УДК 622.62-83:621.33.21

Е.И. Хованская, канд. техн. наук; Н.М. Полишко.
(Украина, Днепропетровск, Государственное ВУЗ "Национальный горный университет")

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОГО РЕЖИМА ТЯГОВОЙ СЕТИ ШАХТНОГО ТРАНСПОРТА ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ ЭЛЕКТРОВОЗАМИ

Современное состояние угольных шахт Украины характеризуется наличием целого ряда факторов, негативно сказывающихся на безопасности их эксплуатации. В частности, упомянутые причины проявляются и в функционировании шахтного рельсового транспорта. Поэтому повышение безопасности электровозной откатки является актуальной задачей. Перспективным в этом отношении видится применение бесконтактных электровозов повышенной частоты, особенно на грузонапряженных направлениях, поскольку позволяет повысить безопасность транспортировки благодаря безыскровому токосъему.

Постановка проблемы. Одним из основных элементов рассматриваемого транспорта, обеспечивающим направленную передачу энергии электровозу, является тяговая сеть, параметры режимов которой должны соответствовать требованиям области применения. Разные способы моделирования режимов сети дают результаты, характерные для частных случаев, однако важным остается выбор способа моделирования, который смог бы учесть главные особенности нагруженного режима [1].

Анализ результатов последних исследований. В работах [2-4] рассмотрены основные задачи моделирования режимов работы транспорта с индуктивной передачей энергии и показаны. различные подходы к их решению. Исследование нагруженного режима тяговой сети является непростой задачей в силу особенностей работы транспорта, что обусловлено сложностью математического описания нестационарной нагрузки, включенной на работающую в квазиустановившемся режиме линию [3,4].

Цель и задачи исследований. В данной статье ставится задача обоснования способа моделирования нагруженной тяговой сети.

Изложение основного материала. Рассмотрим модель, полученную на основе описания процессов, происходящих в тяговой сети, в виде классической системы «телеграфных уравнений», дополненной элементами, которые учитывают особенности объекта [2,4]:

$$\begin{cases} -\partial u / \partial x = L_0 \cdot \partial i / \partial t + R_0 \cdot i + F_1(x,t); \\ -\partial i / \partial x = C_0 \cdot \partial u / \partial t, \end{cases} \qquad (1)$$

где $F_1(x,t)$ – функция, которая отражает для каждого сечения тяговой сети особенности в виде включенных неоднородностей; L_0, C_0, R_0 – первичные распределенные параметры линии.

Преобразование путем разделения переменных системы уравнений (1) приводит её к дифференциальным уравнениям в частных производных 2-го порядка относительно напряжения или тока, которые относятся к гиперболическому типу и решаются численными методами, причем выбор метода напрямую зависит от вида функции $F_1(x,t)$.

В работах [2, 3] зависимость $F_1(x,t)$ представлена с использованием обобщенной функции $\delta(x-x_k)$. Это позволило описать процессы, происходящие в тяговой сети, имеющей сосредоточенные неоднородности в виде последовательно включенных конденсаторов продольной компенсации. Решение получено методом прогонки, который обладает устойчивостью при наличии разрывных коэффициентов, а также дает погрешность в допустимых пределах при заданной постановке задачи. Однако описанное решение справедливо лишь для ненагруженной тяговой сети, т.е. позволяет рассматривать процессы только при пуске тягового преобразователя частоты и холостом ходе линии. Появление нагрузки в виде вносимого от электровоза сопротивления обусловливает введение новой функции $F_2(x,t)$, которая описывает процессы в нагруженной тяговой сети. В работе [3] показано, что такая функция может быть сформирована с помощью разрывного коэффициента $\delta(x-x_{вн})$, аналогичного тому, который учитывает в [2, 3] влияние конденсаторов продольной компенсации. Однако использование такой модели при рассмотрении электровоза в различных точках маршрута показало, что с удалением от тяговой подстанции погрешность расчета увеличивается до недопустимых значений. Последнее очевидно обусловлено громоздкостью описания включенных в тяговую сеть неоднородностей в виде двух разрывных функций $F_1(x,t)$ и $F_2(x,t)$. Наличие двух разрывных функций усложняет алгоритм получения решения и снижает его точность.

Представим модель тяговой сети в несколько измененном по сравнению с [4] виде

$$\begin{cases} -\partial u / \partial x = L_0 \cdot \partial i / \partial t + R_0 \cdot i + F(x,t); \\ -\partial i / \partial x = C_0 \cdot \partial u / \partial t, \end{cases} \tag{2}$$

где $F(x,t)$ – функция, которая отражает для каждого сечения тяговой сети включенные неоднородности (конденсаторы продольной емкостной компенсации и вносимые электровозами сопротивления). После тождественных преобразований получим следующую систему уравнений для напряжения и тока тяговой сети:

$$\begin{cases} \partial^2 u / \partial x^2 = L_0 \cdot C_0 \cdot \partial^2 u / \partial t^2 + R_0 \cdot C_0 \cdot \partial u / \partial t - F'(x,t); \\ \partial^2 i / \partial x^2 = L_0 \cdot C_0 \cdot \partial^2 i / \partial t^2 + R_0 \cdot C_0 \cdot \partial i / \partial t + F'(x,t). \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим представление в модели [2] продольной емкостной компенсации в виде

$$\sum_{k=1}^{m} u_k \cdot \delta(x-x_k), \tag{4}$$

где u_k – мгновенное значение падения напряжения на конденсаторе продольной компенсации; k – номер компенсирующего конденсатора; m – число компенсирующих конденсаторов до рассматриваемого сечения; x_k – координата компенсирующего конденсатора; $\delta(x\text{-}x_k)$ – дельта-функция.

Как известно, дельта-функция описывается выражением

$$\delta(x-x_k) = \begin{cases} 0 & x < x_k; \\ 1 & x = x_k; \\ 0 & x > x_k. \end{cases}$$

Описание в модели [2] вносимых электровозом сопротивлений также осуществляется посредством введения дельта-функции, т. е.

$$\sum_{1}^{N_e} z_{ВН} \cdot i_{ВН} \cdot \delta(x - x_{ВН}), \tag{5}$$

где: $i_{ВН}$ – мгновенное значение тока в сечении тяговой сети, соответствующего местонахождению электровоза; $x_{ВН}$ – координата соответствующего сечения; $z_{ВН}$ – значение вносимого электровозом сопротивления; N_e – число электровозов.

Выражение $z_{ВН} \cdot i_{ВН}$ в формуле (5) представляет собой падение напряжения в тяговой сети в точке включения вносимого электровозом сопротивления, т. е. в месте появления неоднородности. В формуле (4) величина u_k тоже является падением напряжения на неоднородности (на конденсаторе продольной компенсации). Отсюда можно принять допущение, что в модели нагруженной тяговой сети неоднородности разного характера могут быть описаны одной и той же обобщенной функцией, т. е. функция $F(x,t)$ должна адекватно отображать изменение параметра режима сети независимо от вида включенной неоднородности. Запишем функцию $F(x,t)$ в уравнениях (2,3) как

$$F(x,t) = \sum_{k=1}^{m} u_{НОk} \cdot \delta(x - x_{НОk}), \tag{6}$$

где $u_{НОk}$ – мгновенное значение падения напряжения на неоднородности; $x_{НОk}$ – координата соответствующего сечения тяговой сети.

Тогда система уравнений, моделирующая тяговую сеть, с учетом (6), запишется так

$$\begin{cases} -\partial u / \partial x = L_0 \cdot \partial i / \partial t + R_0 \cdot i + \sum_{k=1}^{m} u_{НОk} \cdot \delta(x - x_{НОk}); \\ -\partial i / \partial x = C_0 \cdot \partial u / \partial t. \end{cases} \tag{7}$$

Для решения системы уравнений (7) возможно применение такого же способа, как и для системы (1). После тождественных преобразований получается дифференциальное уравнение в частных производных для напряжения

$$\partial^2 u / \partial x^2 = L_0 \cdot C_0 \cdot \partial^2 u / \partial t^2 + R_0 \cdot C_0 \cdot \partial u / \partial t - \left(\sum_{k=1}^{m} u_{НОk} \cdot \delta(x - x_{НОk})\right)' \tag{8}$$

и соответственно – для тока.

Представим уравнение (8) в конечно-разностном виде

$$\Lambda u_{xx} = L_0 \cdot C_0 \cdot u_{tt} + R_0 \cdot C_0 \cdot u_t - \sum_{k=1}^{m} u_{НОk} \cdot \tilde{\tilde{\delta}}'(x - x_{НОk}), \tag{9}$$

где Λ – разностный оператор; u_{xx} – разностная аппроксимация 2-й производной по переменной *x*; u_{tt} – разностная аппроксимация 2-й производной по переменной *t*; u_t – центральная конечная разность по переменной *t*; $u_{НОk}$ – напряжение в точке включения неоднородности в момент времени *t*; $\tilde{\tilde{\delta}}'$ – разностная аппроксимация 1-й производной δ-функции.

Согласно [5] импульсные обобщенные функции, в частности δ-функция, могут быть аппроксимированы конечно-разностными функциями. Обычно δ-функция аппроксимируется центральной конечной разностью:

$$\tilde{\tilde{\delta}} = \big(1(x+h) - 1(x-h)\big) / 2 / h \qquad h \to 0,$$

где $1(x+h)$ и $1(x-h)$ – единичные ступенчатые функции.

Тогда в нашем случае можно записать, что

$$\tilde{\tilde{\delta}}\left(x-x_{HOk}\right)=\left(1\left(x-\tilde{o}_{HOk}+h\right)-1\left(x-\tilde{o}_{HOk}-h\right)\right)/2/h,$$

где

$$1\left(x-x_{HOk}+h\right)=\begin{cases}0 & x<x_{HOk}-h,\\ 1 & x>x_{HOk}-h;\end{cases}$$

$$1\left(x-x_{HOk}-h\right)=\begin{cases}0 & x<x_{HOk}+h,\\ 1 & x>x_{HOk}+h.\end{cases}$$

Первая производная δ-функции также аппроксимируется конечно-разностным выражением вида

$$\tilde{\tilde{\delta}}'\left(x-x_{HOk}\right)=\left(1\left(x-\tilde{o}_{HOk}+h\right)-2\cdot 1\left(x-\tilde{o}_{HOk}\right)+1\left(x-\tilde{o}_{HOk}-h\right)\right)/h^2,$$

где

$$1\left(x-x_{HOk}\right)=\begin{cases}0 & x<x_{HOk};\\ 1 & x>x_{HOk}.\end{cases}$$

Для записи уравнения (9) в конечных разностях воспользуемся шаблоном на сетке $\omega_{h\tau}$ с шагами h по переменной x и τ по переменной t. При решении разностных задач для уравнений гиперболического типа разностный оператор $\Lambda \dot{u}_{\bar{x}x}$ может быть представлен так называемой схемой с весами [5,6]:

$$\Lambda u_{xx}=\Lambda\left(\sigma\cdot\hat{u}+\left(1-2\cdot\sigma\right)\cdot u+\sigma\cdot\check{u}\right), \tag{10}$$

где $\hat{u}=u_{k+1}$; $\check{u}=u_{k-1}$; $u=u_k$ – значения напряжения на (k+1), (k-1) и k-м временных слоях соответственно.

Для обеспечения устойчивости разностной схемы необходимо выполнить условие σ > 0 [6]. При подстановке в выражение (10) значения σ = 1/2 получается:

$$\Lambda u_{xx}=\Lambda\left(\hat{u}/2+\check{u}/2\right). \tag{11}$$

Из теории разностных схем [6] известно, что погрешность аппроксимации разностной схемы (10) при любом значении σ (σ не зависит от τ и h) пропорциональна величине $O(\tau^2+h^2)$.

Разностный оператор Λu_{xx} с учетом (11) запишется так:

$$\Lambda u_{xx}=\left(u_{i-1,k+1}-2\cdot u_{i,k+1}+u_{i+1,k+1}+u_{i-1,k-1}-2\cdot u_{i,k-1}+u_{i+1,k-1}\right)/\left(2\cdot h^2\right), \tag{12}$$

где i, k – текущие координаты узлов сетки $\omega_{h\tau}$.

Правая часть уравнения (9) в конечных разностях аппроксимируется:

$$\begin{aligned}&L_0\cdot C_0\cdot u_{tt}+R_0\cdot C_0\cdot u_t-\sum_{k=1}^{m}\tilde{\tilde{\delta}}'\left(x-x_{HOk}\right)\cdot u_{HOk}\sim\\ &\sim\left(u_{i,k-1}-2\cdot u_{i,k}+u_{i,k+1}\right)/\tau^2+R_0\cdot C_0\cdot\left(u_{i,k+1}-u_{i,k-1}\right)/2/\tau-\\ &-\sum_{k=1}^{m}\left(1\left(x-x_{HOk}+h\right)-2\cdot 1\left(x-x_{HOk}\right)+1\left(x-x_{HOk}-h\right)\right)\cdot u_{i,k}/h^2.\end{aligned} \tag{13}$$

Тогда уравнение (9) с учетом (12,13) примет следующий вид:

$$\left(u_{i-1,k+1}-2\cdot u_{i,k+1}+u_{i+1,k+1}\right)/2/h^2+\left(u_{i-1,k-1}-2\cdot u_{i,k-1}+u_{i+1,k-1}\right)/2/h^2+$$

$$+2\sum_{k=1}^{m}\Big(1\big(x-x_{HOk}+h\big)-2\cdot 1\big(x-x_{HOk}\big)+1\big(x-x_{HOk}-h\big)\cdot u_{i,k}\Big)/2/h^2 = \tag{14}$$
$$=2\cdot L_0\cdot C_0\cdot\big(u_{i,k-1}-2\cdot u_{i,k}+u_{i,k+1}\big)/2/\tau^2+\tau\cdot R_0\cdot C_0\cdot\big(u_{i,k+1}-u_{i,k-1}\big)/2/\tau^2 .$$

После тождественных преобразований из (14) получаем уравнение вида

$$a_0^2\cdot\big(u_{i-1,k-1}+u_{i+1,k-1}\big)-a_1\cdot u_{i,k-1}+a_3\cdot u_{i,k}+a_4=a_2\cdot u_{i,k+1}-a_0^2\cdot\big(u_{i-1,k+1}+u_{i+1,k+1}\big), \tag{15}$$

где:

$$a_0=\frac{\tau^2}{h^2};$$
$$a_1=2\cdot\gamma^2-\tau\cdot R_0\cdot C_0+2\cdot L_0\cdot C_0;$$
$$a_2=2\cdot\gamma^2+\tau\cdot R_0\cdot C_0+2\cdot L_0\cdot C_0;$$
$$a_3=4\cdot L_0\cdot C_0;$$
$$a_4=2\cdot\gamma^2\cdot\sum_{k=1}^{m}\Big(1\big(x-x_{HOk}+h\big)-2\cdot 1\big(x-x_{HOk}\big)+1\big(x-x_{HOk}-h\big)\Big)\cdot u_{i,k} .$$

В уравнении (15) в левой части содержатся члены, имеющие индексы (k-1) и (k), а в правой части – (k+1). Таким образом, значения напряжений на каждом временном слое зависят от значений напряжения на двух предыдущих слоях, т. е. имеется неявная трёхслойная разностная схема. Если обозначить левую часть уравнения (15) через некоторую функцию $R_{k,i}$, то разностная задача запишется так:

$$a_0^2\cdot\big(u_{i-1,k+1}+u_{i+1,k+1}\big)-a_2\cdot u_{i,k+1}=-R_{k,i};$$
$$R_{k,i}=a_0^2\cdot\big(u_{i-1,k-1}+u_{i+1,k-1}\big)-a_1\cdot u_{i,k-1}+a_3\cdot u_{i,k}+a_4 .$$

Решение подобной задачи, как указывалось выше, удобно получить с помощью метода прогонки, как это осуществлялось ранее [2] при моделировании пускового режима тяговой сети. Тем не менее реализация модели представляет определенную сложность, обусловленную необходимостью вычисления на каждом шаге по переменной x значений разрывных коэффициентов, которые зависят не только от координаты по расстоянию, но и от вида находящейся в данной точке неоднородности.

Выводы. При моделировании нагруженного режима тяговой сети, неоднородности в виде емкостной продольной компенсации и вводимого электровозами сопротивления могут быть описаны единой обобщенной функцией.

Для реализации такой модели необходимо построить алгоритм вычисления разрывных коэффициентов, который позволит одновременно учесть влияние разных однородностей.

Список литературы

1. Транспорт с индуктивной передачей энергии для угольных шахт / Г.Г. Пивняк, И.П. Ремизов, С.А. Саратикянц и др.; под ред. Г.Г. Пивняка. –М.: Недра. –1990. – 245 с.
2. Г.Г. Пивняк. Задачи моделирования режимов работы тяговой сети транспорта с индуктивной передачей энергии / Г.Г. Пивняк, Ю.М. Зражевский, Е.И. Хованская // Технічна електродинаміка. Тематичний вип. "Проблеми сучасної електротехніки". – 2004. – Ч. 7. – С. 112–116.
3. Ю.М. Зражевский. Особенности моделирования режимов работы тяговой сети транспорта с индуктивной передачей энергии / Ю.М. Зражевский, Е.И. Хованская, А.В. Бобров. // Электротехника и электроэнергетика. – 2001. – №2. – С.66–68.
4. Ю.М. Зражевский. К вопросу о расчете параметров режимов тяговой сети транспорта с индукционной передачей энергии./ Ю.М. Зражевский, Е.И. Хованская, В.В. Винокуров // Гірнича електромех. та автомат.: наук.-техн. зб. – 2011. – Вип. 87.- С.8-11.
5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Корн Г., Корн Т. –М.: Наука, 1994. -832 с.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука. -1993. -616 с.

Рекомендовано до друку проф. Випанасенко С.І.