ISSN 2520-2820 (online)
ISSN 2524-0978 (print)

УДК 514.18

Юрій ХОЛКОВСЬКИЙ
profiz@ukr.net
ORCID: 0000-0002-5081-3582
м. Київ

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТО ПАРАМЕТРИЧНИХ СЕРЕДОВИЩ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ N-ВИМІРНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Наведено геометричне моделювання складних систем та середовищ на основі нетрадиційного дискретно-інтерполяційного методу із використанням n-вимірної інтерполяції.

***Ключові слова**: інтерполяція, однопараметричні множини, дискретні функції, багатовимірна інтерполяція, дискретно-інтерполяційна матриця.*

Постановка проблеми

Математичне моделювання стану багатопараметричних систем, процесів та середовищ, наприклад, екологічних, енергетичних, кліматичних, гідрологічних, геоморфологічних, геологічних систем, із можливістю прогнозування їх стану, є доволі складною задачею. Такі системи або середовища мають доволі складну структуру, велику кількість різноякісних параметрів. Більш того, ці параметри ще й мають певну анізотропність у просторі та часі. Відповідно, побудова математичних моделей таких систем та середовищ – досить складна задача. Додамо ще сучасну глобальну кризову ситуацію щодо деструктивного впливу людства на навколишнє середовище, і стає зрозумілим, що дослідження, пов'язані з розвитком методів моделювання складних багатопараметричних процесів, систем та середовищ, прогнозуванням їх стану набувають дуже важливого значення.

Моделювання з можливістю прогнозування, контроль стану різних компонентів таких систем та середовищ можна віднести до багатопараметричних і стохастичних процесів, що, у свою чергу, свідчить, що моделювання систем та середовищ, які не піддаються аналітичному опису, за допомогою континуальних моделей просто неможливе. Також зазначимо, що параметри таких середовищ є суттєво неоднорідними й переважно залежать від зовнішніх факторів, які, часом, просто неможливо передбачити.

Певні параметри та компоненти багатопараметричних систем, процесів та середовищ вимірюються в певний час та в конкретному місці. Отже, така інформація носить чітко виражений дискретний характер. Зрозуміло, що питання розробки раціональних алгоритмів побудови математичних моделей багатопараметричних систем, процесів та середовищ, а також прогнозування їх стану є актуальними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У науковій періодиці відносно рідко зустрічаються окремі випадки математичного, а саме геометричного моделювання багатопараметричних систем і середовищ. Насамперед це стосується таких багатопараметричних систем і середовищ, як, наприклад, екологічні, які відрізняються великою кількістю різноякісних параметрів, своєю стохастичністю, і для яких прогнозування стану, як вже зазначалося, є вкрай важливою практичними задачею. Зважаючи на це, можна визначити наступні цілі дослідження.

Постановка завдання

Отже, метою даного дослідження є розробка алгоритмів, методів та дискретних математичних моделей багатопараметричних об'єктів, процесів та середовищ.

Виклад основного матеріалу

Необхідність побудови певної однопараметричної множини виникає у багатьох задачах геометричного моделювання. Наприклад, при побудові деяких гіперповерхонь, як *n*-вимірних моделей певних середовищ. Припущення, що математична модель таких поверхонь повинна бути дискретною є цілком логічним. Добре відомо, що дискретний спосіб представлення математичної (геометричної) інформації про об'єкт, що моделюється, є найбільш універсальним. Такий підхід є більш загальним, тому що від континуальної моделі завжди можна перейти до дискретної.

Підхід щодо моделювання складних багатопараметричних систем, процесів та середовищ, що використовується в даній роботі, зазначимо, як нетрадиційний. Саме розробка нетрадиційних та оптимальних методів математичного, а саме геометричного моделювання зазначених систем та середовищ робить дану роботу актуальною.

Дискретні геометричні моделі вищеназваних об'єктів будуються як деякі однопараметричні множини із використанням певних інтерполяційних схем на основі інтерполяційних поліномів Лагранжа [1-3].

Нетрадиційність підходу, що розглядається, полягає у розумінні під вузлом інтерполяції не точку, а більш складні геометричні об'єкти, наприклад, лінії, поверхні, матриці, тензори, й, навіть, певні системи та середовища, що представлені деякими функціоналами, як сукупність їх властивостей та параметрів. Тоді під схемою інтерполяції будемо розуміти схему розташування саме таких вузлів. Математичні моделі багатоапараметричних систем та середовищ, отримані таким чином, у вигляді одно параметричних множин і є дискретними. Певна дискретна функція або функціонал, представлені у загальному випадку, як дискретний чисельний масив, розмірність якого може варіюватись, є елементом таких множин. Тоді інтерполювання функцій зводиться до розміщення у вузлах інтерполяції дискретних масивів та отримання деякого функціонала. Це дає можливість отримати деякий функціонал $\Phi(p_{i,j})$, з вектором параметрів, що включає в себе інтерполяційний параметр, координатні змінні, параметри, що характеризують форму та положення об'єктів, певні функціональні характеристики середовищ тощо.

Однопараметричні множини, отримані таким чином, є дискретними математичними моделями багатопараметричних об'єктів, процесів, середовищ, а функціонал $\Phi(p_{i,j})$ є елементом таких множин.

Функціонал $\Phi(p_{i,j})$ може бути заданий матрицею $M[i,j]$:

$$F\left(p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_m\right) = M\left[i, j\right]. \quad (1)$$

Розглядаючи (1) у якості певного вузла інтерполяції й використуючи інтерполяційні поліноми Лагранжа, отримаємо $M[i,j]$ як

$$M_n\left[i, j\right] = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\left(i, j\right) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{u - u_j}{u_i - u_j} \quad (2)$$

де n – кількість вузлів інтерполяції, u – параметр $M_i[i, j]$, відповідний проміжному перерізу об'єкта, що моделюється.

Вузлові функції можуть змінювати своє положення у просторі у відповідних носіях-площинах, які, в свою чергу, також можуть змінювати своє положення, впливаючи таким чином безпосередньо на схему інтерполяції і, відповідно, на кінцевий результат моделювання.

На прикладі екологічних систем можемо константувати, що багатопараметричні системи та середовища можуть бути доволі складними структурно й параметрично. Тому використання апарату одновимірної інтерполяції може виявитися просто недостатнім. У таких випадках доцільно використати апарат двовимірної й вище інтерполяції. Ось у чому полягає сутність запропонованого дискретно-інтерполяційного методу моделювання.

Наприклад, для випадку двовимірної інтерполяції можна знайти вид степеневого многочлена $\Phi_{m,n}(u, v)$ степеня m по u та n по v, та визначити значення функціонала F у довільній точці з параметрами (u, v). Це означає, що при двовимірній інтерполяції, с геометричної точки зору, через вузлові точки буде проходити певна поверхня $z = \Phi_{m,n}(u, v)$.

Побудувати регулярну сітку та задавши в її вузлах значення функції z, отримаємо розпадання області на mn прямокутників, в один з яких потрапить точка (u, v) (рис. 1).

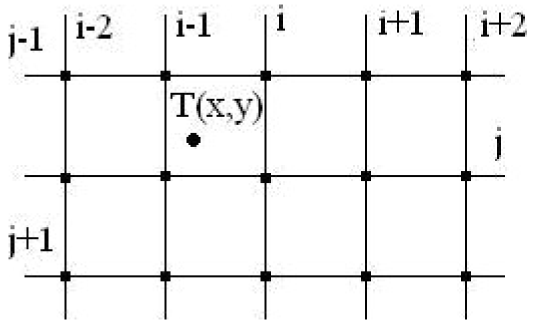

Рис. 1. Регулярна сітка

Надалі відбувається інтерполяція при різних u_i, но фіксованих v_j. При v_{j+1} процедура повторюється.

Таким чином отримуємо 2-вимірну інтерполяцію $\Rightarrow P_{m,n}(x, y)$ степеня m по x і степеня n по $y \Rightarrow z(x, y)$ у довільній точці $T(x, y)$. Через вузлові точки проводиться деяка поверхня $z = P_{m,n}(x, y)$. Отже, отримуємо таку формулу для двовимірної інтерполяції за Лагранжем:

$$P_{m,n}(x, y) = \\ = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} z(x_j, y_j) \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^{m-1} \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^{n-1} \frac{(x - x_i)(y - y_j)}{(x_p - x_i)(y_q - y_j)} \quad (3)$$

Зрозуміло, що даний підхід аналогічно можна розповсюдити й на випадок інтерполяції більшої вимірності.

Тепер розглянемо побудову моделей багатопараметричних систем та середовищ. Нехай $F(p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_m)$ – багатопараметрична неявно задана функція. Сформуємо її у вигляді деякого функціонала $\Phi(p_{i,j})$, що заданий матрицею $M[i, j]$.

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_m) = M[i, j].$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_m$ – екологічні різноструктурні та різноякісні параметри (показники забруднення, рівень концентрації певних речовин, урахування природніх особливостей тощо), а

$$M[i, j] = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m,1} & p_{m,2} & \cdots & p_{m,n} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Тобто, $M[i, j]$ є вузлова дискретно-інтерполяційна екологічна матриця [4].

Розглядаючи (4) як певний вузол інтерполяції, використаємо інтерполяційний поліном Лагранжа та, у випадку одновимірної інтерполяції отримаємо $\Phi(p_{i,j})$ як

$$\Phi(p_{i,j}) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(i, j) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{u - u_j}{u_i - u_j} \quad (5)$$

де u – параметр інтерполяції, наприклад, певний вектор направлености; n – кількість вузлів інтерполяції. Вираз (5), який являє собою узагальнену дискретно-інтерполяційну екоматрицю, і є дискретно-інтерполяційна геометрична модель певної екологічної системи або середовища.

У перспективі зазначимо, що застосування такого підходу щодо моделювання різних об’єктів, явищ і середовищ, що характеризуються великою кількістю різноякісних параметрів, є раціональним.

Висновки і перспективи досліджень

Використовуючи запропонований дискретно-інтерполяційний метод та однопараметричні множини, що формуються певним чином на основі зазначеного підходу, ми отримуємо можливість будувати дискретні математичні моделі складних багатопараметричних систем, процесів та середовищ, які характеризуються великою кількістю параметрів та властивостей, які мають різноманітну структуру та певну анізотропність у просторі та часі. Запропонований метод є доволі алгоритмічним з великими можливостями варіативності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Холковський, Ю.Р. Інтерполяція дискретних масивів у загальному випадку як спосіб моделювання багатопараметричних об'єктів та процесів [Текст] / Ю.Р. Холковський // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип.4 – Т51. – С. 156-160.
2. Холковський, Ю.Р. Моделювання багатопараметричних процесів та систем на основі дискретно-інтерполяційного підходу в екології [Текст] / Ю.Р. Холковський // Праці VIII Всеукраїнських наукових Таліївських читань. – Харків: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2012. – С. 204-208.
3. Холковський, Ю.Р. Дискретно-интерполяционный поход при моделировании многопараметрических экологических систем [Текст] / Ю.Р. Холковський // Сборник материалов 9-ой Международной конференции «Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики». – Минск, 2013. – С. 268-272.
4. Холковський, Ю.Р. Дискретно-інтерполяційна екоматриця як геометрична модель багатопараметричних процесів та систем в екології [Текст] / Ю.Р. Холковський // Збірник наукових праць «Прикладная геометрия и инженерная графика». – Вип. 5. – Мелитополь: ТГАТУ, 2013. – С. 183-188.

Yuriy KHOLKOVSKY
Kyiv

GEOMETRICAL MODELING OF MULTI-PARAMETER ENVIRONMENTS USING N-DIMENSIONAL INTERPOLATION

Geometric modeling of complex systems and environments based on an unconventional method using n-dimensional interpolation is considered.

Keywords: *interpolation, one-parameter set, discrete features, multivariate interpolation, discrete-interpolation matrix.*

Юрий ХОЛКОВСКИЙ
Киев

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СРЕД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ N-МЕРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Рассмотрено геометрическое моделирование сложных систем и сред на основе нетрадиционного метода с использованием n-мерной интерполяции.

Ключевые слова*: интерполяция, однопараметрические множества, дискретные функции, многомерная интерполяция, дискретно-интерполяционная матрица.*

Стаття надійшла до редколегії 29.10.2018