


DOI 10.36074/grail-of-science.10.11.2023.20

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ БЕЗПЕКОЮ КОНГЛОМЕРАЦІЇ ОБ'ЄКТІВ КРИТИЧНОЇ ІНФРАСТРУКТУРИ, ЩО ОХОРОНЯЮТЬСЯ

НАУКОВО-ДОСЛІДНА ГРУПА:

Азаренко Олена Василівна 


доктор фізико-математичних наук, професор, заступник керівника
Науково-дослідний лабораторно-експериментальний центр
«БРАНД ТРЕЙД», Україна

Гвоздь Віктор Михайлович 

кандидат технічних наук, професор, начальник інституту
Черкаський інститут пожежної безпеки імені Героїв Чорнобиля
Національного університету цивільного захисту України

Гончаренко Юлія Юріївна 


доктор технічних наук, доцент, професор кафедри
Європейський університет, Україна

Дівізінюк Михайло Михайлович 

доктор фізико-математичних наук, професор,
головний науковий співробітник
Державна установа «Інститут геохімії навколишнього середовища НАН
України», Україна

Мирошник Олег Миколайович 

доктор технічних наук, професор, заступник начальника інституту з
навчальної та наукової роботи
Черкаський інститут пожежної безпеки імені Героїв Чорнобиля
Національного університету цивільного захисту України, Україна

Фаррахов Олександр Володимирович 

кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник
Державна установа «Інститут геохімії навколишнього середовища НАН
України», Україна

Анотація. *Дається опис розробленої математичної моделі оптимального управління безпекою конгломерації об'єктів критичної інфраструктури, що охороняються. Модель представляє систему, що складається з двох підсистем.*

Перша підсистема включає два варіанти. Перший, коли конгломерація об'єктів критичної інфраструктури, що охороняються, функціонує в повсякденному режимі з використанням чергових засобів забезпечення безпеки. Другий, коли конгломерація переводиться в режим найвищої готовності до відбиття терористичного впливу. Друга також включає два варіанти, коли конгломерація в стані відбиття терористичного впливу. У першому варіанті, коли терористична дія розподілена по всіх об'єктах конгломерації. Другий, коли терористичне вплив зосереджено на одному (або кількох) об'єктах конгломерації.

Ключові слова: *критична інфраструктура, конгломерація об'єктів, терористичний вплив, управління безпекою, засоби безпеки.*

Вступ

Захист об'єктів критичної інфраструктури держави від терористичного впливу – одне із завдань забезпечення державної безпеки України [1-3]. Для вирішення цього завдання та інших приватних завдань щодо забезпечення безпеки на об'єктах критичної інфраструктури, що охороняються, є спеціальні служби фізичного захисту або служби безпеки об'єктів [4,5]. Загалом, вони призначені для виявлення вторгнення, його затримки та нейтралізації [6-8], а в умовах широкомасштабного вторгнення в Україну, для своєчасного виявлення терористичних атак, відбиття (нейтралізації) терористичного впливу, локалізації та ліквідації наслідків у разі їх настання. Відома математична модель забезпечення найбільшої безпеки стратегічного об'єкту, що охороняється при ліміті виділених коштів [9], яка є теоретичним рішенням для одиночного об'єкту. Її суть полягає в мінімізації витрат на забезпечення безпеки об'єкту критичної інфраструктури, що охороняється. Безпека об'єкту, що охороняється, оцінюється ризиком настання будь-якої (самої неймовірної, гіпотетичної, яка іноді межує з фантастикою) катастрофічної події. Загальні або сумарні витрати, які йдуть на забезпечення безпеки об'єкту, що охороняється, складаються з двох складових. Перша – це витрати на запобігання чи недопущення катастрофічної події. Друга – це витрати на ліквідацію наслідків у разі настання цієї катастрофічної події [10].

Метою даної роботи є розгляд математичної моделі оптимального управління безпекою конгломерації об'єктів критичної інфраструктури, що охороняються, тобто сукупності взаємопов'язаних основних виробництв, допоміжних підприємств, що забезпечують структури або житлові масиви, які розташовані разом на обмеженій території (наприклад, як електростанція та місто-супутник, або прибережне місто-порт).

Викладення основного матеріалу

Для кожної гіпотетичної катастрофічної події існує певна (оптимальна) величина ризику настання катастрофічної події, яка відповідає мінімуму сумарних витрат. Цей мінімум сумарних витрат, який прийнято називати лімітом виділених коштів на забезпечення безпеки об'єкту, що охороняється, у свою чергу забезпечує реальну (рахункову) чисельну характеристику N_0 , яка

враховує всі кошти, що приймають участь у забезпеченні безпеки об'єкту. У загальному випадку кінцева множина N_0 складається з трьох підмножин (1) тобто

$$N_0 = N_{01} + N_{02} + N_{03} \quad (1)$$

Тут перша підмножина – це засоби виявлення небезпеки. Друга – засоби запобігання (знищення) небезпеки. Третя – засоби ліквідації наслідків у разі настання небезпеки.

У першу підмножину засобів забезпечення безпеки об'єкту, що охороняється, входять засоби виявлення ракет і безпілотних літальних апаратів (БПЛА). Це може бути найширший спектр стаціонарних, мобільних та переносних радіотехнічних засобів виявлення повітряних цілей. Вони можуть реалізовувати електромагнітні (радіолокаційні), інфрачервоні (теплові), акустичні, оптоелектронні, оптичні та інші активні та пасивні методи виявлення. Це не лише сама технічно справна електронна система, а й розрахунок, що забезпечує її застосування за прямим призначенням. Цей розрахунок повинен мати кілька змін, щоб ця технічна система могла функціонувати досить тривалий час (сотні годин).

Друга підмножина – це засоби запобігання (знищення) небезпеки. Це можуть бути різні стаціонарні, пересувні і переносні зенітні ракетні комплекси (ЗРК), призначені для знищення різних повітряних цілей. Це можуть бути великокаліберні та малокаліберні зенітні гармати. Це можуть бути стаціонарні та мобільні позиції, оснащені зенітною стрілецькою зброєю (великокаліберними кулеметами). Це можуть бути засоби радіоелектронної боротьби (РЕБ) та маскування. Як і першому підмножині, складові елементи другої підмножини це, як технічно справні вогневі системи, так й їх розрахунки, які забезпечують їх застосування за прямим призначенням. Цей розрахунок повинен мати кілька змін, щоб ця технічна система могла працювати досить тривалий час.

Третя підмножина – це засоби ліквідації наслідків у разі настання небезпеки. Навіть у загальному випадку це підмножина складається з трьох груп. Перша це пожежні та рятувальні розрахунки зі своїми технічними засобами. Це пожежні та спеціальні інженерні машини, а також спеціальна техніка, призначена для знешкодження боєприпасів, що не розірвалися, та інших вибухових речовин. Ці розрахунки так само повинні бути в постійній готовності і мати здатність ліквідувати наслідки катастрофічних подій тривалий період часу. Друга група – це інженерна техніка, що використовується для розбору завалів та вилучення (порятунку) людей з-під завалів. Як правило, це пересувні екскаватори, автокрани, мобільні підйомники та інше. Третя група – це автомобілі швидкої медичної допомоги з бригадами медиків. Вони призначені як для надання першої медичної допомоги потерпілим на місці, так і для евакуації поранених до медичних закладів.

Принцип (метод) Пампуро дозволяє розглядати технологічний об'єкт, з позицій забезпечення безпеки, як абстрактний гіпотетичний об'єкт, структура якого складається з елементарних елементів, за прикладом електронної схеми. Це дозволило одиничний об'єкт критичної інфраструктури, що охороняється, розглядати як чотириполюсник. Його стан описується двома характеристиками.

Перша – це частотна характеристика абстрактного чотириполюсника при впливі адитивного інформаційного потоку, що складається з потоку корисної інформації та інформаційного шуму. Друга – це оптимальна характеристика абстрактного чотириполюсника, яка визначається методом Пампура.

Тепер в основу математичної моделі оптимального управління безпекою конгломерації об'єктів критичної інфраструктури, що охороняються, входять абстрактні чотириполюсники, кожен з яких відповідає конкретному об'єкту, що охороняється, що входить у розглянуту конгломерацію. Абстрактні чотириполюсники, з'єднані паралельно, тобто інформаційний потік, що надходить на вхід одного чотириполюсника, дублюється на решту. Виходи всіх абстрактних чотириполюсників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, пов'язані з підсумовуючим абстрактним багатополюсником, як показано на рис. 1.

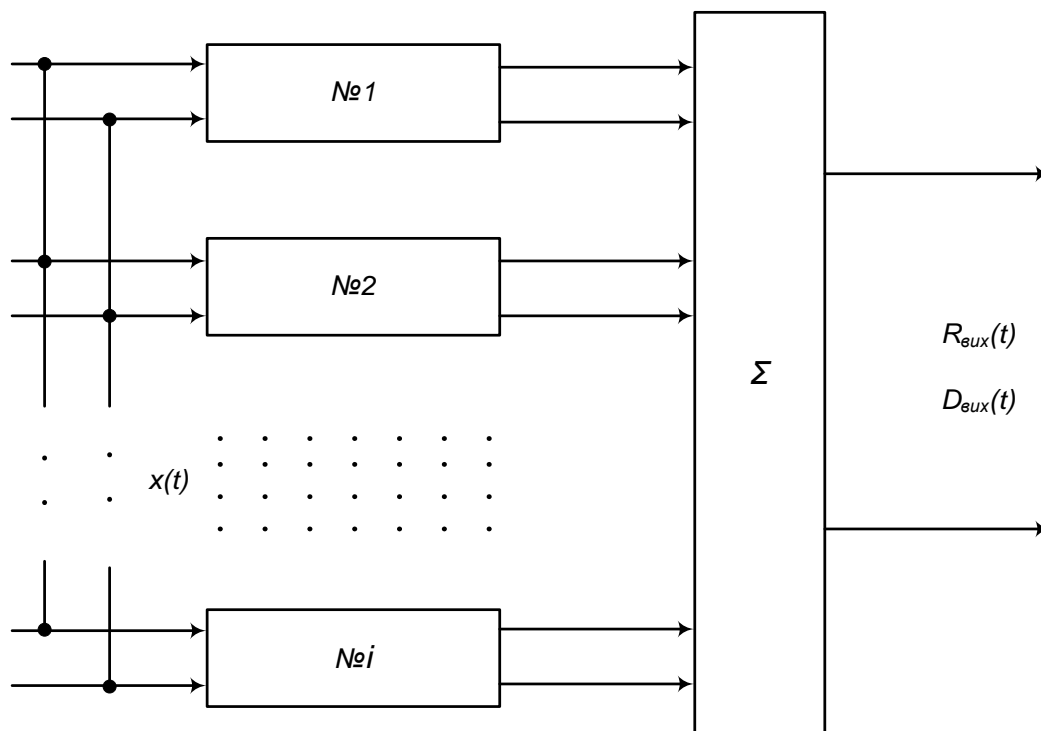


Рис. 1. Схема чотириполюсників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури

Цей абстрактний багатополюсник фактично є пунктом ухвалення рішень або пунктом управління безпекою конгломерації об'єктів.

Відповідно, якщо один абстрактний чотириполюсник має дві специфічні характеристики N_0 і T_0 , перша з яких враховує всі засоби, що беруть участь у забезпечення безпеки об'єкту, а друга – визначається за методом Пампура, як добуток оптимальної величини ризику на величину мінімальної вартості, такими ж характеристиками володіє і система, що складається з абстрактних чотириполюсників і багатополюсника, що підсумовує. Це будуть N_{Σ} і T_{Σ} . Тут перша характеристика визначається сукупністю властивостей конгломерації з k об'єктів, тобто

$$N_{\Sigma} = \sum_{i=1}^k N_{0i} . \quad (2)$$

T_{Σ} і T_0 параметри, що визначаються методом Пампуро. Виходячи з того, що чотириполіусники, які входять до конгломерації об'єктів критичної інфраструктури, мають ідентичні параметри, їх чисельні значення визначаються залежністю (3)

$$T_{\Sigma} = R_{\Sigma} C_{\Sigma} ; \quad C_{\Sigma} = \sum_{i=1}^k C_{0i} \quad (3)$$

і залежністю (4)

$$T_0 = T_{0i} = R_{0i} C_{0i} \quad (4)$$

Необхідно додати, що в умовах системи з конгломерації об'єктів критичної інфраструктури всі засоби забезпечення безпеки, що належать кожному об'єкту, що охороняється, використовуються в інтересах всіх об'єктів.

Це початкові умови розробки шуканої математичної моделі.

Граничні умови формується при формулюванні варіантів умов вирішення конкретних завдань (розвитку варіантів надзвичайних ситуацій терористичного характеру) на конгломерації об'єктів критичної інфраструктури, що охороняються, представлені у вигляді системи, що складається з сукупності абстрактних чотириполіусників і абстрактного багатополіусника.

Тут існують дві принципові ситуації.

В першій ситуації два варіанти. Перший, коли конгломерація об'єктів критичної інфраструктури, що охороняються, функціонує в повсякденному режимі з використанням чергових засобів забезпечення безпеки. Другий, коли конгломерація об'єктів критичної інфраструктури, що охороняються, з режиму функціонування у повсякденному режимі з використанням чергових засобів забезпечення безпеки переводиться в режим найвищої готовності до відбиття терористичного впливу.

У другій ситуації конгломерація об'єктів критичної інфраструктури, що охороняються, перебуває в найвищому ступені готовності і здійснює відбиття терористичного впливу. Тут також два варіанти. Перший, коли терористичний вплив розподілено за всіма об'єктами (або частинами) конгломерації. Другий, коли терористичне вплив зосереджено на одному (чи кількох) об'єктах конгломерації.

Перший варіант першої ситуації. У цій задачі на вхід системи надходить вхідний адитивний інформаційний потік з математичним очікуванням (5) та кореляційною функцією (6)

$$m_s(t) = \sin \beta t \quad (5)$$

$$R_s(t_1, t_2) = D_s e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2} \quad (6)$$

Випадковий процес на виході системи $\eta(t)$ пов'язаний із вхідним впливом $s(t)$ оператором диференціювання (7)

$$\eta(t) = L(p, t) s(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad (7)$$

Застосовуючи стандартні перетворення отримаємо математичне очікування на виході системи (8) та кореляційну функцію вихідного процесу (9)

$$m_{\eta}(t) = \frac{dm_s(t)}{dt} = \beta \cos \beta t \quad (8)$$

$$R_{\eta}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_s(t_1, t_2) = 2D_s \alpha [1 - 2\alpha(t_2 - t_1)^2] \exp[-\alpha(t_2 - t_1)^2] \quad (9)$$

Беручи до уваги зв'язок між кореляційною функцією та дисперсією випадкового процесу, а також вважаючи рівними $t_2 = t_1 = t$, знайдемо значення дисперсії вихідного процесу (10)

$$R_{\eta}(t, t) = D_{\eta}(t) = 2\alpha D_s \quad (10)$$

Об'єднуючи (8) і (10) в систему отримаємо розв'язок першого завдання з пошуку математичного очікування та дисперсії на виході чотириполіусників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури при дії гармонійного вхідного адитивного інформаційного потоку, тобто (11)

$$\left. \begin{aligned} m_{\eta}(t) &= \beta \cos \beta t \\ R_{\eta}(t, t) &= 2\alpha D_s \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

де β – величина, що визначається інформаційним потоком, що надходить на вхід системи,

α – постійний коефіцієнт чотириполіусника, що обчислюється з оптимальної характеристики абстрактного чотириполіусника, що визначається за методом Пампура, $T_0 = \frac{1}{\alpha}$.

Другий варіант першої ситуації. в цьому варіанті на вхід системи, починаючи з моменту t_0 починає впливати адитивний інформаційний потік $s(t)$, який складається з сукупності корисного інформаційного потоку та інформаційного шуму. Нехай система чотириполіусників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, описується диференціальним рівнянням (12)

$$\frac{d\eta(t)}{dt} + \alpha \eta(t) = \alpha s(t) \quad (12)$$

Виходячи з допущень, система починає функціонувати в момент часу t_0 . Тоді в цей момент часу вихідний процес визначатиметься як $\eta(t)$. В загальному випадку значення вихідного процесу на виході системи може бути відмінним від нуля і носити як детермінований, так і випадковий характер.

Математичне очікування випадкового процесу на виході системи чотириполіусників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, матиме вигляд (13)

$$m_{\eta}(t) = m_s(1 - e^{-\alpha t}) \quad (13)$$

Дослідження цієї залежності показує, що математичне очікування процесу на виході системи визначається співмножником $(1 - e^{-\alpha t})$. У момент часу $t = \alpha$ поточне значення математичного очікування становить 0,64 від m_{η} . Коли відлік поточного часу складає $t = 2\alpha$ значення математичного очікування

збільшується до 0,87 від m_η . При $t = 3\alpha$ поточне значення математичного очікування становить 0,95 від m_η . Іншими словами, з моменту початку роботи системи із сукупності чотиріполіусників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, режим роботи, що встановився, настає через інтервал часу рівний трьом α .

Кореляційна функція вихідного процесу на виході системи чотиріполіусників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, описується (14)

$$R_\eta(t, t_1) = \alpha^2 e^{-\alpha(t+t_1)} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)} R_s(y-x) dx dy \quad (14)$$

Виконуючи ряд перетворень, та здійснюючи заміну $t = t_1 \pm \tau$, отримаємо залежність (15)

$$R_\eta(t, \tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|\tau|} (1 - e^{-2\alpha\tau}) \quad (15)$$

Отримане значення кореляційної функції вихідного процесу сукупності чотиріполіусників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, те, що $\tau = 0$ дозволяє у свою чергу визначити зміну дисперсії вихідного процесу, тобто (16)

$$D_\eta(t) = \frac{\alpha N_0}{4} (1 - e^{-2\alpha t}) \quad (16)$$

Дослідження цієї залежності показує, що дисперсія вихідного процесу наростатиме з часом. Коли проміжок часу становитиме $\frac{\alpha}{2}$ – значення дисперсії досягне 0,64 від її найбільшого значення. При збільшенні проміжку часу роботи системи з моменту запуску до рівної величини α , значення дисперсії досягне 0,87 від її найбільшого значення. І лише через проміжок часу рівний $\frac{3\alpha}{2}$ – значення дисперсії досягне 0,95 від її найбільшого значення, тобто система почне функціонувати в режимі, що встановився.

Об'єднуючи вирази (13) і (15) отримаємо систему (17)

$$\left. \begin{aligned} m_\eta(t) &= m_s (1 - e^{-\alpha t}) \\ R_\eta(t, \tau) &= \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|\tau|} (1 - e^{-2\alpha\tau}) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

яка є вирішенням задачі щодо визначення математичного очікування та кореляційної функції на виході системи чотиріполіусників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, при впливі адитивного інформаційного вхідного потоку з невідомими параметрами. Дослідження цих залежностей показує, що з початку функціонування системи необхідний певний проміжок часу, кратний α , який обчислюється з оптимальної характеристики абстрактного чотиріполіусника, що визначається за методом Пампура, тобто

$$T_0 = \frac{1}{\alpha} .$$

Поєднуючи разом системи (11) і (17), що описують стан системи чотириполюсників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, у першому та другому варіанті отримуємо систему, що описують першу ситуацію функціонування системи, тобто (18)

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{\eta}(t) = \beta \cos \beta t \\ R_{\eta}(t, t) = 2\alpha D_s \\ m_{\eta}(t) = m_s(1 - e^{-\alpha t}) \\ R_{\eta}(t, \tau) = \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|\tau|} (1 - e^{-2\alpha t}) \end{array} \right\} \quad (18)$$

Перший варіант другої ситуації. Нехай на вхід системи впливатиме адитивний інформаційний потік $s(t)$, який складається з корисного інформаційного потоку та інформаційного шуму. Математичне очікування вхідного потоку дорівнює нулю ($m_s = 0$), а кореляційна функція вхідного інформаційного процесу визначається здатністю (адаптацією, сукупністю властивостей конгломерації з k об'єктів ($N_{\Sigma} = \sum_{i=1}^k N_{0i}$)) до прийому інформації, що надходить, яка визначається залежністю (19)

$$R_s(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \quad (19)$$

Нехай система чотириполюсників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, описується диференціальним рівнянням (20)

$$\eta(t) = \frac{T_{\Sigma} p + 1}{T_0 p + 1} s(t) = L(p)s(t) \quad (20)$$

де T_{Σ} і T_0 – коефіцієнти, що визначаються методом Пампура.

У загальному випадку комплексна частотна характеристика системи визначатиметься як (21)

$$K(jw) = L(p = jw) = \frac{1 + jwT_{\Sigma}}{1 + jwT_0} \quad (21)$$

а квадрат її модуля (22)

$$|K(jw)|^2 = \frac{1 + (wT_{\Sigma})^2}{1 + (wT_0)^2} \quad (22)$$

Виходячи з вищевикладеного, отримуємо залежність опису спектральної щільності вихідного процесу на виході системи, що аналізується (23)

$$S_{\eta}(w) = \frac{N_{\Sigma}}{2} \frac{1 + (wT_{\Sigma})^2}{1 + (wT_0)^2} \quad (23)$$

З цієї залежності видно, що при $w \rightarrow \infty$ спектральна щільність прагне до деякого постійного рівня (24)

$$S_{\eta}(w) = \frac{N_{\Sigma} T_{\Sigma}^2}{2T_0^2} \quad (24)$$

Для обчислення кореляційної функції скористаємося формулою Вінера-Хінчина (25)

$$R_{\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\eta}(w) e^{iw\tau} dw \quad (25)$$

Виконавши підстановку та заміну (26),

$$e^{jw\tau} = \cos w\tau + j \sin w\tau \quad (26)$$

будемо мати (27)

$$R_{\eta}(\tau) = \frac{N_{\Sigma}}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+(wT_{\Sigma})^2}{1+(wT_0)^2} \cos w\tau dw + j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+(wT_{\Sigma})^2}{1+(wT_0)^2} \sin w\tau dw \right] \quad (27)$$

У (27) другий інтеграл, через непарність підінтегральної функції і симетричності меж інтегрування, дорівнюватиме нулю. Тоді (27) буде приводиться до вигляду (28)

$$R_{\eta}(\tau) = \frac{N_{\Sigma}}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos w\tau}{1+(wT)^2} dw + \frac{T_{\Sigma}^2}{T^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos w\tau dw - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos w\tau}{1+(wT)^2} dw \right] \right\} \quad (28)$$

Враховуючи (29)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos w\tau dw = \delta(\tau) \quad (29)$$

і (30)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos w\tau}{1+(wT)^2} dw = \frac{\pi}{T} e^{-\frac{|\tau|}{T}} \quad (30)$$

остаточно отримуємо значення кореляційної функції (31)

$$\begin{aligned} R_{\eta}(\tau) &= \frac{N_{\Sigma}}{2} \left(\frac{T_{\Sigma}}{T} \right)^2 \delta(\tau) + \frac{N_{\Sigma}}{4T} \frac{|T^2 - T_{\Sigma}^2|}{T^2} e^{-\frac{|\tau|}{T}} = \\ &= \frac{N_{\Sigma}}{4T^3} \left[2TT_{\Sigma}^2 \delta(\tau) + |T^2 - T_{\Sigma}^2| e^{-\frac{|\tau|}{T}} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

При $\tau \rightarrow 0$ дельта функція прагне нескінченності і перший доданок (31) досягає свого найбільшого значення. У цій ситуації ступенева функція у другому доданку дорівнює одиниці, що у свою чергу забезпечує найбільше значення другого доданку (31). Зважаючи на те, що абсолютна величина різниці квадратів T і T_{Σ} , набагато менше їх добутку, можна зробити висновок, що при $\tau \rightarrow 0$ значення кореляційної функції вихідного процесу на виході системи буде найбільшим, і визначатиметься головним чином першим доданком, тобто (32)

$$R_{\eta}(0) = \frac{N_{\Sigma}T_{\Sigma}^2}{2T^2} \delta(\tau) \quad (32)$$

За будь-якого значення τ , відмінному від нуля, значення дельта-функції дорівнює нулю, що перетворює на нуль перший доданок (31). Кореляційна функція в цьому випадку визначатиметься другим доданком та її значення становитиме (33)

$$R_{\eta}(\tau) = \frac{N_{\Sigma} |T^2 - T_{\Sigma}^2|}{4T^3} \quad (33)$$

Тепер об'єднуючи залежність (24) і залежність (33) в одну систему, отримаємо розв'язок задачі щодо визначення спектральної щільності та кореляційної функції на виході системи чотиріполюсників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, при дії адитивного інформаційного вхідного потоку, тобто (34)

$$\left. \begin{aligned} S_{\eta}(w) &= \frac{N_{\Sigma} T_{\Sigma}^2}{2T_0^2} \\ R_{\eta}(\tau) &= \frac{N_{\Sigma} |T^2 - T_{\Sigma}^2|}{4T^3} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Другий варіант другої ситуації. Нехай, починаючи з моменту $t = 0$ на вхід системи чотиріполюсників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, впливає стаціонарний Гаусівський процес з кореляційною функцією виду (35)

$$R_s(\tau) = D_s e^{-\beta|\tau|} \quad (35)$$

Нехай процес на виході системи описується залежністю (36)

$$\eta(t) = \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha x} s(x) dx \quad (36)$$

де α – постійний коефіцієнт чотиріполюсника, який визначається оптимальною характеристикою абстрактного чотиріполюсника (який обчислюється за методом Пампура як $T_0 = \frac{1}{\alpha}$).

Тоді математичне очікування вихідного процесу визначатиметься залежністю (37)

$$m_{\eta}(t) = m_s (1 - e^{-\alpha t}) \quad (37)$$

Роблячи ще одне припущення, що математичне очікування вхідного процесу дорівнює нулю, то, як впливає з (37), математичне очікування вихідного процесу так само дорівнює нулю. Це дозволяє визначити кореляційну функцію на виході системи залежністю (38)

$$R_{\eta}(t, t_1) = \alpha^2 e^{-\alpha(t+t_1)} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y)} R_s(y-x) dx dy \quad (38)$$

Оскільки кореляційна функція вхідного процесу визначається залежністю (35), то (38) перетворюється на такий вигляд (39)

$$R_{\eta}(t, t_1) = \alpha^2 D_s e^{-\alpha(t+t_1)} \int_0^t \int_0^{t_1} e^{\alpha(x+y) - \beta|y-x|} dx dy \quad (39)$$

Виконавши низку послідовних перетворень, отримаємо підсумкову залежність кореляційної функції вихідного процесу на виході системи чотиріполюсників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури (40)

$$R_{\eta}(t, \tau) = \frac{\alpha^2 D_s}{\beta^2 - \alpha^2} \left\{ \frac{\beta}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) e^{-\alpha|\tau|} + [e^{-(\alpha+\beta)t} - e^{-2\alpha t}] e^{-\alpha|\tau|} - [1 - e^{-(\alpha+\beta)t}] e^{-\beta|\tau|} \right\} \quad (40)$$

Внаслідок того, що система чотирьох полюсників, які утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, повинна функціонувати в режимі, тобто в ситуації, коли $t \rightarrow \infty$, кореляційна функція вихідного процесу набуде вигляду (41)

$$R_{\eta}(\tau) = \frac{\alpha^2 D_s}{\beta^2 - \alpha^2} (\beta e^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-\beta|\tau|}) \quad (41)$$

Відповідно дисперсія вихідного процесу в режимі, що встановився, набуде вигляду (42)

$$D_{\eta} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} D_s \quad (42)$$

При імпульсному впливі, наприклад, дельта-функція будемо мати кореляційну функцію (43)

$$R_{\eta}(\tau) = \frac{N_{\Sigma}}{2} \int_0^{\infty} h(x) h(|\tau| + x) dx \quad (43)$$

та дисперсію (44) на виході системи, тобто

$$D_{\eta} = \frac{N_{\Sigma}}{2} \int_0^{\infty} h^2(x) dx \quad (44)$$

Тепер об'єднуючи залежності (41), (42), (43) та (44) в одну систему, отримаємо розв'язок задачі з пошуку кореляційної функції вихідного інформаційного потоку, за умови, що вхідний процес на вході системи чотирьох полюсників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, являє собою процес із заданою кореляційною функцією, тобто (45)

$$\left. \begin{aligned} R_{\eta}(\tau) &= \frac{\alpha^2 D_s}{\beta^2 - \alpha^2} (\beta e^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-\beta|\tau|}) \\ D_{\eta} &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} D_s \\ R_{\eta}(\tau) &= \frac{N_{\Sigma}}{2} \int_0^{\infty} h(x) h(|\tau| + x) dx \\ D_{\eta} &= \frac{N_{\Sigma}}{2} \int_0^{\infty} h^2(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Поєднуючи разом системи (34) і (45), що описують стан системи чотирьох полюсників, що утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, у першому та другому варіанті отримаємо систему, що описує другу ситуацію функціонування системи, тобто (46)

$$\left. \begin{aligned} S_{\eta}(w) &= \frac{N_{\Sigma} T_{\Sigma}^2}{2T_0^2} \\ R_{\eta}(\tau) &= \frac{N_{\Sigma} |T^2 - T_{\Sigma}^2|}{4T^3} \\ R_{\eta}(\tau) &= \frac{\alpha^2 D_s}{\beta^2 - \alpha^2} (\beta e^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-\beta|\tau|}) \\ D_{\eta} &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} D_s \\ R_{\eta}(\tau) &= \frac{N_{\Sigma}}{2} \int_0^{\infty} h(x) h(|\tau| + x) dx \\ D_{\eta} &= \frac{N_{\Sigma}}{2} \int_0^{\infty} h^2(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Отримавши опис всіх варіантів вирішення задачі в першій ситуації (18) і другій ситуації (46), об'єднуючи їх в одну систему, отримуємо шукану математичну модель оптимального управління безпекою конгломерації об'єктів критичної інфраструктури, що охороняються, тобто (47)

$$\left. \begin{aligned} m_{\eta}(t) &= \beta \cos \beta t \\ R_{\eta}(t, t) &= 2\alpha D_s \\ m_{\eta}(t) &= m_s (1 - e^{-\alpha t}) \\ R_{\eta}(t, \tau) &= \frac{\alpha N_0}{4} e^{-\alpha|\tau|} (1 - e^{-2\alpha t}) \\ S_{\eta}(w) &= \frac{N_{\Sigma} T_{\Sigma}^2}{2T_0^2} \\ R_{\eta}(\tau) &= \frac{N_{\Sigma} |T^2 - T_{\Sigma}^2|}{4T^3} \\ R_{\eta}(\tau) &= \frac{\alpha^2 D_s}{\beta^2 - \alpha^2} (\beta e^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-\beta|\tau|}) \\ D_{\eta} &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} D_s \\ R_{\eta}(\tau) &= \frac{N_{\Sigma}}{2} \int_0^{\infty} h(x) h(|\tau| + x) dx \\ D_{\eta} &= \frac{N_{\Sigma}}{2} \int_0^{\infty} h^2(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

де m_{η} – математичне очікування на виході системи;

R_{η} – кореляційна функція на виході системи;

β – величина, що визначається інформаційним потоком, що надходить на вхід системи;

m_s – математичне очікування інформаційного потоку на вході системи;

D_s – дисперсія інформаційного потоку на вході системи;

α – коефіцієнт, що визначається як $T_0 = \frac{1}{\alpha}$, що показує відношення результату

інформаційного впливу на абстрактний чотириполюсник до квадрату мінімальної помилки трансформації всього інформаційного потоку, що проходить через чотириполюсник;

t – поточний час;

N_0 – чисельна характеристика, яка враховує всі засоби, що беруть участь у безпеці одного об'єкту, тобто $N_0 = N_{01} + N_{02} + N_{03}$ де перша підмножина – це засоби виявлення небезпеки, друга – засоби запобігання (знищення) небезпеки, третя – засоби ліквідації наслідків, у разі настання небезпеки;

T_0 – характеристика одного абстрактного чотириполюсника, що визначається за методом Пампуро;

S_η – спектральна щільність вихідного процесу на виході системи;

N_Σ – характеристика, що визначається сукупністю засобів забезпечення безпеки конгломерації з k об'єктів ($N_\Sigma = \sum_{i=1}^k N_{0i}$);

T_Σ – характеристика, що визначається сукупністю властивостей конгломерації з об'єктів, параметри яких визначаються за методом Пампуро;

τ – зсув у часі, що визначається робочим часом системи.

Висновки

Таким чином, розроблена математична модель оптимального управління безпекою конгломерації об'єктів критичної інфраструктури, що охороняються, представляє систему, що описує стан системи з абстрактних чотириполюсників, які утворюють конгломерацію об'єктів критичної інфраструктури, з використанням сумуючих оптимальних частотних і статистичних характеристик абстрактних чотириполюсників. Перша підсистема включає два варіанти. Перший, коли конгломерація об'єктів критичної інфраструктури, що охороняються, функціонує в повсякденному режимі з використанням чергових засобів забезпечення безпеки. Другий, коли конгломерація з режиму функціонування у повсякденному режимі з використанням чергових засобів безпеки переводиться в режим найвищої готовності до відбиття терористичного впливу. У другій підсистемі також два варіанти, коли конгломерація об'єктів критичної інфраструктури, що охороняються, знаходиться в найвищому ступені готовності і здійснює відбиття терористичного впливу. У першому варіанті, коли терористична дія розподілена по всіх об'єктах конгломерації. Другий, коли терористичне вплив зосереджено одному (або кількох) об'єктах конгломерації.

Список використаних джерел:

[1] Объекты стратегического значения. (2002). Вилучено з: <http://surl.li/lrqsa>

- [2] Постанова КМУ від 04.03.2015 р. № 83 (Редакція від 26.08.2021р.). «Про затвердження переліку об'єктів державної власності, що мають стратегічне значення для економіки і безпеки держави». Вилучено з: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/83-2015-p#Text>
- [3] Дівізінюк М.М., Азаренко О.В., Гончаренко Ю.Ю., Шевченко Р.І., Шевченко О.С. (2023). Характеристика об'єктів критичної інфраструктури держави (особливості ядерних та інших стратегічних об'єктів). *Комунальне господарство міст*. Том 1, Випуск 175. 160-168. <https://doi.org/10.33042/2522-1809-2023-1-175-160-168>
- [4] Закон України «Про фізичний захист ядерних установок, ядерних матеріалів, радіоактивних відходів, інших джерел іонізуючого випромінювання». (Редакція від 16.10.2022р.). Вилучено з: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2064-14#Text>
- [5] Конвенція о физической защите ядерного материала и ядерных установок. (2005). Вилучено з: <http://surl.li/lsrhf>
- [6] Азаренко Е.В., Гончаренко Ю.Ю., Дивизинюк М.М., Ожиганова М.И. (2018). *Защита критической инфраструктуры государства от террористического воздействия*. Київ: ИГНС НАНУ.
- [7] Азаренко О.В., Гончаренко Ю.Ю., Дівізінюк М.М., Камишенцев Г.В., Лукашенко В.В. (2023). *Інформаційно-технічні методи забезпечення державної безпеки України. Частина 2. З використанням відеосистем зовнішнього спостереження*. Монографія. Київ. ДУ ІГНС НАН України.
- [8] Азаренко О.В., Гвоздь В.М., Гончаренко Ю.Ю., Дівізінюк М.М., Фаррахов О.В., Сівоха І.М. (2023). Метод побудови систем управління аналоговими об'єктами (метод Пампуро). *Ricerche scientifiche e metodi della loro realizzazione: esperienza mondiale e realtà domestiche: Raccolta di articoli scientifici «ΛΟΓΟΣ» con gli atti della IV Conferenza scientifica e pratica internazionale, Bologna, 29 settembre, 2023. Bologna-Vinnytsia: Associazione Italiana di Storia Urbana & Piattaforma scientifica europea*. 95-99. <https://doi.org/10.36074/logos-29.09.2023.25>
- [9] Азаренко О.В., Гвоздь В.М., Гончаренко Ю.Ю., Дівізінюк М.М., Мирошник О.М., Фаррахов О.В. (2023). Математична модель забезпечення найбільшої безпеки стратегічного об'єкту, що охороняється, при ліміті виділених коштів. *Title of an article. Scientific Collection «InterConf+», 38(175): with the Proceedings of the 7th International Scientific and Practical Conference «International Scientific Discussion: Problems, Tasks and Prospects» (October 19-20, 2023; Brighton, United Kingdom) / comp. by LLC SPC «InterConf». Brighton: A.C.M. Webb Publishing Co Ltd. pp. 417-435. <https://doi.org/10.51582/interconf.19-20.10.2023>*
- [10] Азаренко О.В., Гвоздь В.М., Гончаренко Ю.Ю., Дівізінюк М.М., Фаррахов О.В., Сівоха І.Г. (2023). Основні положення концепції максимальної безпеки ядерного об'єкту при мінімумі витрат. *Міжнародний науковий журнал «Грааль науки» № 32 (жовтень, 2023) : за матеріалами VI Міжнародної науково-практичної конференції «Globalization of scientific knowledge: international cooperation and integration of sciences», що проводилася 13 жовтня 2023 року ГО «Європейська наукова платформа» (Вінниця, Україна) та ТОВ «International Centre Corporative Management» (Відень, Австрія)*. С.101-109. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.13.10.2023.018>