

DOI 10.36074/grail-of-science.10.11.2023.41

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИЧНОЇ СИСТЕМИ ЛІНЗА-ДЗЕРКАЛО І РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

НАУКОВО-ДОСЛІДНА ГРУПА:

Безперстова Людмила Сергіївна

вчитель-методист, вчитель фізики та математики
ЗОШ I-III ступенів № 3 імені В.О.Нижниченка, Україна

Гулий Юрій Володимирович

вчитель-методист, вчитель фізики та математики
ЗОШ I-III ступенів № 2, Україна

Гулий Роман Юрійович

старший вчитель, вчитель фізики
ЗОШ I-III ступенів № 6, Україна

Шут Андрій Вадимович

здобувач середньої освіти
ЗОШ I-III ступенів № 3 імені В.О.Нижниченка, Україна

Анотація. У статті досліджено способи побудови зображень в оптичних системах, що складаються зі збірної лінзи та плоского дзеркала. За допомогою графічного калькулятора *desmos* отримано математичну модель побудови зображень в оптичній системі лінза-дзеркало. Така модель визначає розміщення та властивості кінцевого зображення, що дає система, проміжних зображень, що дають лінза та дзеркало окремо. Крім цього, можна з'ясувати, як змінюватиметься положення та властивості зображення при зміні параметра (розміщення дзеркала відносно лінзи) за допомогою функціональних залежностей. Побудована математична модель оптичної системи лінза-плоске дзеркало може бути не лише помічником при розв'язуванні складних задач на оптичні системи, але також слугувати ключем для генерування нових задач з геометричної оптики.

Ключові слова: система лінза-дзеркало, математична модель, рівняння з параметром, функціональна залежність, побудова, формула лінзи.

Розв'язання хорошої задачі є складним процесом, що потребує гнучкості мислення, зосередження уваги, глибокого розуміння процесів. Задачі з геометричної оптики, зокрема на системи, що складаються з лінз та дзеркал, вимагають не лише розуміння законів геометричної оптики, але і знань з математики про функціональні залежності, рівняння з параметром та вміння їх застосовувати.

Наведемо приклад однієї задачі з розділу «Геометрична оптика», що була запропонована на зовнішньому незалежному оцінюванні учнів у 2016 році (додаткова сесія, задача № 26): за збиральною лінзою з фокусною відстанню 10 см на відстані 5 см розташували плоске дзеркало перпендикулярно до головної оптичної осі лінзи. Світло проходить через лінзу, відбивається від дзеркала і знову проходить через лінзу. На якій відстані від лінзи знаходиться зображення предмета, розташованого перед лінзою на відстані 5 см? Яке збільшення дасть така система?

Розв'язати задачу можна кількома способами: за допомогою променів та за допомогою формули лінзи. Ці два підходи ми реалізували, побудувавши математичні моделі для оптичної системи збирна лінза – плоске дзеркало у графічному калькуляторі desmos. Їх можливості, такі як змінювати положення, розміри плоского дзеркала та предмета, виділяти зону зображень, демонструвати проміжні зображення, визначати координати точок, а, отже, збільшення предмета, розширюють межі застосування до розв'язання різних задач.

Авторами побудована модель 1 [1]: побудова зображення предмета в системі збирна лінза – плоске дзеркало за допомогою променів. Як працює модель, переконаємося, застосувавши умову вище наведеної задачі. Промені, що вийшли з точки В, проходять, заломлюючись через лінзу, відбиваються від плоского дзеркала, знову заломлюються в лінзі, отримуємо кінцеве дійсне збільшене зображення S_3 в системі лінза-дзеркало та два проміжних: уявне зображення S_1 , утворене лінзою, уявне зображення S_2 , утворене дзеркалом (рис. 1). Визначаємо відстань від зображення S_3 до лінзи – 20 см та збільшення предмета – 2.

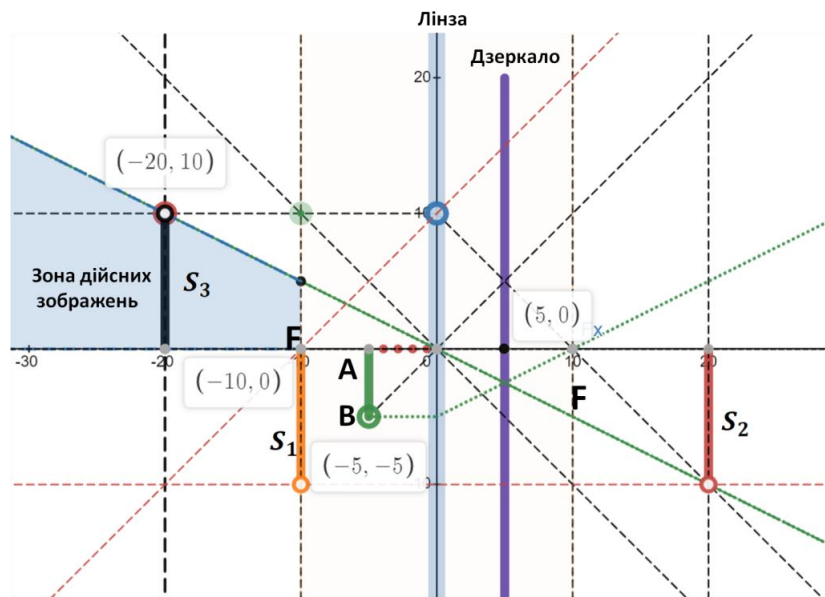


Рис. 1. Побудова зображень в системі лінза-дзеркало за допомогою променів в графічному редакторі desmos (задача 1)

Розв'язання задачі на побудову зображення в системі лінза-дзеркало за допомогою побудови променів креслярськими інструментами потребує затрат часу. Спосіб розв'язання один, але кожна задача має свій розв'язок. Застосування створеної нами математичної моделі є інструментом для швидкого розв'язання будь-якої задачі такого типу.

Авторами побудована модель 2 [2]: функціональна залежність відстані від кінцевого зображення до лінзи A від відстані від предмета до лінзи d .

Застосовуючи формулу лінзи та закони відбивання світла від плоского дзеркала, отримали залежність $A(d)$, яка містить параметр a – відстань від лінзи до дзеркала:

$$A = \frac{(d(2a-F)-2aF)F}{2d(a-F)+F(F-2a)} \quad (1)$$

Використовуючи цю математичну модель для умови задачі 1, коли дзеркало розміщене на відстані $a = \frac{F}{2}$, отримали графік $A(d)$ (рис. 2).

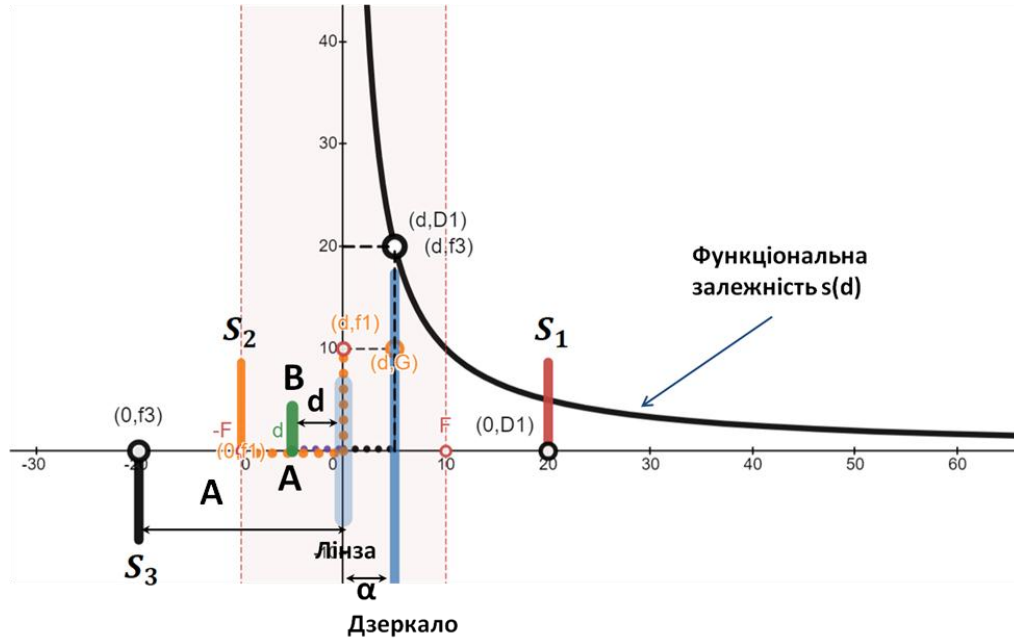


Рис. 2. Функціональна залежність відстані від кінцевого зображення до лінзи A від відстані від предмета до лінзи d (задача 1)

При зміні параметра a змінюватиметься вигляд графіка $A(d)$ та розміщення і властивості зображень в системі лінза-дзеркало. Знімки з екрана для різних значень параметра a та відстані d представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

Основні випадки положень зображень та графіків залежності $A(d)$ в оптичній системі, що складається з збірної лінзи та плоского дзеркала

Відстань від лінзи до дзеркала, a	Відстань від лінзи до предмета, d Характеристика зображення в системі лінза-дзеркало	Побудова зображень, що дає система лінза-дзеркало	Графічне представлення залежності відстані A від лінзи до зображення $A'''B'''$ в системі лінза-дзеркало від відстані d
1	2	3	4
$a = 0$	$0 < d < \frac{F}{2}$ Зображення уявне, збільшене, при збільшенні відстані d до $\frac{F}{2}$ зображення швидко прямує в нескінченність справа від лінзи		

Продовження табл. 1

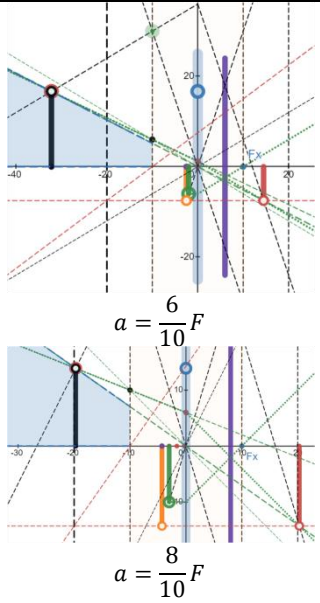
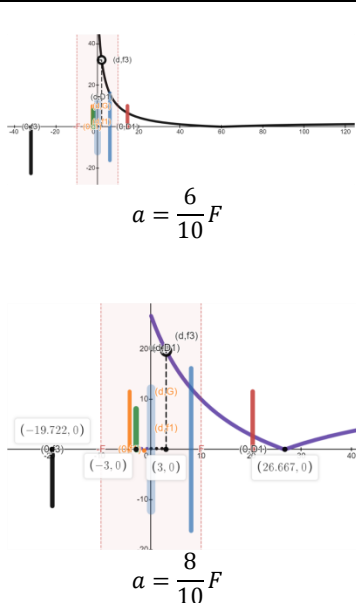
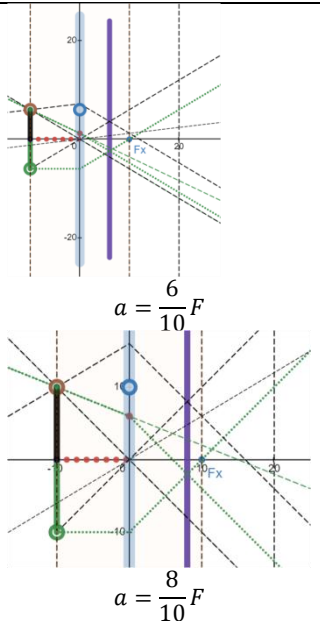
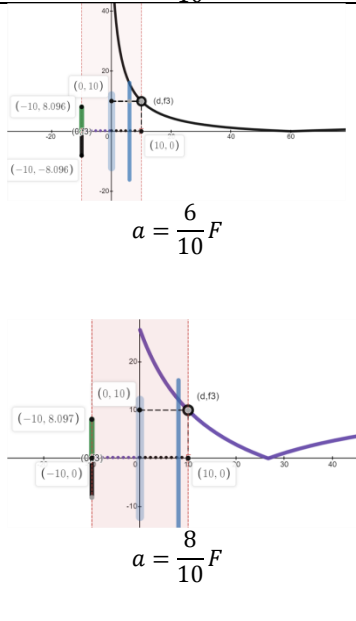
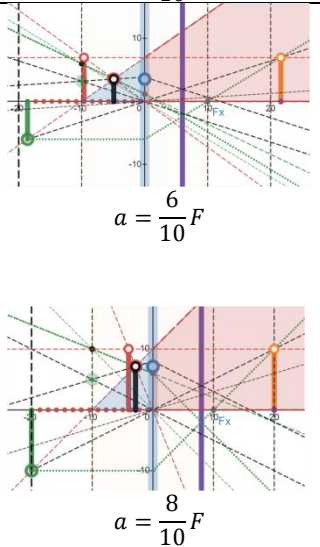
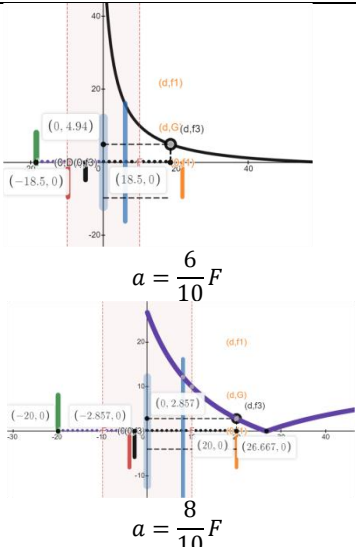
1	2	3	4
$a = 0$	$d = \frac{F}{2}$ Зображення немає		
$a = 0$	$\frac{F}{2} < d < F$ Зображення дійсне, збільшене, при збільшенні відстані d швидко прямує з нескінченності зліва до фокуса лінзи		
$a = 0$	$d = F$ Зображення дійсне, таке ж за розмірами як предмет, розміщене в фокусі		
$a = 0$	$F < d < +\infty$ Зображення дійсне, зменшене, зліва від лінзи, при зміні відстані d повільно переміщується до лінзи		
$a = \frac{F}{4}$	$0 < d < \frac{F}{3}$ Зображення уявне, збільшене, справа від лінзи, при збільшенні d швидко прямує до нескінченності справа від лінзи		
$a = \frac{F}{4}$	$\frac{F}{3} < d < F$ Зображення дійсне, збільшене, зліва від лінзи, при збільшенні відстані d швидко прямує з нескінченності зліва до фокуса лінзи		

СЕКЦІЯ XIX: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Продовження табл. 1

1	2	3	4
$a = \frac{F}{4}$	$d = F$ Зображення дійсне, таке ж за розмірами як предмет, розміщене в фокусі		
$a = \frac{F}{4}$	$F < d < +\infty$ Зображення дійсне, зменшене, при збільшенні відстані d повільно наближається до лінзи		
$a = \frac{F}{2}$	$0 < d < F$ Зображення дійсне, збільшене, зліва від лінзи, при збільшенні відстані d швидко прямує з нескінченності зліва до фокуса лінзи		
$a = \frac{F}{2}$	$0 < d < F$ ($d = \frac{F}{2}$) Зображення дійсне, збільшене, зліва від лінзи, при збільшенні відстані d швидко прямує з нескінченності зліва до фокуса лінзи		
$a = \frac{F}{2}$	$d = F$ Зображення дійсне, таке ж за розмірами як предмет, розміщене в фокусі		
$a = \frac{F}{2}$	$F < d < +\infty$ Зображення дійсне, зменшене, при збільшенні відстані d повільно наближається до лінзи		

Продовження табл. 1

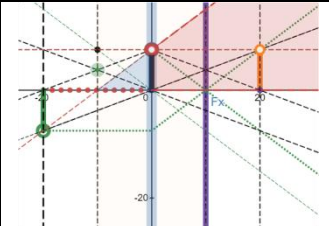
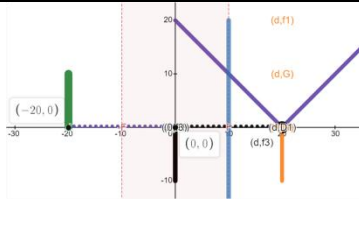
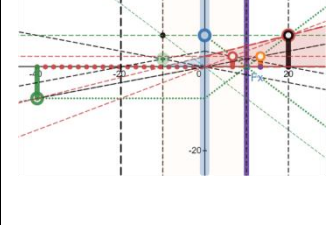
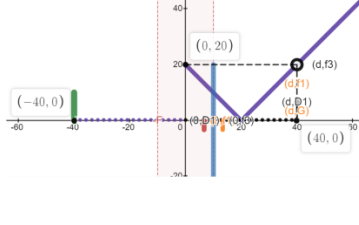
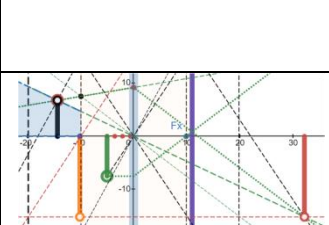
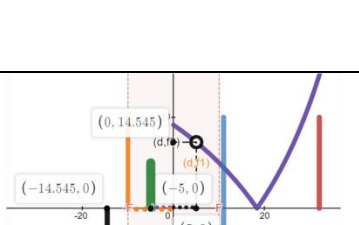
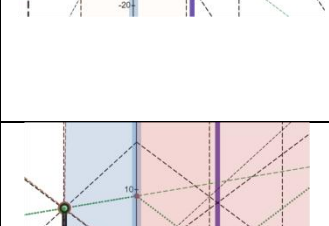
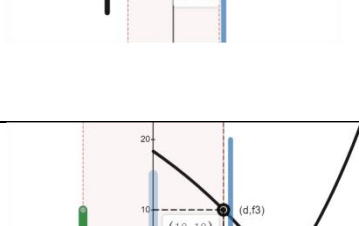
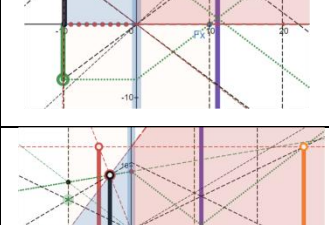
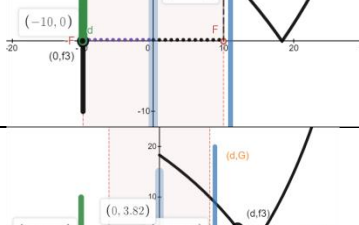
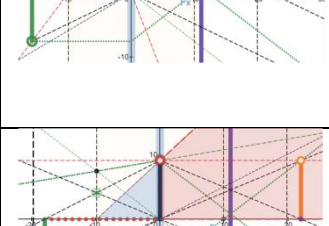
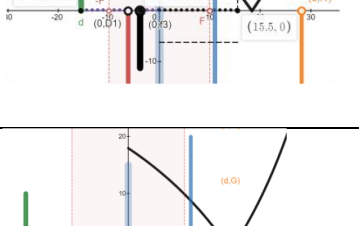
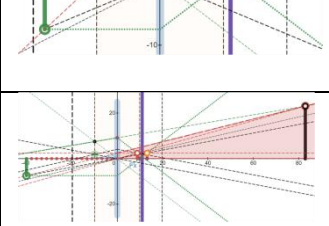
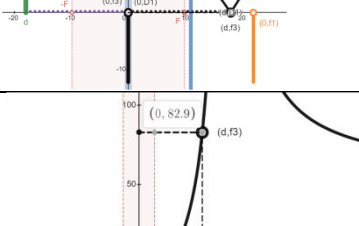
1	2	3	4
$\frac{F}{2} < a < F$	$0 < d < F$ Зображення дійсне, збільшене, зліва від лінзи, при збільшенні відстані d швидко прямує з нескінченності зліва до фокуса лінзи		
$\frac{F}{2} < a < F$ $(a = \frac{6}{10}F)$	$d = F$ Зображення дійсне, таке ж за розмірами як предмет, розміщене в фокусі		
$\frac{F}{2} < a < F$ $(a = \frac{6}{10}F)$	$F < d < \frac{2aF}{2a-F}$ Зображення дійсне, зменшене, при збільшенні відстані d повільно наближається до лінзи		

СЕКЦІЯ XIX. ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Продовження табл. 1

<p>1</p> $\frac{F}{2} < a < F$	<p>2</p> $d = \frac{2aF}{2a-F}$ <p>Зображення на лінзі</p>	<p>3</p> <p>$a = \frac{6}{10}F$</p> <p>$a = \frac{8}{10}F$</p>	<p>4</p> <p>$a = \frac{6}{10}F$</p> <p>$a = \frac{8}{10}F$</p>
<p>$\frac{F}{2} < a < F$</p>	<p>$\frac{2aF}{2a-F} < d < +\infty$</p> <p>Зображення уявне, справа від лінзи, зменшене, при збільшенні відстані d віддаляється від лінзи</p>	<p>$a = \frac{6}{10}F$</p> <p>$a = \frac{8}{10}F$</p>	<p>$a = \frac{6}{10}F$</p> <p>$a = \frac{8}{10}F$</p>
<p>$a = F$</p>	<p>$0 < d < F$</p> <p>Зображення дійсне, зліва від лінзи, таке ж за розмірами як предмет, при збільшенні d відстань s від зображення до лінзи змінюється від $2F$ до F</p>		
<p>$a = F$</p>	<p>$d = F$</p> <p>Зображення дійсне, зліва від лінзи, розміщене таке ж за розмірами як предмет</p>		
<p>$a = F$</p>	<p>$F < d < 2F$</p> <p>Зображення дійсне, зліва від лінзи, таке ж за розмірами як предмет, при збільшенні d відстань s від зображення до лінзи змінюється від F до 0</p>		

Продовження табл. 1

1	2	3	4
$a = F$	$d = 2F$ Зображення на лінзі		
$a = F$	$0 < d < +\infty$ Зображення уявне, справа від лінзи, таке ж за розмірами як предмет, при збільшенні d відстань s від лінзи до зображення змінюється від 0 до $+\infty$		
$a > F$ $a = 1.1F$	$0 < d < F$ Зображення дійсне, зліва від лінзи, зменшене, при збільшенні d відстань s від зображення до лінзи змінюється від $2F$ до F		
$a > F$ $a = 1.1F$	$d = F$ Зображення дійсне, зліва від лінзи, у фокусі, таке ж за розмірами як предмет		
$a > F$ $a = 1.1F$	$F < d < \frac{2aF}{2a-F}$ Зображення дійсне, збільшене, при збільшенні відстані d наближається до лінзи		
$a > F$ $a = 1.1F$	$d = \frac{2aF}{2a-F}$ Зображення на лінзі		
$a > F$ $a = 1.1F$	$\frac{2aF}{2a-F} < d < \frac{F(2a-F)}{2(a-F)}$ Зображення уявне, справа від лінзи, збільшене, при збільшенні відстані d швидко віддаляється від лінзи		

СЕКЦІЯ XIX. ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Продовження табл. 1

1	2	3	4
$a > F$ $a = 1.1F$	$\frac{F(2a-F)}{2(a-F)} < d < +\infty$ Зображення дійсне, зліва від лінзи, збільшене, при збільшенні відстані d швидко наближається до лінзи		
$a > F$ $a = 2F$	$0 < d < F$ Зображення дійсне, зліва від лінзи, зменшене		
$a > F$ $a = 2F$	$d = F$ Зображення дійсне, зліва від лінзи, у фокусі, таке ж за розмірами як предмет		
$a > F$ $a = 2F$	$F < d < \frac{2aF}{2a-F}$ Зображення дійсне, збільшене, при збільшенні відстані d наближається до лінзи		
$a > F$ $a = 2F$	$d = \frac{2aF}{2a-F}$ Зображення на лінзі, збільшене		
$a > F$ $a = 2F$	$\frac{2aF}{2a-F} < d < \frac{F(2a-F)}{2(a-F)}$ Зображення уявне, справа від лінзи, збільшене, при збільшенні відстані d швидко віддаляється від лінзи		
$a > F$ $a = 2F$	$\frac{F(2a-F)}{2(a-F)} < d < 2F$ Зображення дійсне, зліва від лінзи, збільшене, при збільшенні відстані d швидко наближається до $2F$		

Продовження табл. 1

1	2	3	4
$a > F$ $a = 2F$	$d = 2F$ Зображення дійсне, зліва від лінзи, таке ж за розмірами як і предмет, на відстані $2F$		
$a > F$ $a = 2F$	$2F < d < +\infty$ Зображення дійсне, зліва від лінзи, зменшене, при збільшенні відстані d дуже повільно наближається до лінзи		

Узагальнюючи отримані результати, можна зробити висновок, що у випадку розміщення предмета у фокусі лінзи, кінцеве зображення, що дає система лінза-дзеркало, буде дійсним і таким же за розмірами як предмет, розміщеним також у фокусі лінзи незалежно від розміщення дзеркала.

Розглянемо ще одну задачу, яку пропонували для фізико-технічних факультетів ВНЗ. На головній оптичній осі тонкої збірної лінзи з фокусною відстанню 16 см знаходиться муха S на відстані 24 см від лінзи. По іншу сторону лінзи знаходиться плоске дзеркало, що переміщується вздовж головної оптичної осі лінзи зі швидкістю $v_1 = 1$ мм/с. У деякий момент часу t дзеркало було на відстані 36 см від лінзи. На якій відстані від лінзи буде зображення мухи при відсутності дзеркала? На якій відстані від лінзи буде зображення мухи в момент часу t в системі лінза-дзеркало? З якою швидкістю рухається зображення мухи в момент часу t в системі лінза-дзеркало? Відповіді на перші два запитання легко знайти, використавши побудовані математичні моделі в desmos (рис. 3): відстань від зображення S_1 до лінзи становить 48 см, відстань від зображення S_3 до лінзи становить 48 см.

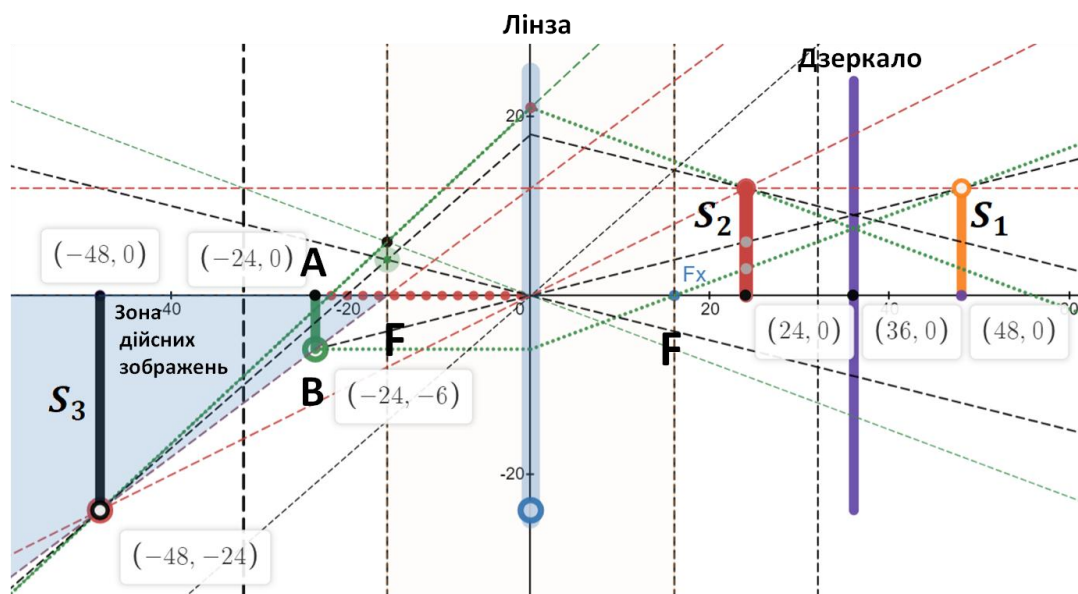


Рис. 3. Побудова зображень в системі лінза-дзеркало за допомогою променів в графічному редакторі desmos (задача 2)

Відповідь на третє питання можна знайти, використавши результати моделювання задачі (рис. 2). Зображення S_1 , яке дає лінза, відносно лінзи буде нерухомим. Зображення S_2 , отримане дзеркалом, буде рухатися зі швидкістю вдвічі більшою, ніж швидкість дзеркала: $v_2 = 2v_1$. Швидкість руху v_3 кінцевого зображення S_3 змінюється при зміні положення дзеркала та описується залежністю (2) (рис. 4):

$$v_3 = \left(\frac{f_3}{d_2}\right)^2 v_2 = \left(\frac{48}{24}\right)^2 2 \cdot 1 = 8 \text{ мм/с.} \quad (2)$$

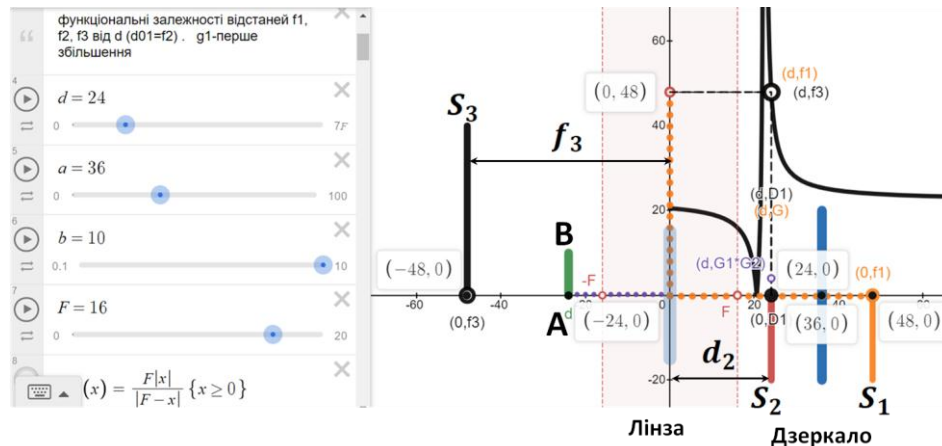


Рис. 4. Графічна залежність $A(d)$ для умови розміщення дзеркала від лінзи, зазначеної в задачі 2

Створені математичні моделі побудови зображення предмета, що дає оптична система, яка складається зі збірної лінзи та плоского дзеркала, дають змогу побачити та досягнути набагато більше, ніж розв'язання окремої задачі. Застосування моделювання до оптичної системи демонструє наочно положення та розміри усіх трьох зображень, утворених лінзою, дзеркалом та оптичною системою. Користуючись функціональними залежностями (рис. 5) можна зрозуміти куди рухається будь-яке зображення, як воно змінюється при проходженні точок розриву графіка, при яких умовах зображення буде дійсним чи уявним, прямим чи оберненим.

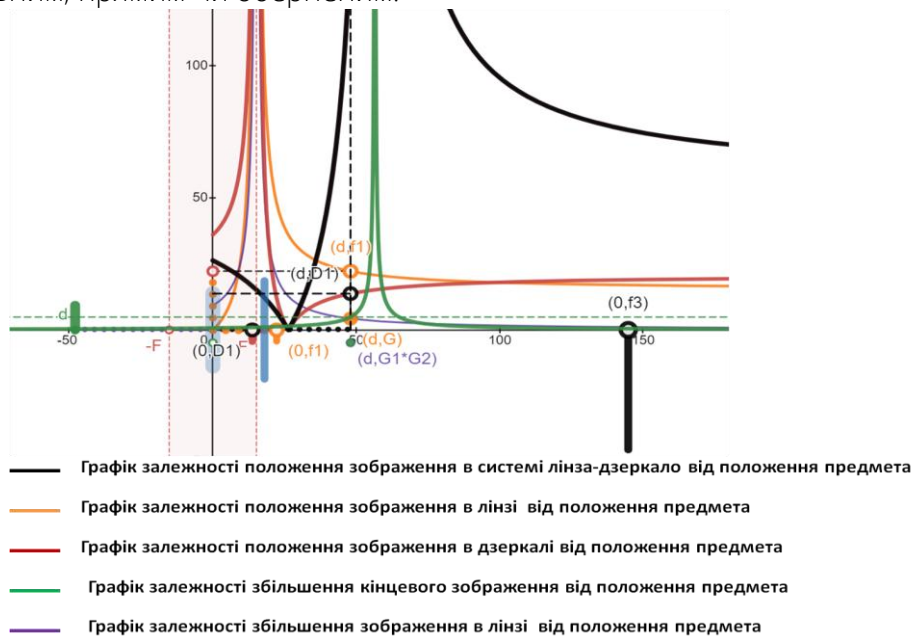


Рис. 5. Функціональні залежності для характеристики положення та величини зображень

Наші теоретичні обчислення були перевірені експериментально. «Зловити» зображення предмета, отриманого оптичною системою лінза-дзеркало, є достатньо складним завданням, якщо не знаєш, де його шукати. Орієнтир розміщення зображення (рис. 6) для експериментальної установки вказують створені графічні моделі 1 і 2.

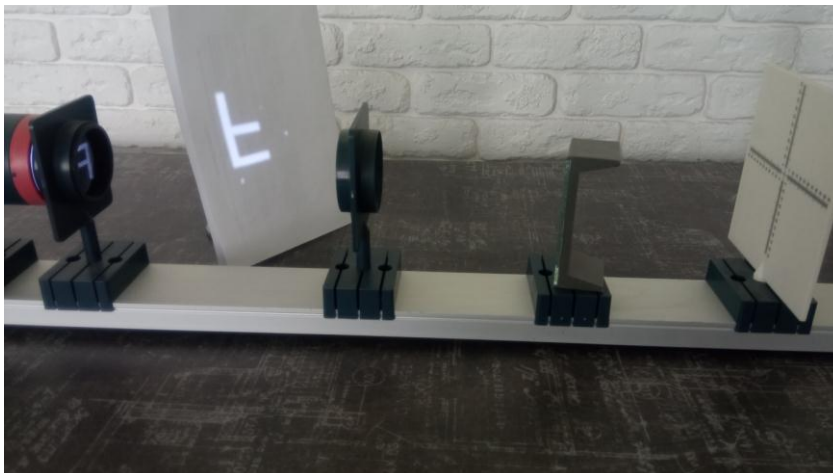


Рис. 6. Експериментальна установка лінза-дзеркало.

Створені математичні моделі допомагають не лише в розв'язанні задач про оптичні системи, але також є базою для формулювання нових цікавих задач.

Список використаних джерел:

- [1] Графічний редактор Desmos. Лінза і дзеркало. Зображення [Електронний ресурс] – Режим доступу : <https://www.desmos.com/calculator/csthj8oxpf>
- [2] Графічний редактор Desmos. Графіки. Лінза і дзеркало [Електронний ресурс] – Режим доступу : <https://www.desmos.com/calculator/cwpjxj7ia6>