpha_1\alpha_2^3}{(2\alpha_2+3\alpha_1)^4}\left(21e^{-\frac{1}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}+e^{-(2\alpha_2+3\alpha_1)t}-4e^{-\frac{1}{2}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}-4e^{-\frac{2}{3}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}-20e^{-\frac{1}{6}(2\alpha_2+3\alpha_1)t}+6\right),$$

Якщо розглянути границі рівностей для $P_{3\,0}(t),\,P_{2\,0}(t),\,P_{1\,0}(t),\,P_{0\,2}(t),\,P_{0\,1}(t)$ при $t\to+\infty,$ то отримаємо граничні значення відповідних ймовірностей станів, а саме:

$$P_{3\,0}(\infty)=\frac{9\alpha_1^2}{(2\alpha_2+3\alpha_1)^2}\,,\;P_{2\,0}(\infty)=\frac{36\alpha_1^2\alpha_2}{(2\alpha_2+3\alpha_1)^3}\,,\;P_{1\,0}(\infty)=\frac{108\alpha_1^2\alpha_2^2}{(2\alpha_2+3\alpha_1)^4}\,,$$

$$P_{0\,2}(\infty)=\frac{8\alpha_2^3}{(2\alpha_2+3\alpha_1)^3}\,,\;P_{0\,1}(\infty)=\frac{72\alpha_1\alpha_2^3}{(2\alpha_2+3\alpha_1)^4}\,.$$

Важливими характеристиками бою є математичні сподівання відносної кількості бойових одиниць, що збереглися неушкодженими:

$$M_1=\sum_{i=1}^{3}iP_{i\,0}(\infty),\qquad M_2=\sum_{j=1}^{2}jP_{0\,j}(\infty)$$

та ймовірності перемоги сторін 1, 2 відповідно:

$$P_1=\sum_{i=1}^{3}P_{i\,0}(\infty),\quad P_2=\sum_{j=1}^{2}P_{0\,j}(\infty).$$

Наприклад, розглянемо результати бою для $\alpha_1=0{,}1,\;\alpha_2=0{,}2\;\left(\frac{\text{постр}}{\text{хвилину}}\right)$:

$$P_{3\,0}(\infty)\approx0{,}18,\;P_{2\,0}(\infty)\approx0{,}21,\;P_{1\,0}(\infty)\approx0{,}18,\;P_{0\,2}(\infty)\approx0{,}19,\;P_{0\,1}(\infty)\approx0{,}24,$$

$$M_1\approx1{,}14,\;M_2\approx0{,}62,\;P_1\approx0{,}57,\;P_2\approx0{,}43.$$

Отже, бій закінчиться майже розгромом обох сторін з незначною перевагою сторони 1 (у сторони 1 залишиться одна неушкоджена бойова одиниця).

Розглянемо результати бою для $\alpha_1=0{,}8,\;\alpha_2=0{,}1\;\left(\frac{\text{постр}}{\text{хвилину}}\right)$:

$$P_{3\,0}(\infty)\approx0{,}852,\;P_{2\,0}(\infty)\approx0{,}131,\;P_{1\,0}(\infty)\approx0{,}015,\;P_{0\,2}(\infty)\approx0{,}0005,\;P_{0\,1}(\infty)\approx0{,}0013,$$

$$M_1\approx2{,}835,\;M_2\approx0{,}002,\;P_1\approx0{,}998,\;P_2\approx0{,}002.$$

Отже, ймовірність перемоги сторони 1 достатньо висока (0,998). В результаті бою у сторони 1 залишаться неушкодженими дві бойові одиниці.

ОБГОВОРЕННЯ

Зазначимо, що для викладання магістрантам вказаної моделі доцільно розглядати малу початкову кількість бойових ресурсів обох сторін (в роботі $N_1=3,\;N_2=2$) тому, що при збільшенні кількості бойових одиниць зростає кількість станів в графі і тим самим кількість диференціальних рівнянь в системі, що описують дану модель. Але головна мета викладання цього матеріалу, навчити курсантів і слухачів ВВНЗ виписувати стани системи, будувати граф з указанням інтенсивностей і по графу виписувати систему диференціальних рівнянь Колмогорова. Розв’язання систем не є приорітетним в цьому, оскільки методи розв’язання рівнянь системи розглядаються на молодших курсах. Тому можна розв’язати з аудиторією, наприклад, два перші рівняння системи і далі виписати остаточні ймовірності кінцевих станів системи і по ним робити висновки щодо результатів бою.

ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Достатньо детальний опис ймовірнісного розв’язання задачі дозволяє застосувати загальну схему розв’язання і для інших моделей бойових дій. Покрокове розв’язання може бути застосоване викладачами при викладанні дисциплін “Теорія ймовірностей та математична статистика”, “Випадкові процеси”, “Прикладна математика” та “Математичне моделювання та оптимізація досліджень” в ВВНЗ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бондаренко, З.В. (2004). Якісний аналіз розв’язків систем диференціальних рівнянь як засіб формування деяких компонентів професійної культури студентів. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*, 1, 115-120.
2. Букатар, М.І., Дрінь, І.І., & Лавренчук, В.П. (2009). З досвіду викладання вищої математики для студентів економічних спеціальностей. *Методологія викладання математичних дисциплін для нематематичних спеціальностей у сучасних умовах: тези доповідей Всеукраїнської науково-методичної конференції. 16-18 грудня 2009 р.* (с. 39-41). СумДУ.
3. Кирій, В.В., & Фастова, Н.І. (2014) *Прикладні задачі моделювання економічних процесів*. ХНУРЕ.

4. Козлакова, Г.О., & Ковалюк, Т.В. (2009). Науково-методична підтримка розвитку вищої природничо-математичної освіти в технічних університетах. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики: тези доповідей Всеукраїнської науково-методичної конференції. 3-14 грудня 2009 р.* (с. 208). СумДу.
5. Фурсенко, О.К., & Черновол, Н.М. (2020). Ланчестеровські моделі бойових дій. *Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил*, 4 (66), 85-91. https://doi.org/10.30748/zhups.2020.66.12
6. Хитряк, О., Сорокатий, М., & Петрученко, О. (2016) Деякі застосування диференціальних рівнянь в військовій справі. *Збірник наукових праць Національної академії державної прикордонної служби України, серія: військові та технічні науки*, 1(67), 319-330.
7. Хом'юк, І.В. (2004). Про формування професійної спрямованості студентів технічних ВНЗ у процесі вивчення теорії ймовірностей. *Вісник Вінницького політехнічного університету*, 3, 85-89.
8. Чуев, В.Ю. (2011). Вероятностная модель боя многочисленных группировок. *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана,* сер. «Естественные науки», 223-232.
9. Чуев, В.Ю., Дубограй, И.В., & Дьякова, Л.Н. (2017). "Смешанные" вероятностные модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок. *Математическое моделирование и численные методы*, 1, 91-101. https://doi 10.18698/2309-3684-2017-1-91101.
10. Armstrong, M.J. (2004). *A Stochastic Salvo Model For Naval Surface Combat*. Sprott School of Business, Carleton University.
11. Armstrong, M.J. (2011). A verification study of the stochastic salvo combat model. *Annals of Operations Research*, 186(1), 23-38.
12. Armstrong, M.J. (2014). The salvo combat model with a sequential exchange of fire *The Journal of the Operational Research Society*, 65(10), 1593-1601.
13. Kearney, M. J., & Martin, R. J. (2019) *On a stochastic version of Lanchester's model of combat*. Department of Mathematics, Imperial College London.
14. Kress, M. (2020). *Lanchester Models for Irregular Warfare*. Operations Research Department, Naval Postgraduate School, Monterey.
15. Thomas, W.L. (2000). The Stochastic Versus Deterministic Argument for Combat Simulations: Tales of When the Average Won't Do. *Military Operations Research, 5(3),* 9-28.
16. Vesa, K. (2015). A Combat Equation Derived from Stochastic Modeling of Attrition Data. *Military Operations Research, 20(3),* 49-69.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Bondarenko, Z.V. (2004). Jakisnyj analiz rozv'jazkiv system dyferencialjnykh rivnjanj jak zasib formuvannja dejakykh komponentiv profesijnoji kuljtury studentiv. [Qualitative analysis of solutions of systems of differential equations for the formulation of the actual components in the professional culture of students]. *Visnyk Vinnytskoho politekhnichnoho instytutu – Herald of the Vinnytsia Polytechnic Institute*, 1, 115-120. (*in Ukrainian).*
2. Bukatar, M.I., Drin, I. I., & Lavrenchuk, V.P. (2009). Z dosvidu vykladannja vyshhoji matematyky dlja studentiv ekonomichnykh specialjnostej [Practice of studying higher mathematics for students of economics specialties]. *Metodolohiia vykladannia matematychnykh dystsyplin dlia nematematychnykh spetsialnostei u suchasnykh umovakh – Methodology for the study of mathematical disciplines for non-mathematical specialties among the savage minds*, December 16-18. (pp. 39-41). SumDu. (*in Ukrainian).*
3. Kyriy, V.V., & Fastova, N.I. (2014). *Prykladni zadachi modelyuvannya ekonomichnykh protsesiv [Applied problems of modeling economic processes]*. KHNURE. (in Ukrainian).
4. Kozlakova, G.O., & Kovalyuk, T.V. (2009). Naukovo-metodychna pidtrymka rozvytku vyshhoji pryrodnycho-matematychnoji osvity v tekhnichnykh universytetakh [Scientific and methodological support for the development of higher natural and mathematical education in technical universities]. *Metodolohiia vykladannia matematychnykh dystsyplin dlia nematematychnykh spetsialnostei u suchasnykh umovakh – Methodology for the study of mathematical disciplines for non-mathematical specialties among the savage minds*, December 3-14. (p. 208). SumDu. (in Ukrainian).
5. Fursenko, O.K., & Chernovol, N.M. (2020). Lanchesterovsjki modeli boevyih deystviy [Lanchester models of combat operations]. *Zbirnyk naukovykh prats Kharkivskoho natsionalnoho universytetu Povitrianykh Syl – Collection of Science Practitioners Kharkiv National Air Force University*, 4(66), 85-91. https://doi.org/10.30748/zhups.2020.66.12. (in Ukrainian).
6. Khitryak, O., Sorokatiy, M., & Petruchenko, O. (2016). Dejaki zastosuvannja dyferencialjnykh rivnjanj v vijsjkovij spravi [Certain implementation of differential equations in military field]. *Zbirnyk naukovykh prats Natsionalnoi akademii derzhavnoi prykordonnoi sluzhby Ukrainy, seriia: viiskovi ta tekhnichni nauky – Book of Science Works of the National Academy of State Bridging Service of Ukraine, Serie: in science and technology*, 1 (67), 319-330. (in Ukrainian).
7. Hom'yuk, I.V. (2004). Pro formuvannja profesijnoji sprjamovanosti studentiv tekhnichnykh VNZ u procesi vyvchennja teoriji jmovirnostej [Formation of professional skills of students in technical higher education institutions during educational process of the probability theory]. *Newsletter of the Vinnytsia Polytechnic University*, No. 3, pp. 85-89. (in Ukrainian).
8. Chuev, V.Yu. (2011). Veroyatnostnaya model boya mnogochislennyih gruppirovok [Probabilistic model of battle of numerous groups]. *MGTU im. N. E. Baumana, ser. «Yestestvennyye nauki» – MSTU im. N. E. Bauman, ser. "Natural Sciences"*, 223-232. (in Russian).
9. Chuev, V.Yu., Dubograi, I.V., & Dyakova, L.N. (2017), "Smeshannyie" veroyatnostnyie modeli dvustoronnih boevyih deystviy mnogochislennyih gruppirovok" ["Mixed" probabilistic models of bilateral military operations of numerous groups], *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye metody – Mathematical modeling and numerical methods*, 1, 91-101. https://doi 10.18698/2309-3684-2017-1-91101 (in Russian).
10. Armstrong, M.J. (2004). *A Stochastic Salvo Model For Naval Surface Combat*. Sprott School of Business, Carleton University.
11. Armstrong, M.J. (2011). A verification study of the stochastic salvo combat model. *Annals of Operations Research*, 186(1), 23-38.
12. Armstrong, M.J. (2014). The salvo combat model with a sequential exchange of fire *The Journal of the Operational Research Society*, 65(10), 1593-1601.
13. Kearney, M. J., & Martin, R. J. (2019) *On a stochastic version of Lanchester's model of combat*. Department of Mathematics, Imperial College London.
14. Kress, M. (2020). *Lanchester Models for Irregular Warfare*. Operations Research Department, Naval Postgraduate School, Monterey.
15. Thomas, W.L. (2000). The Stochastic Versus Deterministic Argument for Combat Simulations: Tales of When the Average Won't Do. *Military Operations Research, 5(3),* 9-28.
16. Vesa, K. (2015). A Combat Equation Derived from Stochastic Modeling of Attrition Data. *Military Operations Research, 20(3),* 49-69.

Матеріал надійшов до редакції 01.12.2023р.