УДК 514.18
Юрій ХОЛКОВСЬКИЙ
м. Київ
profiz@ukr.net

ПОБУДОВА ДИСКРЕТНО-ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ, СИСТЕМ ТА СЕРЕДОВИЩ

Наведена побудова дискретно-інтерполяційних геометричних моделей складних об'єктів, систем та середовищ на основі нетрадиційного дискретно-інтерполяційного підходу.
Ключові слова: інтерполяція, однопараметрична множина, вузол інтерполяції, дискретні функції, багатовимірна інтерполяція, дискретно-інтерполяційна матриця.

Проектування різноманітних, складних за формою технічних об'єктів у теперішній час доволі непроста задача у зв'язку з тим, що сучасні технології неперервно розвиваються та ускладнюються. А це, в свою чергу, впливає на зростання рівня вимог щодо раціональності та якості кінцевого результату проектування й подальшого виготовлення. У переважній більшості випадків інженерного проектування йдеться про моделювання досить складних криволінійних технічних форм у вигляді певних поверхонь. Необхідно зазначити, що часто такі складні технічні форми практично не піддаються аналітичному опису, і, відповідно, не можливо отримати аналітичні континуальні моделі таких поверхонь. Тому пошук і створення математичних моделей таких об'єктів є досить актуальною задачею.

Моделювання прогнозованого стану багатопараметричних систем та середовищ, наприклад, екологічних, енергетичних, кліматичних, гідрологічних, геоморфологічних, геологічних систем, також є надзвичайно складною задачею. Такі системи або середовища мають доволі складну структуру, велику кількість різноякісних параметрів. Пошук та створення математичних моделей таких систем є ще більш складною задачею. В умовах сучасної глобальної кризової ситуації деструктивного впливу людини на навколишнє середовище дослідження, пов'язані з розвитком методів моделювання складних багатопараметричних процесів, систем та середовищ, прогнозуванням стану таких систем набувають особливого значення. Зрозуміло, їх моделювання, прогнозування, контроль стану різних компонентів можна віднести до багатопараметричних і стохастичних процесів. Цілком очевидно, що моделювання систем та середовищ, які не піддаються аналітичному опису, за допомогою континуальних моделей неможливе. Більш того, параметри таких систем є суттєво неоднорідними й часто залежать від зовнішніх факторів, які інколи просто неможливо передбачити.

Досить важливим є той фактор, що певні параметри чи компоненти багатопараметричних систем та середовищ вимірюються в певний час та в певному місці, тобто така інформація носить яскраво виражений дискретний характер. Тому питання розробки раціональних алгоритмів побудови геометричних моделей сучасних технічних об'єктів у вигляді складних криволінійних поверхонь, математичних моделей багатопараметричних систем та середовищ, алгоритмів прогнозування їх стану та стану окремих компонентів є дуже актуальними.

У літературі досить рідко зустрічаються окремі випадки розглядання питань геометричного моделювання багатопараметричних систем і середовищ, а також побудови їх математичних моделей. Особливо це стосується таких багатопараметричних систем і середовищ, як, наприклад, екологічні системи, які відрізняються великою кількістю різноманітних і різноякісних параметрів, і для яких аналіз та прогнозування стану, як вже зазначалося, є вкрай важливими практичними задачами. Зазначимо, що алгоритми та методи геометричного моделювання складних багатопараметричних систем з побудовою їх математичних моделей у літературних джерелах практично відсутні, звідки й випливають наступні цілі дослідження.

Метою даного дослідження є вивчення складних багатопараметричних об'єктів, процесів та середовищ, розробка алгоритмів побудови, методів та дискретних математичних моделей щодо моделювання складних багатопараметричних систем.

У багатьох задачах геометричного моделювання об’єктів, процесів та систем виникає необхідність побудови деякої однопараметричної множини. Таким об’єктом може бути певна поверхня, як геометрична модель складної просторової криволінійної технічної форми, що застосовуються у техніці, будівництві, архітектурі. Також це може бути деяка гіперповерхня, як **n**-вимірна модель певного середовища, що задана аналітично чи дискретно.

Цілком логічним є припущення, що математична модель таких поверхонь може й повинна бути дискретною. Дискретний спосіб представлення геометричної інформації про об’єкт, що моделюється, є найбільш універсальним та добре відомим фактом. Будемо вважати дискретний підхід більш загальним, тому що від континуальної моделі практично завжди можна перейти до дискретної. У межах даного дослідження розглядається випадок переходу до такої моделі, а саме до дискретно-інтерполяційної геометричної моделі.

Дана робота розглядає підхід, який є, по-перше, нетрадиційним, щодо моделювання складних технічних криволінійних об’єктів на основі дискретно-інтерполяційного підходу, по-друге, дає можливість отримати геометричні моделі таких об’єктів та алгоритми їх побудови. Саме розробка нетрадиційних та оптимальних методів геометричного моделювання складних поверхонь, як моделей складних технічних об’єктів та форм, і робить дану роботу актуальною.

Геометричні моделі зазначених об’єктів будуються як деякі однопараметричні множини, для чого використовуються певні інтерполяційні схеми, а саме інтерполяційні поліноми Лагранжа, які дають можливість отримати дискретні геометричні моделі різних криволінійних поверхонь із врахуванням наперед заданих умов щодо форми. Доцільність такого підходу та використання поліномів Лагранжа описані у попередніх роботах автора [1, 2, 3].

Вибір інтерполяційних поліномів Лагранжа є раціональним, і це обумовлено відносною простотою у використанні, необов’язковою, і це дуже важливо, рівномірністю розташуванням вузлів інтерполяції, можливістю представлення по кожній змінній своєї кількості вузлів інтерполяції.

Підкреслимо, що нетрадиційність підходу, який розглядається, полягає у тому, що під вузлами інтерполяції розуміються не точки, а більш складні об’єкти, наприклад, лінії, поверхні, матриці, тензори, або ж, навіть, певні процеси, системи та середовища, що представлені у вигляді деяких функціоналів, як сукупності їх властивостей та параметрів. Схему розташування саме таких вузлів ми й розуміємо під схемою інтерполяції.

Однопараметричні множини, як деяка сукупність, навіть, різноякісних і різноструктурних параметрів, отримані таким чином, саме й є дискретними математичними моделями таких процесів, систем та середовищ. Елементом таких множин є деяка дискретна функція або функціонал, що у загальному випадку може бути представлена, як дискретний чисельний масив, розмірність якого може варіюватись. Тоді інтерполювання функцій, що можуть бути задані неявно чи параметрично, зводиться до розміщення у вузлах інтерполяції рівнянь, якщо можливий аналітичний спосіб завдання, чи дискретних масивів та отримання деякого функціонала з вектором певних параметрів.

Інтерполювання зазначених вище об’єктів зводиться до розміщення у вузлах інтерполяції певних базових функцій – дискретних масивів. Це дає можливість отримати деякий функціонал $\mathbf{\Phi(p_{i,j})}$, з вектором параметрів, що включає в себе інтерполяційний параметр, координатні змінні, параметри, що характеризують форму та положення об’єктів, певні параметричні характеристики процесів тощо.

Отримані таким чином однопараметричні множини є дискретними математичними моделями деяких багатопараметричних об’єктів і навіть процесів, а функціонал $\mathbf{\Phi(p_{i,j})}$ є елементом таких множин. Для створення геометричних моделей та розробки алгоритмів їх побудови у нашому випадку використовувалися прямі та криві лінії. Саме ці лінії й виступали у ролі базових вузлових функцій.

Наприклад, проектування автомобільних шляхів та тунелів є достатньо складною інженерною задачею, що залежить від багатьох умов та параметрів, таких, як рельєф місцевості, кліматичні умови, якості будівельних матеріалів. Можна стверджувати, що йдеться про моделювання певних технічних об’єктів за наперед заданими умовами. Все це накладає особливі вимоги до проектування таких об’єктів. Також зазначимо, що розробка таких геометричних моделей та алгоритмів їх побудови розглянуті у літературі вкрай недостатньо.

Деякі види вузлових функцій приведені на рисунку 1. Вони фактично являють собою певні пласкі перерізи криволінійних поверхонь технічних форм, таких, як автомобільні шляхи та тунелі. Перші три лінії є профілем (прямого, опуклого, угнутого) автомобільного полотна, а для моделювання тунелів використовуються лінії замкнутого контуру.

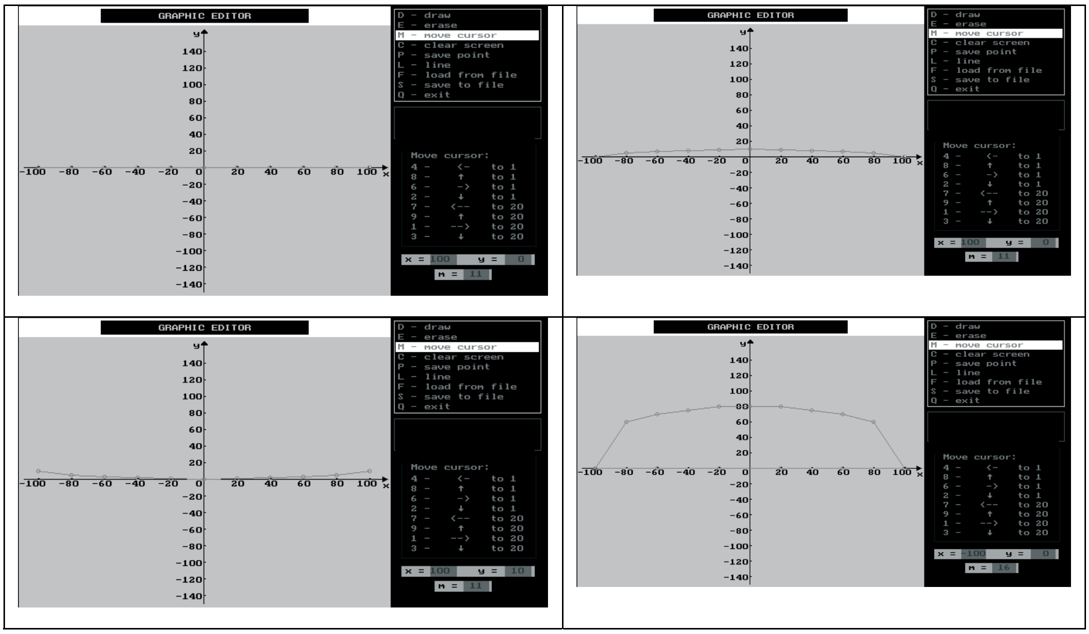

Рис. 1. Моделювання вузлових функцій

Деякий функціонал $\mathbf{\Phi(p_{i,j})}$ може бути заданий матрицею **M[i, j]**.

$$\mathbf{F(p_1, p2, p_3, \dots, p_k, \dots, p_m) = M[i, j]} \tag{1}$$

Використуємо інтерполяційний поліном Лагранжа, розглядаючи (1) у якості певного вузла інтерполяції. На випадок одновимірної інтерполяції отримаємо M[i,j] як

$$M_n[i,j] = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(i,j) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1} \frac{u-u_j}{u_i-u_j} \tag{2}$$

де **n** – кількість вузлів інтерполяції, **u** – параметр $\mathbf{M_i}$ **[i, j]**, відповідний проміжному перерізу поверхні, що моделюється.

Автором було розроблено відповідне програмне забезпечення, що дало можливість сформувати вузлові функції (див. рис. 1). Таким чином фактично були отримані дискретні чисельні моделі вузлових функцій. Ці лінії моделюються певної визначеної форми, досить легко можуть бути сформовані, що саме й дозволяє врахувати вимоги щодо наперед заданих умов локальних форм, наприклад автомобільного шляху. Тоді поверхня автомобільного полотна може бути представлена дискретним лінійчатим каркасом ліній, що являють собою її умовні перерізи. У випадку тунелю вузлова функція є замкнутою, проте також дозволяє врахувати певні локальні особливості такої інженерної споруди щодо форми.

Як було зазначено вище, кількість вузлів базових функцій може бути різною, що обумовлено суто практичними питаннями проектування. Наразі у програмному забезпеченні передбачена й така можливість у вигляді розробленого алгоритму методу вирівнювання кількості вузлових точок на вузлових функціях.

Моделюючий блок розробленого автором програмного забезпечення дає можливість отримати геометричні моделі певних ділянок автомобільних шляхів та тунелів. Приклади побудови різних ділянок автомобільних шляхів наведені на рисунку 2.

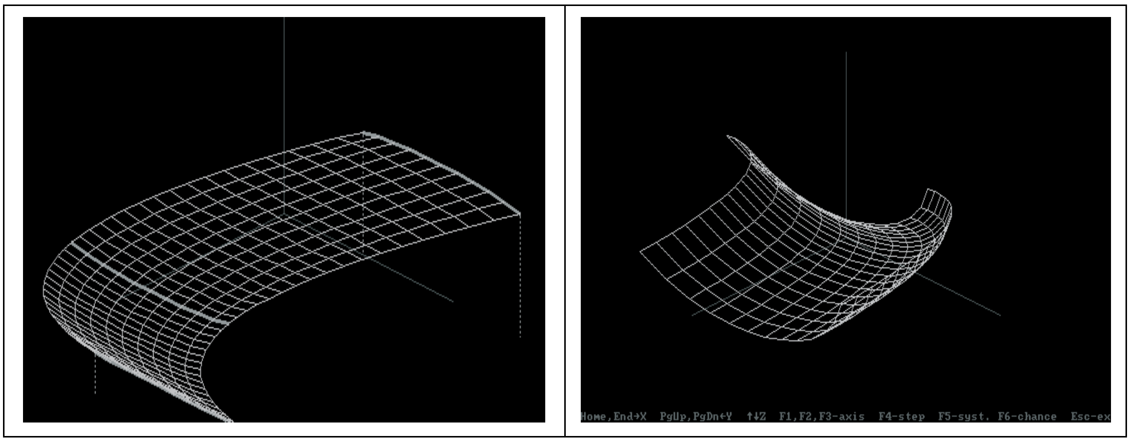

Рис. 2. Побудовані геометричні моделі ділянок автошляхів

При моделюванні вузлових функцій можна врахувати специфічні умови щодо геометричної форми профілю полотна, особливо на таких ділянках, де суттєво змінюється геометрія траси, наприклад, закруглення, різкі повороти, перепади по висоті тощо. Досить непростим моментом є визначення схеми інтерполяції, тобто кількості її вузлів та їх розташування, що пов’язано з питаннями проектування та технологічними умовами.

Щодо проектування тунелів необхідно моделювати різного роду каналові поверхні. Запропонований підхід та метод дозволяє відносно просто отримати геометричні моделі тунельних переходів з наперед заданими конструктивними умовами. Необхідно підкреслити, що водночас можна моделювати, як геометричні параметри форми тунелю, так і геометрію полотна автошляху. На рисунку 3 наведені приклади побудови деяких геометричних моделей окремих ділянок тунельного типу.

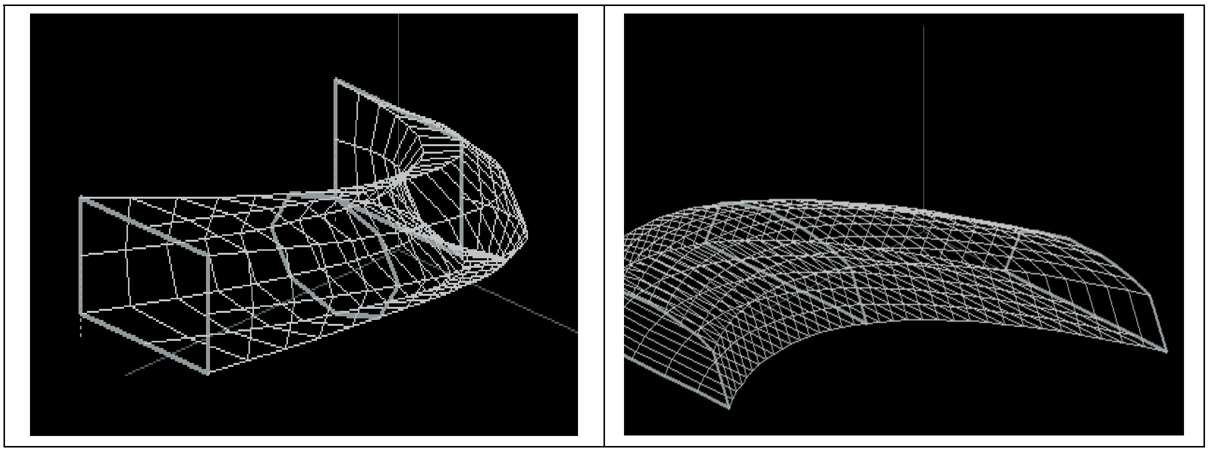

Рис. 3. Побудовані геометричні моделі ділянок тунелів

Вузлові функції можуть змінювати своє положення у просторі у відповідних носіях-площинах, які, в свою чергу, також можуть змінювати своє положення, впливаючи таким чином безпосередньо на схему інтерполяції і, відповідно, на кінцевий результат моделювання.

Багатопараметричні системи та середовища, на прикладі екологічних систем, можуть бути настільки складними структурно й параметрично, що використання апарату одновимірної інтерполяції може виявитися недостатнім. Тому у таких випадках доцільно використати, наприклад, апарат двовимірної інтерполяції. Враховуючи запропонований дискретно-інтерполяційний метод моделювання, власне, ось у чому полягає його сутність.

У випадку двовимірної інтерполяції можна знайти вид степеневого многочлена $\mathbf{\Phi_{m,n}(u,v)}$ степеня $\mathbf{m}$ по $\mathbf{u}$ та $\mathbf{n}$ по $\mathbf{v}$, та визначити значення функціонала $\mathbf{F}$ у довільній точці з параметрами ($\mathbf{u,v}$). Геометрично це означає, що при двовимірній інтерполяції через вузлові точки проходить деяка поверхня $\mathbf{z=\Phi_{m,n}(u, v)}$.

Якщо побудувати регулярну сітку та задати у вузлах сітки значення функції **z**, то вся площадка розпадається на **mn** прямокутників, в один з яких і потрапить точка (**u,v**) (рис.1). Відбувається інтерполяція при різних $\mathbf{u_i}$, но фіксованих $\mathbf{v_j}$, після чого необхідно перейти до $\mathbf{v_{j+1}}$ і повторити знову всю процедуру. Отже, отримуємо 2-вимірну інтерполяцію $\Rightarrow$ $\mathbf{P_{m,n}(x, y)}$ степеня m по x і степеня n по y $\Rightarrow$ **z(x, y)** у довільній точці **T(x, y)**. Через вузлові точки проводиться деяка поверхня $\mathbf{z = P_{m,n}(x, y)}$. Отримуємо таку формулу для двовимірної інтерполяції за Лагранжем:

$$P_{m,n}(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1} z(x_j, y_j) \prod_{\substack{p=0 \\ p\neq i}}^{m-1} \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq j}}^{n-1} \frac{(x-x_i)\,(y-y_j)}{(x_p-x_i)\,(y_q-y_j)} \tag{3}$$

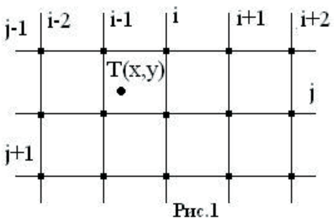

Рис.1

Розглянемо тепер побудову моделей багатопараметричних середовищ. Нехай $\mathbf{F(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k, \dots, p_m)}$ – багатопараметрична неявно задана функція. Сформуємо її у вигляді деякого функціонала $\mathbf{\Phi(p_{i,j})}$, що заданий матрицею **M[i, j]**.

$$\mathbf{F(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k, \dots, p_m) = M[i, j]},$$

де $\mathbf{p_1, p_2, p_3, \dots, p_k, \dots, p_m}$ – екологічні різноструктурні та різноякісні параметри (показники забруднення, рівень концентрації певних речовин, урахування природніх особливостей тощо), а

$$M[i, j] = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & \cdots & p_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m,1} & p_{m,2} & \cdots & \cdots & p_{m,n} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Тобто, **M[i, j]** і є вузлова дискретно-інтерполяційна екологічна матриця.

Розглядаючи (4) як певний вузол інтерполяції, використаємо інтерполяційний поліном Лагранжа та, у випадку одновимірної інтерполяції отримаємо $\mathbf{\Phi(p_{i,j})}$ як

$$\Phi(p_{i,j}) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(i, j) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n-1} \frac{u-u_j}{u_i-u_j} \tag{5}$$

де **u** – параметр інтерполяції, наприклад, певний вектор направленості; **n** – кількість вузлів інтерполяції.

Вираз (5), який являє собою узагальнену дискретно-інтерполяційну екоматрицю, і є дискретно-інтерполяційна геометрична модель певної екологічної системи або екологічного середовища.

Важливим фактором є введення певного критерію інтерполяції. Це пов’язано з тим, що, інтерполяційний поліном фактично є зрізаним рядом (аналогом ряду Тейлора) у наслідок того, що він обмежений степенем n і для його збіжності необхідно спадання абсолютної величини коефіцієнта при u з ростом степеня u. Критерієм гарної апроксимації у випадку багатовимірної інтерполяції є спадання абсолютних величин похідних по всім змінним із зростанням їх порядку.

У перспективі зазначимо, що застосування такого підходу щодо моделювання різних об’єктів, явищ і середовищ, що характеризуються великою кількістю різноякісних параметрів, є раціональним.

Таким чином, використовуючи запропонований дискретно-інтерполяційний підхід, на основі дискретно-інтерполяційних однопараметричних множин ми отримали можливість моделювати складні геометричні форми технічних об’єктів у вигляді поверхонь, будувати дискретні математичні моделі досить складних багатопараметричних систем, процесів та середовищ, що характеризуються великою кількістю параметрів та властивостей, які можуть мати не тільки різноманітну структуру, але й певну анізотропність властивостей у часі й просторі. З точки зору алгоритмізації процесу метод є оптимальним щодо формоутворення та моделювання з великими можливостями варіативності.

Список використаних джерел

1. Холковський Ю. Р. Інтерполяція дискретних масивів у загальному випадку як спосіб моделювання багатопараметричних об'єктів та процесів / Ю. Р. Холковський // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. — Мелітополь : ТДАТУ, 2011. — Вип. 4 — Т. 51. — С. 156—160.
2. Холковський Ю. Р. Моделювання складних просторових форм із використанням дискретно-інтерполяційного підходу // Труды 14-й Международной научно-практической конференции «Современные проблемы геометрического моделирования». — Мелитополь : ТГАТУ, 2012. — С. 51—57.
3. Холковський Ю. Р. Дискретно-интерполяционный поход при моделировании многопараметрических экологических систем // Сборник материалов 9-ой Международной конференции «Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики». — Минск 2013. — С. 268—272.
4. Холковський Ю. Р. Побудова геометричних моделей технічних об'єктів із використанням дискретно-інтерполяційного підходу // Збірник наукових праць XVI Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні проблеми геометричного моделювання». — Мелітополь, 2014. — Вип. 1. — С. 138—143.

Yuriy KHOLKOVSKY
Kyiv

THE CONSTRUCTION OF THE DISCRETE INTERPOLATION OF MULTIVARIABLE MODELS OF OBJECTS, SYSTEMS AND ENVIRONMENTS

Given the construction of discrete interpolation geometric models of complex objects, systems and environments based on the non-traditional discrete-interpolation approach.

Key words: interpolation, one-parameter set, the host interpolated, discrete features, multivariate interpolation, discrete-interpolation matrix.

Юрий ХОЛКОВСКИЙ
г. Киев

ПОСТРОЕНИЕ ДИСКРЕТНО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, СИСТЕМ И СРЕД

Рассмотрено построение дискретно-интерполяционных геометрических моделей сложных объектов, систем и сред на основе нетрадиционного дискретно-интерполяционного подхода.

Ключевые слова: интерполяция, однопараметрическое множество, узел интерполяции, дискретные функции, многомерная интерполяция, дискретно-интерполяционная матрица.

Стаття надійшла до редколегії 29.02.2016