

---

# Системы приводів. Технологія і обладнання машинобудівного виробництва. Мехатроніка

---

УДК 621.644:621.833.15

Я. Стричек, д-р техн. наук,  
П. Антоньяк, канд. техн. наук  
«Вроцлавская политехника», Вроцлав, Польша  
З.Я. Лурье, д-р техн. наук  
Национальный технический университет «Харьковский  
политехнический институт», Харьков, Украина  
В.М. Соловьев, канд. техн. наук  
Государственное предприятие «Харьковское конструкторское бюро  
по машиностроению им. А.А. Морозова», Харьков, Украина

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ШЕСТЕРЕННОГО НАСОСА ВНЕШНЕГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ ПУТЕМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

## DETERMINATION OF THE EXTERNAL GEAR PUMP UNKNOWN PARAMETERS BY THE SOLUTION OF THE MULTI-CRITERIA IDENTIFICATION REVERSE PROBLEM

**Цель.** Целью данной работы является поиск некоторых исходных данных, отсутствующих в технической документации объекта, путем постановки и решения обратной задачи идентификации.

**Методы исследования.** К методам исследования относятся: фундаментальные законы теории машин и механизмов, теоретической механики, механики жидкости и газа, способствующие более углубленной разработке математической модели качающего узла, методы математического моделирования, позволяющие более полно описать качающий узел функциональными зависимостями, метод исследования пространства параметров, позволяющий решать задачи многокритериальной оптимизации и идентификации.

**Результаты.** Улучшена математическая модель качающего узла путем ввода уравнений радиального и нормального бокового зазоров, что повысило ее адекватность натурному образцу. При решении обратной задачи многокритериальной идентификации для рассматриваемого насоса с прозрачным корпусом, разработанного в «Вроцлавской политехнике», определены следующие исходные данные, отсутствующие в технической документации: коэффициент высоты ножки зуба, боковой нормальный зазор и радиальный зазор. Найденные исходные данные совместно с другими известными позволяют построить 3D компьютерную модель для дальнейшего исследования в программе вычислительной гидродинамики рабочего процесса насоса.

**Выводы.** Обоснован выбранный метод исследования пространства параметров с улучшенной математической моделью при параметрических, функциональных, критериальных ограничениях и назначенных критериях адекватности, который открыл возможность поставить и решить обратную задачу многокритериальной идентификации по определению неизвестных исходных данных, при которых спроектирован и изготовлен натурный образец насоса. Выполненный корреляционный анализ по оценке линейной зависимости между принятыми критериями путем определения коэффициентов корреляции позволил глубже оценить постановку идентификационной задачи в части выбора: назначенных критериев и их числа, интервалов параметрических и критериальных ограничений, варьируемых параметров и в целом уточнить постановку задачи (этап 1). Проведенные расчеты (второй и третий этапы) в среде многокритериальной программной системы с различными функциями обработки информации таблиц испытаний (решений, входящих в допустимое множество D) позволили выбрать наилучшее решение. Выполненные расчеты геометрии зубчатого зацепления наилучшего решения на основе предложенной математической модели с помощью диалоговой программы OPT и расчеты программы KISSsoft практически совпали. Это подтверждает близость предложенной математической модели и модели программы KISSsoft с достаточной для практики точностью.

**Ключевые слова:** идентификация, математическая модель, прямая и обратная задачи идентификации, многокритериальные задачи идентификации, критерии адекватности.

**Введение**

Математическое моделирование стало одним из мощных инструментов в решении самых разнообразных научных и инженерных задач и исследованиях. Вопрос достоверности (адекватности) математических моделей натурным образцам стал важной научной и экспериментальной проблемой. Повышение качества моделей достигается с помощью постановки и решения задач идентификации. Уже накоплен большой арсенал методов и алгоритмов идентификации, обоснована теоретико-множественная постановка задач идентификации. Показано, что классификация задач идентификации может осуществляться по целому ряду признаков: идентифицируемый объект или процесс, класс модели, в терминах которых осуществляется идентификация, условия наблюдения и возбуждающие процесс воздействия и др. Предложена многокритериальная идентификация, эффективность которой подтверждается решением задач для механических систем. В целом можно отметить, что под идентификацией понимается уточнение по экспериментальным данным модели реального объекта (процесса). Назовем такие задачи идентификации прямыми.

В науке и технике возникает и обратная ситуация, когда в изготовленном образце отсутствует ряд параметров, необходимых для построения компьютерных моделей и их исследований. Здесь найти эти параметры следует с помощью улучшенной математической модели. Назовем такие задачи идентификации обратными.

Настоящая статья посвящена постановке и решению обратной задачи идентификации на примере шестеренного насоса внешнего зацепления.

**Анализ литературных источников**

В работе [1] авторы отмечают, что при практическом рассмотрении, понятие идентифицируемость представляет собой настолько важное и специфическое свойство, которое целесообразно выделить в специальную категорию.

Параметрическая идентификация в современной теории автоматического управления представляет собой возможность определения параметров математических моделей системы или процесса по результатам измерения определенных выходных величин в течение определенного интервала времени.

В работе [1] рассматривается укрупненная общая классификация задач, которая базируется на двух признаках: модели, в терминах которой выполняется идентификация, и условия наблюдаемости. Приводятся также общие постановки ряда задач, методы и алгоритмы их решения. Отмечается, что в области управления в 1980-е годы проводились работы и исследования как на стадии проектирования, так и на стадии функционирования (эксплуатации) этих систем (идентификация в реальном времени).

Например, задача с условиями наблюдений со следующей содержательной формулировкой: векторы входных и выходных сигналов с операторной моделью и пространством сигналов или изображений (преобразований) по Лапласу представляют все задачи параметрической идентификации в терминах операторного математического описания объекта. В общем случае оператор модели задается с точностью до вектора параметров  $a$ :

$$x_{\text{вых}}^M(t) = F^M[x_{\text{вх}}^M(t), a], \tag{1}$$

где  $F^M$  — оператор, структура которого полностью задана.

Задача идентификации при детерминированном с точностью до вектора постоянных  $a$  оператора модели (1) формулируется следующим образом: на основе экспериментальных данных

$$x_{\text{вх}}^u(t) \subset x_{\text{вх}}^u \subset x_{\text{вх}}, x_{\text{вых}}^u(t) \subset x_{\text{вых}}^u \subset x_{\text{вых}} \tag{2}$$

необходимо определить значение вектора параметров  $a$ , при котором модель наилучшим (или достаточно точно) аппроксимирует оператор объекта

$$x_{\text{вых}}(t) = F[x_{\text{вх}}(t)] \tag{3}$$

на множестве сигналов (2).

Авторы работы [1] констатируют, что хотя термин «идентификация» стал применяться в 1960-е годы, идентификация в широком смысле является неотъемлемой частью науки (многих научных направлений).

Весьма интересным и эффективным на практике оказался многокритериальный подход к задачам идентификации на примере механических систем на базе метода исследования пространства параметров [2, 3]. В общем случае при исследовании сложных систем нельзя утверждать, что математическая модель соответствует реальному объекту. В этом случае затруднительно обойтись одним показателем (критерием) адекватности, как в традиционных задачах идентификации.

В многокритериальной постановке имеется возможность оценивать адекватность модели по множеству локальных критериев близости. Суть подхода авторов к задаче многокритериальной идентификации в следующем:

имеются характеристики (критерии)  $\Phi_v^c(\alpha), v = \overline{1, k}$  определяемые из анализа математической модели, описывающей исследуемый объект,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — вектор параметров исследуемой модели. Имеется  $\Phi_v^{\text{exp}}$  —

экспериментальное значение  $v$ -го критерия, измеренного с достаточной точностью непосредственно на опытном образце или на прототипе. Полнота эксперимента определяется тем, что характеристики  $\Phi_v^{\text{exp}}$  должны

измеряться во всех основных узлах, в наиболее характерных точках конструкции объекта. Их должно быть достаточно для корректной постановки задачи идентификации.

Сопоставляя расчетные характеристики модели  $\Phi_v^c(\alpha)$ ,  $v = \overline{1, k}$  и экспериментальные, необходимо определить соответствие модели реальному объекту и найти векторы параметров  $\alpha^i$ , которые удовлетворяют трем видам ограничений:

$$\text{параметрическим } \alpha_j^* \leq \alpha_j \leq \alpha_j^{**}, j = \overline{1, r}; \quad (4, a)$$

$$\text{функциональным } c_l^* \leq f_l(\alpha) \leq c_l^{**}, l = \overline{1, t}; \quad (4, б)$$

$$\text{критериальным } \|\Phi_v^c(\alpha^i) - \Phi_v^{exp}\| \leq \Phi_v^{**}. \quad (4, в)$$

Эти ограничения определяют допустимую область  $D_\alpha$  [2]. Здесь  $\Phi_v^{exp}$  — критериальные ограничения,

которые назначаются в процессе диалога исследователя с ЭВМ на основе анализа таблиц испытаний. Найденные векторы  $\alpha^i$ , принадлежащие области  $D_\alpha$ , названы авторами адекватными. В этом алгоритме суть многокритериальной (векторной) параметрической идентификации. Если это выполнить на всех имеющихся структурах (моделях), то тем самым осуществляется векторная структурная идентификация. Указанный алгоритм представляет собой общую постановку и путь решения многокритериальной задачи параметрической идентификации. В работе [2] в качестве примеров показаны три задачи: доводка грузового автомобиля, векторная идентификация параметров долбежного станка и векторная идентификация параметров шпиндельного узла и его доводка, решение каждой из которых представляет собой очень сложную и может быть непреодолимую проблему для другого метода.

### Постановка задачи

Из приведенного обзора следует, что решение задач идентификации в области современной теории автоматического управления является актуальным направлением, которое представляет практический научный интерес и продолжает развиваться в области создания методов и алгоритмов. Характер решаемых задач связан с повышением адекватности модели к реальному образцу.

Появление достоверной модели на основе решения задач идентификации с использованием метода исследования пространства параметров стало новым направлением в теории и практике идентификации. Эффективность многокритериальной (векторной) параметрической идентификации, как следует из обзора, подтверждается на задачах для механических систем. Характер решаемых задач идентификации и в этом направлении связан с адаптацией модели к реальному образцу.

Рассмотрим шестеренный насос как объект многокритериальной идентификации. При расчете и построении зубчатого зацепления качающего узла обычно используются пакеты расчета механических передач, которые имеют закрытую математическую модель и ориентированы на проектирование силовых механических передач согласно нормативных документов. В результате в документации отсутствует ряд параметров, которые входят в уравнения геометрии зубчатого зацепления качающего узла гидравлической машины. К примеру, отсутствие в исходных данных и технической (конструкторской) документации параметров  $h_f^*$  (коэффициента высоты ножки зуба) и  $J_n$  (нормального бокового зазора) свидетельствует о том, что расчет зубчатой передачи выполнялся с помощью пакета расчета механических передач, где в исходных данных не требуется задание этих параметров (например, «Компас»). Отсутствие в исходных данных величины  $X_{min}$  может свидетельствовать о применении для расчета зубчатого зацепления программы швейцарской компании KISSsoft.

Рассмотрим постановку идентификационной задачи, когда решается обратная задача поиска неизвестных значений  $h_f^*$  и  $J_n$  с помощью математической модели, которая учитывает все особенности зубчатого зацепления качающего узла шестеренного насоса как гидравлической машины.

Практика расчетов зубчатого зацепления для шестеренного насоса, в т.ч. с помощью программы «Компас», показывает, что зачастую выполняется расчет беззазорного зацепления, и реальный зазор обеспечивается допусками на изготовление шестерен и корпуса насоса. В этом случае для расчета и построения чертежей шестеренного насоса может быть использована программа KISSsoft (Швейцария). Программа ориентирована для механических передач, и ее математическое обеспечение основано на стандартах DIN [4—6]. В программе в исходных данных на расчет зубчатого зацепления помимо прочих используется параметр  $h_f^*$ . Что касается зазора  $J_n$ , то этот вопрос решается в программе следующим образом. Используется уравнение теоретического бокового зазора DIN [6]:

$$J_t = -\frac{A_{sn1} + A_{sn2}}{\cos \beta} + A_\alpha \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}, \quad (5)$$

где  $A_{sn1}$ ,  $A_{sn2}$  — отрицательные допуски толщины зуба на начальной окружности шестерни,  $A_\alpha$  — положительный допуск на величину межосевого расстояния,  $\alpha$  — угол профиля исходного контура,  $\beta$  — угол наклона линии зуба. При  $\beta = 0$  (прямые линии) зазор  $J_n$  равен сумме допусков толщины зуба.

Нормальный зазор между боковыми поверхностями  $J_n$  и боковой окружной  $J_t$  в программе соответствует уравнениям DIN [5]:

$$J_n = J_t \cos \alpha \cos \beta, \quad (6)$$

$$J_r = \frac{J_i}{2 \operatorname{tg} \alpha_{wt}}, \quad (7)$$

где  $\alpha_{wt}$  — станочный угол зацепления.

Эти три зазора можно видеть после расчета зубчатого зацепления в результирующем протоколе программы KISSsoft. Из анализа данных протокола можно констатировать, что эти параметры не входят в другие уравнения модели расчета KISSsoft. Их значения конструктор-исследователь может вводить:

- в соответствии с рекомендациями соответствующего стандарта DIN;
- конкретные значения, исходя из своего опыта.

В работе [7] одна из рекомендаций для механических передач состоит в расчете беззазорного зацепления, а в документации зазор обеспечивается допусками на изготовление шестерен. Однако еще в 1957 году в первой редакции монографии [8] Юдина Е.М. по шестеренным насосам автором была предложена формула, связывающая два важных параметра: коэффициент профильного смещения  $X$  и межосевое расстояние  $a_w$  посредством  $\alpha_w$  угла зацепления с учетом бокового зазора:

$$X = \frac{z \cdot (\operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha) - \frac{J_n \cdot \cos \alpha_w}{2 \cdot m \cdot \cos \alpha}}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}. \quad (8)$$

В числитель выражения (8) входит боковой зазор. Автор показал влияние данного параметра на гидродинамику внутренних процессов шестеренного насоса в части истечения рабочей жидкости из полости более высокого давления в полость низкого, на пульсации мгновенной подачи и др. Таким образом, в математической модели расчета зубчатого зацепления было введено уравнение, учитывающее зазор.

Влияние бокового зазора на параметры работы шестеренного насоса видно из работы американских исследователей Youngstown State University [9], посвященной двумерному численному моделированию внутренней гидродинамики течения рабочей жидкости в шестеренном насосе. Рассмотрено влияния бокового зазора с величинами (15, 22 и 30 мкм между шестернями) на выходные характеристики для разных частот вращения вала (2000, 2500, 3000 и 3500 мин<sup>-1</sup>) и давлениях на выходе насоса (2500, 3000 и 3500 psi). В качестве объекта исследования использовался шестеренный насос марки PGP компании Parker Hannifin Corp (число зубьев 11, рабочий объем 50 см<sup>3</sup>). На рисунке 1 показаны кривые массовой подачи и давления рабочей жидкости на выходе насоса в функции времени (угла поворота шестерни). Массовая подача (рисунок 1, а), как функция времени, представляет собой синусоидальную кривую и со временем не изменяется.

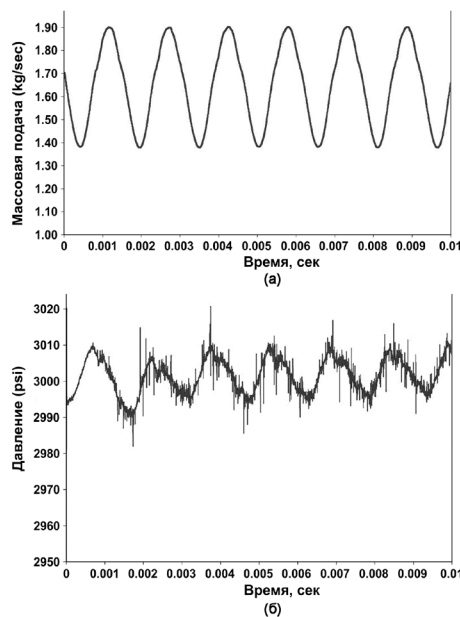


Рисунок 1 — Результат численного исследования течения рабочей жидкости в шестеренном насосе с величиной бокового зазора 30 мкм, при частоте вращения 3000 мин<sup>-1</sup> и давлении 3000 psi: (а) — кривая массовой подачи, (б) — кривая давления в точке области нагнетания (временной шаг 1•10<sup>-6</sup> с, число итераций 10000 (угол поворота шестерен 1800)

В целом полученные результаты подтверждают, что величина зазора является наиболее значимым параметром, который влияет на подачу насоса.

В стандартах DIN и в программах расчета Компас и KISSsoft зависимость (8) отсутствует.

Следует отметить, что в KISSsoft параметр радиальный зазор  $C$  вычисляется в абсолютных величинах, либо в виде коэффициента  $C^*$ , который получается при делении  $C$  на модуль  $m$ . В DIN [6] имеются три уравнения, совместное решение которых приводит к следующему выражению

$$C = 2a_w + (h_a^* + h_{f_i}^* - 2X) \cdot m - d_a - d. \quad (9)$$

Если рассчитывать зубчатые зацепления по заданному межосевому расстоянию, то в уравнение (9) входят четыре исходных параметра и три расчетных параметра:  $x$ ,  $d_a$ ,  $d$ . В отечественной литературе и в программе Компас, коэффициент  $C^*$  входит в исходные данные и четко регламентируются его значения с целью стандартизации режущего инструмента для изготовления механических зубчатых передач.

Отметим, что при подстановке в уравнение (9) формул (10), (11) и (12), определяющих действительное межцентровое расстояние

$$\alpha_w = \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}, \quad (10)$$

диаметр окружности вершин

$$d_a = 2a_w - d + 2m(h_a^* - x), \quad (11)$$

и диаметр делительной окружности

$$d = m \cdot z, \quad (12)$$

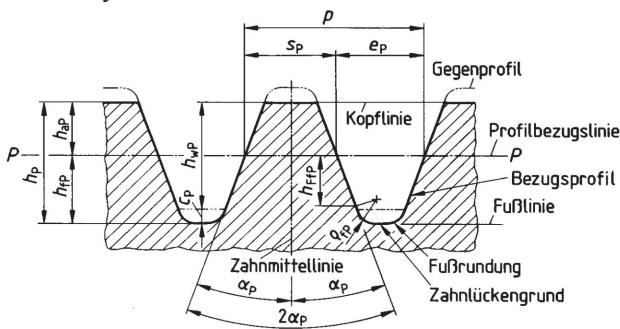
получаем следующее выражение

$$C = (h_f^* - h_a^*) \cdot m. \quad (13)$$

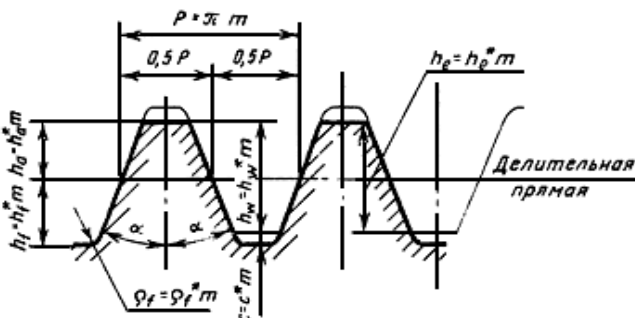
Если не использовать численные значения для коэффициентов  $h_a^*$  и  $C^* = C/m$ , а следовать исходному реечному контуру (рисунок 2, б, ГОСТ 13755-68), то мы получаем формулу

$$h_f^* = h_a^* + c^*. \quad (14)$$

Из формулы (14) вытекает, что в коэффициент ножки одним самым важным слагаемым входит только  $h_a^*$  и никакое другое значение. Как видно из рисунков 2, а и 2, б (теоретические исходные реечные контуры), такого жесткого требования нет: размер ножки зуба без радиального зазора может быть не равным размеру головки зуба.



(а)



(б)

Рисунок 2 — Теоретический исходный реечный контур:  
(а) — DIN 3967, (б) — ГОСТ 13755-81

Как следует из аналитического обзора, для определения на реальном шестеренном насосе двух неизвестных

параметров согласно общей постановки (4, а) — (4, в) многокритериальной (векторной) параметрической идентификации задачи должна быть построена математическая модель, с помощью которой в рамках механики твердого тела при критериях оптимизации решается многокритериальная задача оптимизации, а при критериях адекватности — идентификационная. Основу такой модели, на наш взгляд, для шестеренного насоса могут составлять уравнения DIN [4 — 6], формула (8), уравнения из [7] для определения:

- бокового зазора по дуге начальной окружности [7]

$$J_n = (p_w - 2 \cdot s_w) \cdot \cos \alpha_w. \quad (15)$$

- бокового зазора по контактной нормали [7]

$$J = \frac{2 \cdot J_n}{d_b}, \quad (16)$$

где  $s_w$  — толщина зуба по начальной окружности, определяемая по уравнению

$$s_w = d_w \left( \frac{\pi}{2z} + \frac{2x \operatorname{tg} \alpha}{z} + \operatorname{inv} \alpha - \operatorname{inv} \alpha_w \right), \quad (17)$$

где  $p_w$  — шаг по начальной окружности, определяемый по уравнению

$$p_w = \pi d_w / z, \quad (18)$$

- рабочего объема

$$V_0 = 0,5 \cdot \pi \cdot b \cdot \left( d_a^2 - d_w^2 - \frac{p_w^2}{3} \right) \cdot 10^{-3} \quad (19)$$

и др.

Функциональные ограничения, выполнение которых обеспечивает работоспособность шестеренного насоса [7, 8], представлены следующими неравенствами, отображающими необходимость выполнения ограничений на геометрические и кинематические параметры в процессе идентификации и оптимизации:

- на минимальное смещение

$$X > X_{\min}; \quad (20)$$

- на высоту зубьев шестерен

$$H \leq 0,25 m; \quad (21)$$

- на толщину вершины зуба на окружности вершин

$$S_a \geq 0,2 m; \quad (22)$$

- на минимальные радиальные зазоры шестерен

$$C^* \geq 0,5/m; \quad (23)$$

- на условие отсутствия интерференции зубьев шестерен с переходными кривыми

$$\rho_P \geq \rho_I; \quad (24)$$

- на нижню границю коефіцієнта перекриття

$$\varepsilon_\alpha > 1,03 \quad (25)$$

- на рабочий объем шестеренного насоса

$$V_0 \geq V_{0.зад}, \quad (26)$$

где  $V_{0.зад}$  — заданное значение рабочего объема;

- на габаритный размер качающего узла

$$G \leq G_d, \quad (27)$$

где  $G_d$  — допускаемое значение габаритного размера.

### Критерии адекватности

При выборе критериев адекватности использовались рекомендации, изложенные в работах [2, 3]. При этом учитывалась особенность обратной задачи, заключающаяся в сопоставлении соответствия выбранных известных значений параметров объекта и расчетных на пути поиска неизвестных значений параметров и объекта. При этом параметры модели и объекта обозначены верхними индексами соответственно буквами «м» и «об».

В качестве критериев адекватности приняты следующие выражения:

$$\Phi_1 = |d_a^m - d_a^{об}|, \quad (28)$$

$$\Phi_2 = |d_f^m - d_f^{об}|, \quad (29)$$

$$\Phi_3 = |V_0^m - V_0^{об}|, \quad (30)$$

$$\Phi_4 = |X^m - X^{об}|, \quad (31)$$

$$\Phi_5 = |h_a^m - h_a^{об}|. \quad (32)$$

В качестве объекта идентификации принят оригинальный шестеренный насос с прозрачным корпусом (рисунок 3), созданный во «Вроцлавской политехнике» под руководством профессора Я. Стричека. Работы [10, 11] посвящены экспериментальным исследованиям этого насоса на стенде (рисунок 4), с помощью которого возможно проводить не только определение характеристик, но и визуализировать поток в рабочей части насоса.

Экспериментальные исследования проводились с рабочей жидкостью марки HLP-68 с кинематической вязкостью при равной  $68 \text{ мм}^2/\text{с}$ . Были получены кривые пульсаций давления на линиях всасывания и нагнетания (рисунок 5), а видеосъемка (10000 кадров/с) зафиксировала моменты появления кавитационных пузырьков и их схлопывание. Для построения компьютерной модели этого насоса неизвестными оказались не два, а три исходных параметра:  $h_f^*$ ,  $J_n$  и  $C^*$ .

Перейдем к их поиску. На первом этапе были приняты

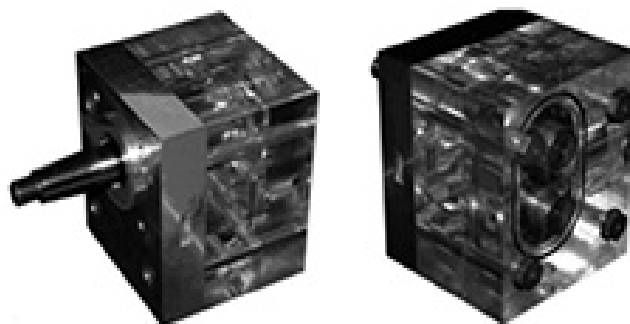


Рисунок 3 — Конструкция экспериментального насоса

следующие интервалы варьируемых параметров, в целом составляющие параметрические ограничения: коэффициент высоты ножки зуба исходного контура  $h_f^* = 1,15-1,365$ , боковой зазор  $J_n = 0,025-0,045 \text{ мм}$  и коэффициент высоты головки зуба исходного контура  $h_a^* = 1,15-1,19$ . При этом кроме параметрических были введены функциональные ограничения. В процессе решения было рассмотрено 495 пробных вариантов зубчатого зацепления и в целом качающего узла, из которых заданным условиям и указанным ограничениям, принятым в модели, удовлетворило 64 решений, которые составляют множество (подмножество параллелепипеда  $\Pi$ , состоящее из точек, удовлетворяющих параметрическим и функциональным ограничениям).

На этом этапе оценивалась линейная зависимость между принятыми критериями путем определения коэффициентов корреляции с использованием уравнения [3, 12]:

$$R_{i,j} = \frac{\sum_{n=1}^{KT} (F_{i,n} - F_i) \cdot (F_{j,n} - F_j)}{\sigma_i \cdot \sigma_j}, \quad (33)$$

где  $i, j$  — номера критериев, выступающих в качестве параметров (случайных величин),  $KT$  — число точек в таблице испытаний,  $F_{i,n}$  — значение  $i$ -го критерия точки  $n$ ,  $F_{j,n}$  — значение  $j$ -го критерия точки  $n$ .

Среднеарифметические отклонения  $i$ -го и  $j$ -го критериев соответственно равны

$$\bar{F}_i = \frac{1}{KT} \cdot \sum_{n=1}^{KT} F_{i,n}, \quad (34)$$

$$\bar{F}_j = \frac{1}{KT} \cdot \sum_{n=1}^{KT} F_{j,n}. \quad (35)$$

При  $KT \rightarrow \infty$ , среднеарифметические отклонения  $i$ -го и  $j$ -го критериев стремятся к математическим ожиданиям. Среднеквадратичные отклонения  $i$ -го и  $j$ -го критериев соответственно равны:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{KT} \cdot \sum_{n=1}^{KT} (F_{i,n} - \bar{F}_i)^2}, \quad (36)$$



Рисунок 4 — Фото стенда для испытаний экспериментального насоса

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{KT} \cdot \sum_{n=1}^{KT} (F_{j,n} - \bar{F}_j)^2} \quad (37)$$

При  $KT \rightarrow \infty$  подкоренные выражения стремятся к дисперсиям.

В таблице 1 серым цветом выделена ячейка с наиболее сильными корреляционными связями между соответствующими критериями. Физический смысл корреляционных критериев адекватности следующий: F1da — разность между модельным и объектным значениями диаметра окружности вершин зубьев, F2df — разность между модельным и объектным значениями диаметра окружности впадин, F3Vo — разность между модельным и объектным значениями рабочего объема насоса, F4X — разность между модельным и объектным значениями коэффициента смещения, F5ha\* — разность между модельным и объектным значениями коэффициента высоты головки зуба.

Как следует из таблицы 1 критерий F1da находится в тесной корреляционной связи с критерием F3Vo (положительная корреляция). Данная связь подтверждается физической картиной зацепления шестерен и уравнениями зубчатого зацепления. Таким образом, критерий F1da по отношению к критерию F3Vo является лишним, т.е. с ростом критерия F1da критерий F3Vo линейно возрастает или наоборот. Однако критерии F1da и F3Vo определяют различные характеристики проектируемого шестеренного насоса и поэтому при выборе следует оставить все.

Таблица 1 — Коэффициенты корреляции критериев адекватности

	Критерии			
	F1da	F2df	F3Vo	F4X
<b>F2df</b>	0,0657			
<b>F3Vo</b>	1	0,0657		
<b>F4X</b>	-0,259	-0,12	-0,259	
<b>F5ha*</b>	0,8939	0,011	0,8939	0,202

Графически корреляционная связь между любой парой выглядит в виде проекции возможных решений на плоскости, образованной этой парой критериев (рисунки 6 и 7).

Коэффициент корреляции критериев F1и F3 равен 1.

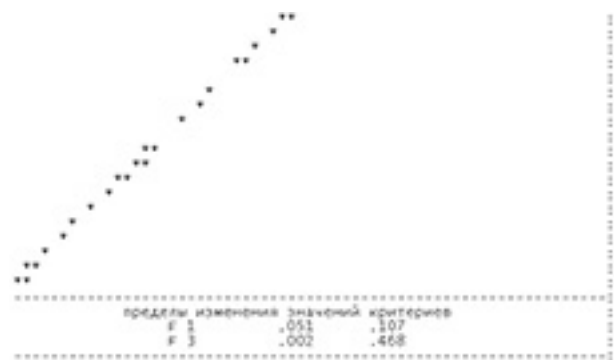


Рисунок 5 — Распределение возможных значений критериев адекватности в плоскости критериев F1и F3

Коэффициент корреляции критериев F2 и F5 равен 0,0108.

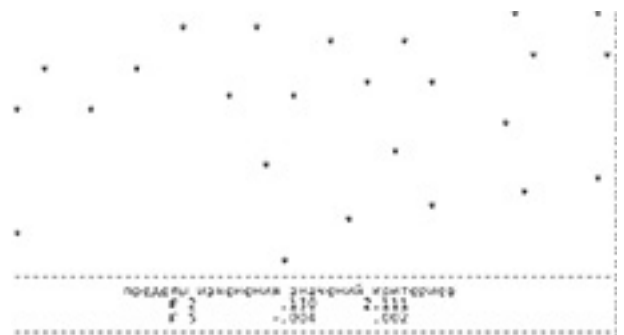


Рисунок 6 — Распределение возможных значений критериев адекватности в плоскости критериев F2и F5

Для критериев 1 и 3 это распределение — прямая (рисунок 5), а для критериев 2 и 5 — хаотическое распределение на плоскости (рисунок 6).

В целом корреляционный анализ позволяет глубже оценить постановку идентификационной задачи в части выбора: назначенных критериев и их числа, интервалов параметрических и критериальных ограничений, варьируемых параметров и в целом уточнить постановку задачи.

На втором этапе в модель были введены критериальные ограничения и изменены интервалы варьируемых параметров. Из 495 пробных решений получена таблица испытаний, содержащая 35 решений, которые составляют допустимое множество  $D$ . На основе диалога с программной системой многокритериальной оптимизации ОПТ [13] на экран монитора системой команд можно вывести результаты различных функций обработки информации таблицы испытаний. Представляет интерес поиск предельных значений по каждому критерию с указанием, в каком решении (в какой точке таблицы испытаний) они находятся (таблица 2).

Таблица 2 — Предельные значения критериев F1 — F5 в таблице испытаний с указанием номера точки

№ критерия	F <sub>i</sub> .max / № точки	F <sub>i</sub> .min / № точки
F1da	0,065 мм / 21	0,051 мм / 5
F2df	0,275 мм / 19	-0,02 мм / 23
F3V <sub>0</sub>	0,115 см <sup>3</sup> / 21	-0,02 см <sup>3</sup> / 23
F4X	-0,007 / 1-35	-0,007 / 1-35
F5ha*	-0,001 / 21	-0,002 / 5

Данные таблицы 2 показывают, что минимальные значения всех критериев содержатся в точках 5 и 23, включая и критерий F4X, равный во всех точках, включая и точку 23. Эти два решения и следует рассматривать претендентами на выбор наилучшего решения. В таблице 3 показаны значения критериев в точках 5 и 23, на основе которых можно отдать предпочтение решению 5.

Кроме того, в таблице 3 для точек 5 и 23 приведены значения искомых параметров решаемой обратной задачи. После округления значений варьируемых параметров  $h_a$  и  $h_f$  точки 5 до третьего знака после запятой и локальной идентификации завершается поиск наилучшего решения обратной задачи многокритериальной идентификации (таблица 4).

В таблице 5 показаны значения геометрических и кинематических параметров зубчатого зацепления наилучшего решения.

По исходным данным (в таблице 5 выделены подчеркиванием) представляет практическую значимость рассчитать геометрические параметры зубчатого зацепления в программе KISSsoft с целью оценки близости предложенной математической модели для решения обратной задачи идентификации и модели программы KISSsoft (таблицы 6, 7 построены по протоколу). В таблице 6 показаны значения критериев адекватности, которые вычислялись по уравнениям (24–28), где значения параметров с индексом «М» брались из протокола программы KISSsoft.

Затемненным цветом в таблицах показаны параметры, имеющие небольшое отличие. В целом сравнение

Таблица 3 — Минимальные значения критериев и искомых параметров

Критерии					Искомые параметры		
F1da	F2df	F3V <sub>0</sub>	F4X	F5ha*	$h_f^*$	$j_n$	C
мм	мм	см <sup>3</sup>				мм	мм
0,051	0,025	0,001	-0,007	-0,002	1,168	0,03	0,962
0,062	-0,02	0,089	-0,007	-0,001	1,169	0,03	0,979

Таблица 4 — Значения критериев и искомых параметров наилучшего решения

Критерии					Искомые параметры		
F1da	F2df	F3 V <sub>0</sub>	F4 X	F5ha*	$h_f^*$	$j_n$	C
мм	мм	см <sup>3</sup>				мм	мм
0,055	-0,005	0,03	-0,007	-0,002	1,363	0,03	0,975



Таблица 5 — Результат расчета параметров зубчатого зацепления

Обозначение параметра	Математическая модель	Обозначение параметра	Математическая модель
$d_a, \text{мм}$	69,454	$\underline{h_a^*}$	<u>1,168</u>
$d_b, \text{мм}$	51,684	$m, \text{мм}$	5
$d_f, \text{мм}$	45,395	$d_w, \text{мм}$	58,4
$d, \text{мм}$	55	$\underline{J_n, \text{мм}}$	<u>0,03</u>
$\underline{a_w, \text{мм}}$	<u>58,4</u>	$C, \text{мм}$	0,975
$\underline{\alpha_w, ^\circ}$	27,75	$\underline{Z}$	<u>11</u>
$\underline{X}$	<u>0,4025</u>	$\underline{\alpha, ^\circ}$	<u>20</u>
$X_{\min}$	0,2748	$\underline{h_f^*}$	<u>1,363</u>
$H, \text{мм}$	12,03	$Pt$	14,76
$S_\alpha, \text{мм}$	1,262	$\vartheta_p$	-4,812
$\underline{\varepsilon_\alpha}$	1,301	$W_K, \text{мм}$	24,288
$\underline{\rho}$	<u>0,38</u>	$\underline{b, \text{мм}}$	<u>38</u>

Таблица 6 – Значения критериев в протоколе KISSsoft

F1da	F2df	F4 X	F5ha*
мм	мм		
0,016	0,034	-0,0036	-0,002

данных таблиц 5, 7 и 4, 6 показывает достаточную для практики точность геометрических параметров зубчатого зацепления и критериев адекватности, полученных на основе обсуждаемой модели с помощью пакетов OPT и KISSsoft.

Полученное в результате проведения многокритериальной идентификации решение обратной задачи по определению неизвестных параметров реального объекта шестеренного насоса может быть использовано для последующего построения 3D компьютерной модели и дальнейшего исследования в программе вычислительной гидродинамики. Для построения 3D модели рекомендуется использовать программу KISSsoft или программный продукт аналогичного уровня.

### Выводы

1. Проведенный обзор работ показывает, что задачам параметрической идентификации уделяется должное внимание во многих отраслях науки и техники, особенно в теории автоматического управления и машиностроении, хотя термин «идентификация» стал применяться лишь в 60-тые годы XX столетия. При этом в основном задачи параметрической идентификации решались в направлении повышения адекватности математической модели реальному объекту.

Однако в практике возникают вопросы, когда в технической документации объекта нет некоторых исходных данных, при которых он был спроектирован, и

Таблиця 7 — Результат расчета параметров зубчатого зацепления

Обозначение параметра	Программа KISSsoft	Обозначение параметра	Программа KISSsoft
$d_a, \text{мм}$	69,416	$h_a^*$	1,168
$d_b, \text{мм}$	51,683	$m, \text{мм}$	5
$d_f, \text{мм}$	45,434	$d_w, \text{мм}$	58,4
$d, \text{мм}$	55	$J_n, \text{мм}$	0,034
$a_w, \text{мм}$	58,4	$C$	0,975
$\alpha_w, ^\circ$	27,75	$Z$	11
$X$	0,4064	$\alpha, ^\circ$	20
$X_{\min}$	в протоколе нет	$h_f^*$	1,363
$H, \text{мм}$	11,991	$Pbt$	14,76
$S_a, \text{мм}$	1,294	$\vartheta_p$	-4,761
$\varepsilon_\alpha$	1,297	$W_K, \text{мм}$	24,301
$\rho$	0,38	$b, \text{мм}$	38

которые нужны, например, для построения компьютерной 3D модели и проведения дальнейших исследований. Возникает и другая ситуация: необходимо определить параметры (в основном зазоры) в труднодоступных местах реального объекта. В этих случаях возникают обратные задачи параметрической идентификации, когда с помощью наиболее достоверных моделей определяются неизвестные параметры объекта. В качестве такого объекта рассматривается экспериментальный шестеренный насос с прозрачным корпусом, разработанный во «Вроцлавской политехнике».

2. Предложенная математическая модель для шестеренного насоса включает:

- уравнения зарубежных и отечественных исследователей зубчатого зацепления механических передач,
- дополнительные уравнения, учитывающие особенности зубчатого зацепления в составе качающего узла шестеренного насоса (рабочего объема, коэффициента профильного смещения, жесткие требования к коэффициенту перекрытия и др.),
- параметрические и функциональные ограничения,
- критерии адекватности и критериальные ограничения реального объекта к его математической модели (по значениям диаметров окружности вершин и впадин, по коэффициенту смещения и др.), позволяет

поставить и решать обратные задачи многокритериальной идентификации.

3. Поставлена и решена обратная задача многокритериальной идентификации по определению трех неизвестных параметров ( $h_f^*$ ,  $J_n$ ,  $C$ ) для экспериментального шестеренного насоса, и которая характеризуется следующими этапами:

- корреляционным анализом назначенных критериев (при этом включены параметрические и функциональные ограничения),
- введением критериальных ограничений и поиском не пустого множества D с определением предельных значений (и номера точек) по каждому критерию и выявления прецедентов на наилучшее решение,
- локальная идентификация с выбранным прецедентом и завершение поиска трех неизвестных параметров,
- передача результатов для построения компьютерной модели 3D для последующего исследования внутренней гидродинамики.

4. Выполненные расчеты геометрии зубчатого зацепления наилучшего решения с использованием предложенной математической модели и диалоговой программы OPT с результатом расчета программы KISSsoft подтвердило близость моделей и достаточную для практики точность.

## Литература

1. Справочник по теории автоматического управления / Под редакцией А.А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.
2. Статников, Р.Б. Многокритериальное проектирование машин / Р.Б. Статников, И.Б. Матусов. — М.: Знание, 1989. — 48 с.
3. Соболев, И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах с многими критериями / И.М. Соболев, Р.Б. Статников. — 2-е изд. — М.: Дрофа, 2006. — 175 с.
4. DIN 3960 Begriffe und Bestimmungsgroben für Stirnräder (Zylinderräder) und Stirnradpaare (Zylinderradpaare) mit Evolventenverzahnung — 1987. — 59s.
5. DIN 3960 Bei-1 und Bestimmungsgroben für Stirnräder (Zylinderräder) und Stirnradpaare (Zylinderradpaare) mit Evolventenverzahnung. — 1980. — 10s.
6. DIN 3967 Bestimmungsgroben für Stirnräder (Zylinderräder) und Stirnradpaare (Zylinderradpaare) mit Evolventenverzahnung. — 1978. — 24s.
7. Цилиндрические эвольвентные передачи внешнего зацепления. Расчет геометрии: Справочное пособие / И.А. Болотовский, В.И. Гурьев, В.Э. Смирнов, В.И. Шендерей. — М.: Машиностроение. — 1974. — 160 с.
8. Юдин, Е.М. Шестеренные насосы / Е.М. Юдин. — М.: Машиностроение, 1964. — 236 с.
9. Hyun, K. Two-dimensional CFD analysis of a hydraulic gear pump / K. Hyun, M. Hazel, P. Suresh // American Society Eng. — 2007. — 18 p.
10. Visualisation research of the flow processes in the outlet chamber-outlet bridge-inlet chamber zone of the gear pumps / J. Stryczek, P. Antoniak, O. Jakhno [et al] // Archives of Civil and Mechanical Engineering. — 2014. — pp. 1 — 14.
11. Стричек, Я. Математическое моделирование ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в линии нагнетания шестеренного насоса / Я. Стричек, Д.В. Костюк, Н.В. Ногин, О.М. Яхно // Промислова гідроліка і пневматика. — 2013. — №3 (41). — С. 37 — 43.
12. Соболев, И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах с многими критериями / И.М. Соболев, Р.Б. Статников. — М.: Наука, 1981. — 107 с.
13. Оксененко, А.Я. Диалоговая система решения инженерных задач многокритериальной оптимизации / А.Я. Оксененко, З.Я. Лурье, Г.С. Левитин // Управляющие системы и машины. — К.: Техника. — 1988. — №3. — С. 101—103.

## References

1. Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya / Pod redaktsiyey A.A. Krasovskogo. — M.: Nauka, 1987. — 712 s.
2. Statnikov, R.B. Mnogokriterialnoe proektirovanie mashin / R.B. Statnikov, I.B. Matusov. — M.: Znaniye, 1989. — 48 s.
3. Sobol, I.M. Vybora optimalnykh parametrov v zadachakh s mnogimi kriteriyami / I.M. Sobol, R.B. Statnikov. — 2-ye izd. — M.: Drofa, 2006. — 175 s.
4. DIN 3960 Begriffe und Bestimmungsgroben für Stirnräder (Zylinderräder) und Stirnradpaare (Zylinderradpaare) mit Evolventenverzahnung. — 1987. — 59 s.
5. DIN 3960 Bei-1 und Bestimmungsgroben für Stirnräder (Zylinderräder) und Stirnradpaare (Zylinderradpaare) mit Evolventenverzahnung. — 1980. — 10 s.
6. DIN 3967 Bestimmungsgroben für Stirnräder (Zylinderräder) und Stirnradpaare (Zylinderradpaare) mit Evolventenverzahnung. — 1978. — 24s.
7. Tsilindricheskie evolventnye peredachi vneshnego zatsepleniya. Raschet geometrii: Spravochnoe posobie / I.A. Bolotovskiy, V.I. Guryev, V.E. Smirnov, V.I. Shenderey. — M.: Mashinostroyeniye. — 1974. — 160 s.
8. Yudin, Ye.M. Shesterennyye nasosy / Ye.M. Yudin. — M.: Mashinostroyeniye, 1964. — 236 s.
9. Hyun K. Two-dimensional CFD analysis of a hydraulic gear pump / K. Hyun, M. Hazel, P. Suresh // American Society Eng. — 2007. — 18 p.
10. Visualisation research of the flow processes in the outlet chamber-outlet bridge-inlet chamber zone of the gear pumps / J. Stryczek, P. Antoniak, O. Jakhno [et al] // Archives of Civil and Mechanical Engineering. — 2014. — pp. 1 — 14.
11. Strichek, Ya. Matematicheskoye modelirovanie laminarnogo techeniya vyazkoy neshzhymaemoy zhidkosti v linii nagnetania shesterennogo nasosa / Ya. Strichek, D.V. Kostyuk, N.V. Nogin, O.M. Yakhno // Promyslova gidravlika i pnevmatika. — 2013. — №3 (41). — S. 37—43.
12. Sobol, I.M. Vybora optimalnykh parametrov v zadachakh s mnogimi kriteriyami / I.M. Sobol, R.B. Statnikov. — M.: Nauka, 1981. — 107 s.
13. Oksenenko, A.Ya. Dialogovaya sistema resheniya inzhenernykh zadach mnogokriterialnoy optimizatsii / A.Ya. Oksenenko, Z.Ya. Lurye, G.S. Levitin // Upravlyayushchie sistemy i mashiny. — K.: Tekhnika. — 1988. — №3. — S. 101—103.

Надійшла 15.03.2017 року

УДК 621.644:621.833.15

## Визначення невідомих параметрів шестеренного насоса зовнішнього зачеплення шляхом рішення зворотної задачі багатокритеріальної ідентифікації

Я. Стричек, П. Антоньяк,  
З.Я. Лур'є, В.М. Соловйов

**Мета.** Метою цієї роботи є пошук деяких вихідних даних, відсутніх у технічній документації об'єкта шляхом постановки і розв'язання зворотної задачі ідентифікації.

**Методи дослідження.** До них відносяться: фундаментальні закони теорії машин і механізмів, теоретичної механіки, механіки рідини і газу, які сприяють більш поглибленій розробці математичної моделі качаючого вузла; методи математичного моделювання, що дозволяють повніше описати качаючий вузол функціональними залежностями; метод дослідження простору параметрів (ДПП), що дозволяє вирішувати задачі багатокритеріальної оптимізації та ідентифікації.

**Результати.** Поліпшено математичну модель качаючого вузла шляхом введення рівнянь радіального і нормального бокового зазорів, що підвищило її адекватність натурному зразку. При вирішенні зворотної задачі багатокритеріальної ідентифікації для розглянутого насоса з прозорим корпусом, розробленого у «Вроцлавській політехніці». Отримані вихідні дані спільно з іншими відомими дозволяють побудувати 3D комп'ютерну модель для подальшого дослідження в програмі обчислювальної гідродинаміки робочого процесу насоса.

**Висновки.** Обґрунтований обраний метод дослідження простору параметрів з поліпшеною математичною моделлю при параметричних, функціональних, критеріальних обмеженнях і призначених критеріях адекватності, відкрив можливість поставити і вирішити зворотню задачу багатокритеріальної ідентифікації по визначенню невідомих вихідних даних, при яких спроектований і виготовлений натурний зразок насоса.

Виконаний кореляційний аналіз по оцінці лінійної залежності між прийнятими критеріями шляхом визначення коефіцієнтів кореляції дозволив глибше оцінити постановку ідентифікаційної задачі в частині вибору: призначених критеріїв і їх числа, інтервалів параметричних і критеріальних обмежень, варійованих параметрів і в цілому уточнити постановку задачі (етап 1). Проведені розрахунки (другий і третій етапи) в середовищі багатокритеріальної програмної системи з різними функціями обробки інформації таблиць випробувань (рішень, що входять в допустиму множину D) дозволили вибрати найкраще рішення. Виконані

розрахунки геометрії зубчастого зачеплення найкращого рішення на основі запропонованої математичної моделі за допомогою діалогової програми OPT і розрахунки програми KISSsoft практично збіглися. Це підтверджує близькість запропонованої математичної моделі і моделі програми KISSsoft з достатньою для практики точністю.

**Ключові слова:** ідентифікація, математична модель, пряма і зворотна задачі ідентифікації, багатокритеріальні задачі ідентифікації, критерії адекватності.

UDC 621.644:621.833.15

## Determination of the external gear pump unknown parameters by the solution of the multi-criteria identification reverse problem

Ya. Stryczek, P. Antoniak,  
Z. Ya. Lurye, V.M Solovyov

**Aim.** The objective of this article is to find an input data which is not specified in the technical documentation of gear pump. This problem was solved by formulating and obtaining the inverse identification task.

**Research methods.** The next research methods were used: the fundamental laws of machines and mechanisms theory, theoretical mechanics, fluid and gas mechanics (which were used for creating the detailed the gear pump mathematical mode), methods of mathematical modeling (allowing to describe the functional dependencies of gear pump mathematical model), the method of parameter space investigation (allowing to solve the tasks of multi-criteria optimization and identification).

**Results.** The mathematical model of gear pump was improved by introducing the equations of radial clearance and normal backlash, which increased the mathematical model adequacy compared with real gear pump. For solving the inverse problem of multi-criteria identification for the gear pump (with a transparent casing, which is developed in the Wrocław Polytechnic), the next input data is determined: the dedendum, the normal backlash, and the radial clearance. This parameters were absent in available technical documentation.

The obtained input data combined with known data allows to build a 3D computer model for further investigation the gear pump working process in the CFD (computational fluid dynamics) program.

**Conclusions.** Based on the method of parameter space investigation (with detailed mathematical model, parametric, functional, criteria constraints, and adequacy criteria) the inverse problem of multi-criteria identification by definition the unknown input data (from which the real gear pump was

designed and manufactured) is formulated and solved. To assess the linear relationship between the accepted criteria by determining the correlation coefficients, a correlation analysis was performed.

Calculations of the gearing geometry which were obtained by the proposed mathematical model (with the help of the OPT dialog program) and the KISSsoft program practically coincided. This confirms the proximity of the proposed mathematical

model and the mathematical model of the KISSsoft program. This allows to use the proposed model for computation with sufficient accuracy for practice.

**Keywords:** *identification, mathematical model, direct and inverse identification problems, multi-criteria identification tasks, adequacy criteria.*