УДК 550.834

# Представление потенциалов от точечных источников для однородной изотропной среды в виде интегралов Бесселя—Меллина


**© *Ю. В. Роганов*[1], *Р. М. Пак*[2], *2013***

[1]Украинский государственный геологоразведочный институт, Киев, Украина
[2]Карпатское отделение Института геофизики НАН Украины, Львов, Украина



Поступила 14 мая 2012 г.

*Представлено членом редколлегии Ю. К. Тяпкиным*



Запропоновано метод виведення формул для зображення потенціалів хвильових полів різних типів у вигляді інтегралів Бесселя—Меліна. Потенціали, що розглядаються, сформовано точковими джерелами типу сили або моменту сил в однорідному ізотропному необмеженому середовищі.

A method for derivation of formulas for representation of potentials of wave fields of different types as integrals Bessel—Mellin is offered. Considered potentials are formed by point sources of type of force or the moment of forces in homogeneous isotropic unbounded medium.


**Введение.** В теории распространения упругих волн потенциалы используются для расщепления векторных дифференциальных уравнений на скалярные, которые решить значительно проще исходных. После определения потенциалов, функция Грина для исходного уравнения восстанавливается вычислением градиента и ротора. Потенциалы удобно применять в методе Хаскелла—Томсона [Hasskell, 1953] для моделирования волновых полей, однако в этом случае они должны быть представлены в области волновых чисел. Непосредственное преобразование формул Стокса для потенциалов [Аки, Ричардс, 1983] в спектральную область вызывает затруднения, обусловленные наличием изменяющихся в пространстве областей интегрирования. В связи с этим в работе [Пак, 2004] выведены формулы для представления потенциалов волновых полей разных типов в однородных изотропных средах от точечных источников типа силы и момента силы. Продолжая эти исследования, предлагается более простой и удобный метод вывода формул для потенциалов волновых полей разных типов от точечных источников различного вида в однородном изотропном пространстве.

**Теория.** Потенциалы $\varphi$ и $\psi$ для продольных и поперечных волн в однородной изотропной среде от источника точечной силы $\mathbf{f}(t)\delta(\mathbf{x})$ определяются соотношениями [Аки, Ричардс, 1983]

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\rho}\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\int_0^{R/v_P}\tau\mathbf{f}\left(t-\tau\right)d\tau\,, \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{4\pi\rho}\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\int_0^{R/v_S}\tau\mathbf{f}\left(t-\tau\right)d\tau\,, \qquad (2)$$

где $v_P$ и $v_S$ — скорости продольных и поперечных волн, $\mathbf{x}=(x,\ y,\ z)^T$, $\mathbf{f}(t)=\left(f_x(t), f_y(t), f_z(t)\right)^T$, $R=\left|\mathbf{x}\right|$ и $\mathbf{f}(t)=0$ при $t<0$.

Выбор нижнего предела в интегралах (1) и (2) условный. Число 0 может быть заменено на любое другое, не зависящее от $\mathbf{x}$, без изменения полного поля смещений

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla\times\boldsymbol{\psi}\,. \qquad (3)$$

В дальнейшем нижний предел примем равным $t$ и будем пользоваться соотношениями

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\rho}\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\int_{R/v_P}^{t}\tau\mathbf{f}\left(t-\tau\right)d\tau\,, \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{\psi} = -\frac{1}{4\pi\rho}\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\int_{R/v_S}^{t}\tau\mathbf{f}\left(t-\tau\right)d\tau\,. \qquad (5)$$

Определим векторы $\mathbf{l}^P$ и $\mathbf{l}^S$ по формуле

$$\mathbf{l}^{P,S} = \frac{1}{R}\int_0^t d\tau_2\int_0^{\tau_2}\mathbf{f}\left(\tau_1 - R/v_{P,S}\right)d\tau_1 \qquad (6)$$

и докажем, что

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\rho}\nabla\cdot\mathbf{l}^P\,, \qquad (7)$$

$$\boldsymbol{\psi} = -\frac{1}{4\pi\rho}\nabla\times\mathbf{I}^S . \qquad (8)$$

Действительно, изменяя порядок интегрирования в уравнении (6), получим

$$\mathbf{I}^P = \frac{1}{R}\int_0^t \mathbf{f}\left(\tau_1 - R/v_P\right)d\tau_1\int_{\tau_1}^t d\tau_2 =$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^t \left(t-\tau_1\right)\mathbf{f}\left(\tau_1 - R/v_P\right)d\tau_1 =$$

$$= \frac{1}{R}\int_{R/v_P}^t \left(\tau - R/v_P\right)\mathbf{f}\left(t-\tau\right)d\tau .$$

Учитывая, что $\nabla(1/R) = -\nabla R/R^2$, находим дивергенцию $\nabla\mathbf{I}^P$:

$$\nabla\mathbf{I}^P = \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\int_{R/v_P}^t\left(\tau-\frac{R}{v_P}\right)\mathbf{f}\left(t-\tau\right)d\tau -$$

$$-\frac{1}{Rv_P}\int_{R/v_P}^t \nabla\left(R\right)\mathbf{f}\left(t-\tau\right)d\tau =$$

$$= \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\int_{R/v_P}^t \tau\mathbf{f}\left(t-\tau\right)d\tau .$$

Это доказывает справедливость формулы (7). Аналогично доказывается формула (8).

Использование соотношений (7) и (8) позволяет представить потенциалы для точечной силы в виде преобразований Бесселя—Меллина. Для этого воспользуемся разложением функции $\exp\left(-sR/v\right)/R$ по функциям Бесселя [Лебедев, 1963]:

$$\frac{\exp\left(-sR/v\right)}{R} =$$

$$= \int_0^\infty k\,\mathrm{J}_0(kr)\frac{\exp\left(-|z|\sqrt{k^2+s^2/v^2}\right)}{\sqrt{k^2+s^2/v^2}}dk , \qquad (9)$$

где $R^2=r^2+z^2$ и $s,r>0$, а также представлением функции $\mathbf{f}(t-R/v)/R$ в виде интеграла Меллина. Обозначим через $\mathbf{F}(s) = \left(F_x, F_y, F_z\right)^T$ изображение функции $\mathbf{f}(t)$. Тогда

$$\frac{1}{R}\mathbf{f}\left(t-R/v\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathbf{F}(s)\frac{1}{R}\exp\left(st - sR/v\right)ds . \qquad (10)$$

Подставляя (9) в (10) и выполняя замену переменных $s=k\eta$ в двойном интеграле, получаем

$$\frac{1}{R}\mathbf{f}\left(t-R/v\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty k\,\mathrm{J}_0\left(kr\right)dk\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathbf{F}(k\eta)\frac{\exp\left[k\left(t\eta-|z|\alpha\right)\right]}{\alpha}d\eta , \qquad (11)$$

где $\alpha = \sqrt{1+\eta^2/v^2}$. Выполняя двукратное интегрирование по $t$ и используя формулу (6), находим

$$\mathbf{I}^{P,S} = \int_0^\infty\frac{\mathrm{J}_0\left(kr\right)}{2\pi i}dk\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathbf{F}(k\eta)\frac{\exp\left[k\left(t\eta-|z|\alpha_{P,S}\right)\right]}{\alpha_{P,S}k\eta^2}d\eta , \qquad (12)$$

где $\alpha_{P,S} = \sqrt{1+\eta^2/v_{P,S}^2}$.

Представим потенциалы в виде интегралов Бесселя—Меллина. Для этого воспользуемся формулами (7), (8), (12), а также соотношениями $\partial\mathrm{J}_0\left(kr\right)/\partial r = -k\,\mathrm{J}_1\left(kr\right)$, $\partial\mathrm{J}_1\left(kr\right)/\partial r = k\,\mathrm{J}_0\left(kr\right) - \mathrm{J}_1\left(kr\right)/r$, $F_r = F_x\cos\varphi + F_y\sin\varphi$, $F_\varphi = -F_x\sin\varphi + F_y\cos\varphi$. С целью сокращения выражений для потенциалов введем преобразование $Y = \Xi(\tilde{Y})$:

$$Y = \Xi(\tilde{Y}) = -\frac{1}{4\pi\rho}\int_0^\infty\frac{dk}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\tilde{Y}\exp\left(kt\eta\right)d\eta . \qquad (13)$$

Из соотношения (12) следует

$$\tilde{\mathbf{I}}^{P,S} = -4\pi\rho\frac{\mathrm{J}_0\left(kr\right)\exp\left(-|z|k\alpha_{P,S}\right)}{\alpha_{P,S}k\eta^2}\mathbf{F}(k\eta) . \qquad (14)$$

Поэтому

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{4\pi\rho}\nabla\cdot\tilde{\mathbf{I}}^P =$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho}\left[\frac{\partial}{r\partial r}\left(r\tilde{\mathrm{I}}_r^P\right)+\frac{\partial}{r\partial\varphi}\left(\tilde{\mathrm{I}}_\varphi^P\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{\mathrm{I}}_z^P\right)\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{J}_1\left(kr\right)\exp\left(-k\alpha_P|z|\right)F_r}{\alpha_P\eta^2} +$$

$$+\frac{\mathrm{sgn}(z)\,\mathrm{J}_0\left(kr\right)\exp\left(-k\alpha_P|z|\right)F_z}{\eta^2} , \qquad (15)$$

где $\mathrm{sgn}(z) = \begin{cases} z, \text{ если } z>0, \\ 0, \text{ если } z=0, \\ -z, \text{ если } z<0. \end{cases}$

Из соотношения

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = -\frac{1}{4\pi\rho}\nabla\times\tilde{\mathbf{I}}^S = -\frac{1}{4\pi\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r/r & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z/r \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ \tilde{\mathrm{I}}_r^S & r\tilde{\mathrm{I}}_\varphi^S & \tilde{\mathrm{I}}_z^S \end{vmatrix}$$

следует

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_r = -\frac{1}{4\pi\rho r}\left(\frac{\partial\tilde{\mathrm{I}}_z^S}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(r\tilde{\mathrm{I}}_\varphi^S\right)}{\partial z}\right) =$$

$$=\frac{\operatorname{sgn}(z)\,\mathrm{J}_0\left(kr\right)\exp\left(-k\alpha_S\left|z\right|\right)F_\varphi}{\eta^2}\,, \tag{16}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_\varphi=-\frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial\tilde{\mathrm{l}}_r^S}{\partial z}-\frac{\partial\tilde{\mathrm{l}}_z^S}{\partial r}\right)=$$

$$=-\frac{\operatorname{sgn}(z)\,\mathrm{J}_0\left(kr\right)\exp\left(-k\alpha_S\left|z\right|\right)F_r}{\eta^2}+$$

$$+\frac{\mathrm{J}_1\left(kr\right)\exp\left(-k\alpha_S\left|z\right|\right)F_z}{\alpha_S\eta^2}\,, \tag{17}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_z=-\frac{1}{4\pi\rho r}\left(\frac{\partial\left(r\tilde{\mathrm{l}}_\varphi^S\right)}{\partial r}-\frac{\partial\tilde{\mathrm{l}}_r^S}{\partial\varphi}\right)=$$

$$=-\frac{\mathrm{J}_1\left(kr\right)\exp\left(-k\alpha_S\left|z\right|\right)F_\varphi}{\alpha_S\eta^2}\,. \tag{18}$$

Найдем скалярные потенциалы $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\chi}$ для *SV*- и *SH*-волн соответственно в виде интегралов Фурье—Бесселя. Для этого разложим векторный потенциал $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ в сумму

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}\ \text{———}\ \cancel{(0,0},\ \tilde{}\ )\quad\left(0,0,\ \tilde{}\ \right)\qquad\tilde{}\ , \tag{19}$$

где $\tilde{\xi}$ — некоторая, пока неизвестная функция. Из соотношения (19) следует справедливость системы уравнений

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial r}=\tilde{\psi}_r\,, \tag{20}$$

$$-\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial\varphi}=\tilde{\psi}_\varphi\,, \tag{21}$$

$$\tilde{\chi}+\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial z}=\tilde{\psi}_z\,. \tag{22}$$

К уравнению (20), умноженному на $r$ и продифференцированному по $r$, прибавим уравнение (21), продифференцированное по $\varphi$:

$$r\Delta_2\tilde{\xi}=\frac{\partial\left(r\tilde{\psi}_r\right)}{\partial r}+\frac{\partial\tilde{\psi}_\varphi}{\partial\varphi}=$$

$$=-\frac{r\operatorname{sgn}(z)\,k\,\mathrm{J}_1\left(kr\right)\exp\left(-k\alpha_S\left|z\right|\right)F_\varphi}{\eta^2}\,, \tag{23}$$

где $\Delta_2\tilde{\xi}=\partial^2\tilde{\xi}/\partial r^2+\partial\tilde{\xi}/r\partial r+\partial^2\tilde{\xi}/r^2\partial\varphi^2$ — двумерный оператор Лапласа в горизонтальной плоскости. Поскольку функция $\mathrm{J}_1(kr)F_\varphi$ является собственной для этого оператора с собственным числом $-k^2$, т. е. $\Delta_2(\mathrm{J}_1(kr)F_\varphi)=-k^2\mathrm{J}_1(kr)F_\varphi$, то уравнение (23) имеет решение

$$\tilde{\xi}=\frac{\operatorname{sgn}(z)\,\mathrm{J}_1\left(kr\right)\exp\left(-k\alpha_S\left|z\right|\right)F_\varphi}{k\eta^2}\,. \tag{24}$$

Аналогично находим

$$r\Delta_2\tilde{\psi}=\frac{\partial\tilde{\psi}_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(r\tilde{\psi}_\varphi\right)}{\partial r}=$$

$$=-\frac{r\operatorname{sgn}(z)k\,\mathrm{J}_1\left(kr\right)\exp\left(-k\alpha_S\left|z\right|\right)F_r}{\eta^2}-$$

$$-\frac{rk\,\mathrm{J}_0\left(kr\right)\exp\left(-k\alpha_S\left|z\right|\right)F_z}{\alpha_S\eta^2}\,. \tag{25}$$

Поскольку, $\mathrm{J}_1(kr)F_r$ и $\mathrm{J}_0(kr)F_z$ также являются собственными функциями для оператора $\Delta_2$ с собственным числом $-k^2$, то уравнение (25) имеет решение

$$\tilde{\psi}=\frac{\operatorname{sgn}(z)\,\mathrm{J}_1\left(kr\right)\exp\left(-k\alpha_S\left|z\right|\right)F_r}{k\eta^2}+$$

$$+\frac{\mathrm{J}_0\left(kr\right)\exp\left(-k\alpha_S\left|z\right|\right)F_z}{k\alpha_S\eta^2}\,. \tag{26}$$

Значение потенциала $\tilde{\chi}$ получим из уравнения (22)

$$\tilde{\chi}=\tilde{\psi}_z-\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial z}=-\frac{\mathrm{J}_1\left(kr\right)\exp\left(-k\alpha_S z\right)(1-\alpha_S^2)F_\varphi}{\alpha_S\eta^2}\,. \tag{27}$$

Вычислим скалярные потенциалы $\tilde{\varphi},\tilde{\psi},\tilde{\chi}$ для точечного момента сил $m_{ij}$, $i$, $j=x$, $y$, $z$. Вычисления удобно выполнять в цилиндрической системе координат. Обозначим $a_{pq}$ ($p$,$q$=$r$, $\varphi$, $z$) физические координаты тензора $m_{ij}$ в цилиндрической системе. Они определяются по формулам

$$a_{rr}=\cos^2\varphi\,m_{xx}+2\sin\varphi\cos\varphi\,m_{xy}+\sin^2\varphi\,m_{yy}\,, \tag{28}$$

$$a_{r\varphi}=a_{\varphi r}=\sin\varphi\cos\varphi\left(m_{yy}-m_{xx}\right)+$$

$$+\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)m_{xy}\,, \tag{29}$$

$$a_{rz}=a_{zr}=\cos\varphi\,m_{xz}+\sin\varphi\,m_{yz}\,, \tag{30}$$

$$a_{\varphi\varphi}=\sin^2\varphi\,m_{xx}-2\sin\varphi\cos\varphi\,m_{xy}+\cos^2\varphi\,m_{yy}\,, \tag{31}$$

$$a_{\varphi z}=a_{z\varphi}=-\sin\varphi\,m_{xz}+\cos\varphi\,m_{yz}\,, \tag{32}$$

$$a_{zz}=m_{zz}\,. \tag{33}$$

Функция Грина для момента сил получается из функции Грина $G_{ij}(\xi_m, x_n)$ для простой силы дифференцированием по координатам источника $\partial G_{ij}(\xi_m, x_n)/\partial\xi_m$. Для однородной среды функция Грина зависит только от разностей координат $x_m-\xi_m$. Поэтому для источника в начале системы координат функция Грина равна $-\partial G_{ij}(0,\ x_m)/\partial x_m$. Следовательно, скалярный потенциал для момента сил можно найти, если выбрать ковектор, с которым сворачивается вектор силы в формуле для потенциала от источника типа простой силы. Затем изменить его знак и продифференцировать по пространственным координатам, а полученный тензор ранга два свернуть с тензором момента сил. В декартовой системе координат это приводит к длинным выражениям. Дифференцирование можно выполнить в цилиндрической системе координат. Однако при этом необходимо перейти от физических координат ковектора к ковариантным, найти ковариантные производные и опять вернуться к физическим координатам. В цилиндрической системе координат при переходе от физических координат к ковариантным компонентам φ компонента вектора умножается на $r$, а остальные компоненты вектора не изменяются. Ковариантные производные ковектора $T_k$ в криволинейной системе координат находятся по формуле $\nabla_n T_k = \dfrac{\partial T_k}{\partial x_n} - \Gamma^q_{nk} T_q$, где $\Gamma^q_{nk}$ — символы Кристоффеля. В цилиндрической системе координат отличными от нуля являются только символы Кристоффеля $\Gamma^1_{22} = -r$ и $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/r$, где координаты пронумерованы в следующем порядке: $1 \leftrightarrow r$, $2 \leftrightarrow \varphi$, $3 \leftrightarrow z$.

Определим потенциал продольной волны $\tilde{\varphi}$. Физические и ковариантные координаты ковектора, сворачиваемого с силой в формуле (15), одинаковы и определяются по формулам

$$T_r = \frac{\mathrm{J}_1(kr)\exp\left(-k\alpha_P|z|\right)}{\alpha_P\eta^2},\ T_\varphi = 0,$$

$$T_z = \frac{\mathrm{sgn}(z)\,\mathrm{J}_0(kr)\exp\left(-k\alpha_P|z|\right)}{\eta^2}. \tag{34}$$

Отличными от нуля являются следующие ковариантные компоненты производных:

$$\nabla_r T_r = \frac{\partial T_r}{\partial r} - \Gamma^q_{11} T_q = \frac{\partial T_r}{\partial r} =$$
$$= \frac{\left(kr\,\mathrm{J}_0(kr) - \mathrm{J}_1(kr)\right)\exp\left(-k\alpha_P|z|\right)}{r\alpha_P\eta^2}, \tag{35}$$

$$\nabla_z T_r = \frac{\partial T_r}{\partial z} - \Gamma^q_{31} T_q = \frac{\partial T_r}{\partial z} =$$
$$= -\frac{\mathrm{sgn}(z)\,k\,\mathrm{J}_1(kr)\exp\left(-k\alpha_P|z|\right)}{\eta^2}, \tag{36}$$

$$\nabla_\varphi T_\varphi = \frac{\partial T_\varphi}{\partial \varphi} - \Gamma^q_{22} T_q = -\Gamma^1_{22} T_r =$$
$$= rT_r = \frac{r\,\mathrm{J}_1(kr)\exp\left(-k\alpha_P|z|\right)}{\alpha_P\eta^2}, \tag{37}$$

$$\nabla_r T_z = \frac{\partial T_z}{\partial r} - \Gamma^q_{13} T_q = \frac{\partial T_z}{\partial r} =$$
$$= -\frac{\mathrm{sgn}(z)\,k\,\mathrm{J}_1(kr)\exp\left(-k\alpha_P|z|\right)}{\eta^2}, \tag{38}$$

$$\nabla_z T_z = \frac{\partial T_z}{\partial z} - \Gamma^q_{33} T_q = \frac{\partial T_z}{\partial z} =$$
$$= -\frac{k\alpha_P\,\mathrm{J}_0(kr)\exp\left(-k\alpha_P|z|\right)}{\eta^2}. \tag{39}$$

Все отличные от нуля физические координаты этого тензора совпадают с ковариантными, кроме координаты $\nabla_\varphi T_\varphi$, которая равна $\dfrac{\nabla_\varphi T_\varphi}{r^2} = \dfrac{\mathrm{J}_1(kr)\exp(-k\alpha_P z)}{r\alpha_P\eta^2}$. Итак, искомый потенциал описывается формулой

$$\tilde{\varphi} = -\nabla_r T_r\ a_{rr} - \left(\nabla_z T_r + \nabla_r T_z\right) a_{rz} -$$
$$-\nabla_\varphi T_\varphi\ a_{\varphi\varphi}/r^2 - \nabla_z T_z\ a_{zz} =$$
$$-\frac{\left(kr\,\mathrm{J}_0(kr) - \mathrm{J}_1(kr)\right)\exp\left(-k\alpha_P|z|\right)}{r\alpha_P\eta^2} a_{rr} +$$
$$+\frac{2\,\mathrm{sgn}(z)\,k\,\mathrm{J}_1(kr)\exp\left(-k\alpha_P|z|\right)}{\eta^2} a_{rz} -$$
$$-\frac{\mathrm{J}_1(kr)\exp\left(-k\alpha_P|z|\right)}{r\alpha_P\eta^2} a_{\varphi\varphi} +$$
$$+\frac{k\alpha_P\,\mathrm{J}_0(kr)\exp\left(-k\alpha_P|z|\right)}{\eta^2} a_{zz}. \tag{40}$$

Аналогично определим потенциал поперечной $SV$-волны $\tilde{\psi}$. Физические и ковариантные координаты ковектора, сворачиваемого с силой в формуле (26), совпадают между собой и равны

$$U_r = \frac{\mathrm{sgn}(z)\,\mathrm{J}_1(kr)\exp\left(-k\alpha_S|z|\right)}{k\eta^2},\ U_\varphi = 0,$$

$$U_z = \frac{\mathrm{J}_0(kr)\exp\left(-k\alpha_S|z|\right)}{k\alpha_S\eta^2}. \tag{41}$$

Отличными от нуля являются следующие ковариантные компоненты производных:

$$\nabla_r U_r = \frac{\partial U_r}{\partial r} - \Gamma^q_{11} U_q = \frac{\partial U_r}{\partial r} =$$
$$= \frac{\mathrm{sgn}(z)\left(kr\,\mathrm{J}_0(kr) - \mathrm{J}_1(kr)\right)\exp\left(-k\alpha_S|z|\right)}{kr\eta^2}, \tag{42}$$

$$\nabla_z U_r = \frac{\partial U_r}{\partial z} - \Gamma^q_{31} U_q = \frac{\partial U_r}{\partial z} = -\frac{\alpha_S \, \mathrm{J}_1(kr)\exp(-k\alpha_S|z|)}{\eta^2}, \tag{43}$$

$$\nabla_\varphi U_\varphi = \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} - \Gamma^q_{22} U_q = -\Gamma^1_{22} U_r = rU_r = \frac{r\,\mathrm{sgn}(z)\,\mathrm{J}_1(kr)\exp(-k\alpha_S|z|)}{k\eta^2}, \tag{44}$$

$$\nabla_r U_z = \frac{\partial U_z}{\partial r} - \Gamma^q_{13} U_q = \frac{\partial U_z}{\partial r} = -\frac{\mathrm{J}_1(kr)\exp(-k\alpha_S|z|)}{\alpha_S\eta^2}, \tag{45}$$

$$\nabla_z U_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} - \Gamma^q_{33} U_q = \frac{\partial U_z}{\partial z} = -\frac{\mathrm{sgn}(z)\,\mathrm{J}_0(kr)\exp(-k\alpha_S|z|)}{\eta^2}. \tag{46}$$

Все отличные от нуля физические координаты этого тензора совпадают с ковариантными, кроме координаты $\nabla_\varphi T_\varphi$, которая равна

$$\frac{\nabla_\varphi U_\varphi}{r^2} = \frac{\mathrm{sgn}(z)\,\mathrm{J}_1(kr)\exp(-k\alpha_S|z|)}{rk\eta^2}.$$

Итак, искомый потенциал описывается формулой

$$\tilde{\psi} = -\nabla_r U_r \, a_{rr} - (\nabla_z U_r + \nabla_r U_z)\, a_{rz} - \nabla_\varphi U_\varphi \, a_{\varphi\varphi}/r^2 - \nabla_z U_z \, a_{zz} =$$
$$-\frac{\mathrm{sgn}(z)\big(kr\,\mathrm{J}_0(kr) - \mathrm{J}_1(kr)\big)\exp(-k\alpha_S|z|)}{kr\eta^2} a_{rr} + \frac{(1+\alpha_S^2)\,\mathrm{J}_1(kr)\exp(-k\alpha_S|z|)}{\alpha_S\eta^2} a_{rz} - \frac{\mathrm{sgn}(z)\,\mathrm{J}_1(kr)\exp(-k\alpha_S|z|)}{rk\eta^2} a_{\varphi\varphi} + \frac{\mathrm{sgn}(z)\,\mathrm{J}_0(kr)\exp(-k\alpha_S|z|)}{\eta^2} a_{zz}. \tag{47}$$

Наконец, найдем потенциал поперечной $SH$-волны $\tilde{\chi}$. Ковариантные координаты ковектора, сворачиваемого с вектором силы в формуле (27), есть

$$W_r = 0, \quad W_\varphi = -\frac{r(1-\alpha_S^2)\,\mathrm{J}_1(kr)\exp(-k\alpha_S|z|)}{\alpha_S\eta^2}, \quad W_z = 0. \tag{48}$$

Отличными от нуля являются следующие ковариантные компоненты производных

$$\nabla_\varphi W_r = \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} - \Gamma^q_{21} W_q = -\Gamma^2_{21} W_\varphi = \frac{(1-\alpha_S^2)\,\mathrm{J}_1(kr)\exp(-k\alpha_S|z|)}{\alpha_S\eta^2}, \tag{49}$$

$$\nabla_r W_\varphi = \frac{\partial W_\varphi}{\partial r} - \Gamma^2_{12} W_\varphi = -\frac{(1-\alpha_S^2)\big(kr\,\mathrm{J}_0(kr) - \mathrm{J}_1(kr)\big)\exp(-k\alpha_S|z|)}{\alpha_S\eta^2}. \tag{50}$$

$$\nabla_z W_\varphi = \frac{\partial W_\varphi}{\partial z} - \Gamma^q_{32} W_q = \frac{\partial W_\varphi}{\partial z} = \frac{rk\,\mathrm{sgn}(z)(1-\alpha_S^2)\,\mathrm{J}_1(kr)\exp(-k\alpha_S|z|)}{\eta^2}. \tag{51}$$

Отличными от нуля физическими компонентами этого тензора есть $\nabla_\varphi W_r / r$, $\nabla_r W_\varphi / r$ и $\nabla_z W_\varphi / r$. Следовательно, искомый потенциал описывается формулой

$$\tilde{\chi} = -(\nabla_\varphi W_r + \nabla_r W_\varphi)\, a_{r\varphi}/r - \nabla_z W_\varphi a_{\varphi z}/r =$$
$$= \frac{(1-\alpha_S^2)\big(kr\,\mathrm{J}_0(kr) - 2\,\mathrm{J}_1(kr)\big)\exp(-k\alpha_S|z|)}{r\alpha_S\eta^2} a_{r\varphi} - \frac{\mathrm{sgn}(z)(1-\alpha_S^2)\,\mathrm{J}_1(kr)\exp(-k\alpha_S|z|)}{\eta^2} a_{\varphi z}. \tag{52}$$

**Выводы.** Предлагается метод вывода формул для представления потенциалов волновых полей разных типов ($P$-, $SV$-, $SH$-) в виде интегралов Бесселя—Меллина. Рассматриваемые потенциалы формируются точечными источниками типа силы или момента сил в однородном изотропном безграничном пространстве.

## Список литературы


*Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. — Москва: Мир, 1983. — Т. 1. — 519 с.

*Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения (2-е изд.). — Москва—Ленинград: Физматгиз, 1963. — 359 с.

*Пак Р. М.* Хвильове поле в однорідному середовищі для джерела у вигляді одинарної сили або подвійної пари сил // Геоінформатика. — 2004. — № 1. — С. 36—44.

*Hasskell N. A.* The dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seismol. Soc. Amer. — 1953. — **43**, № 1. — P. 17—34.