

Research results. Development of design methodology for waste disposal system as an integral part of the aircraft complex, which covers the stages of research and development work from obtaining preliminary data to the stage of working design.

Conclusion. The existing design methods are considered, the design methodology development for systematization and hierarchical representation of the design process is performed, that take into account the design features at system creation.

Keywords: aircraft, waste disposal system, vacuum system, methodology, design.

Линейные модели гидродинамики
при движении тел с развитой кавитацией

Linear hydrodynamic models
when moving bodies with developed cavitation

*В.В. Серебряков, канд. физ.-мат. наук
Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина*

Цель. К числу самых сложных задач математической физики относится исследование кавитационных течений. Использование современных компьютерных технологий обеспечило значительный прогресс в этой области. Однако разработка методов расчета на основе сложных компьютерных программ не всегда оказывалась успешной и возникает настоятельная необходимость в верификации численного моделирования новых задач.

Методы исследования. Задачей настоящей работы является попытка развития уровня понимания основных составляющих проблемы движения и обтекания тел в каверне на основе наиболее простых, физически очевидных моделей и достаточно надежных оценок.

Результаты исследования. Рассмотрены элементарные зависимости и уравнения применительно к проблемам обтекания и движения суперкавитирующих тел, включая уравнения и зависимости для расчета формы стационарных и нестационарных каверн, близких к осесимметричным, искривление их осей, сопротивление тел при движении в каверне, включая при этом вязкую и кавитационную составляющую, модели и уравнения для расчета глиссирования по поверхности каверны, а также уравнения для оценки устойчивости обтекания и движения. Основное внимание направлено на детальное изучение физики процессов на основе наиболее простых моделей обтекания и движения.

Выводы. Проблема расчета процессов движения и обтекания суперкавитирующих тел приводит в общем случае к необходимости решения очень сложной системы уравнений для ряда элементов ее составляющих. Одними из основных проблем решения этой сложной задачи является не так само решение задачи, как проблема верификации адекватности этого решения, так и возможности упрощения этой системы с уменьшением ее сложности и, соответственно минимизации возможных ошибок и при программировании и при решении. Можно надеяться, что наличие ряда простых физически понятных решений и уравнений позволит в дальнейшем проанализировать, на этой основе, все отдельные составляющие проблемы движения и выяснить основные причины возможных осложнений при разработке более серьезных программ расчета в этой области.

Ключевые слова: суперкавитация, каверна, глиссирование, динамика.

Введение

Исследование кавитационных течений связано с необходимостью решения одной из самых сложных проблем математической физики с неизвестной свободной границей при наличии сингулярностей в области течения. Одной из существенных сложностей этой области в применении к приложениям является запредельность основных параметров обтекания совместно с наличием ряда сингулярных областей в потоке. Это очень большие скорости движения, сверх удлиненная форма каверн, больше похожих на иголки, очень малый масштаб возмущений в потоке и др. Исходя из такой сложности и особенностей задачи, на первых этапах, вплоть до появления достаточно мощных ЭВМ, значительный прогресс в этой области был достигнут на основе экспериментальных исследований путем создания простых физически ясных моделей обтекания с применением различных приближенных подходов. Это позволило достичь достаточно высокого уровня понимания и при наличии достаточно грубых, но физически понятных и надежных оценок, и создать на этой основе ряд впечатляющих технологий. Наиболее важные итоги этого этапа работ вплоть до начала особенно интенсивного применения численного компьютерного моделирования представлены монографией [42].

Большая часть задач в области движения и обтекания суперкавитирующих тел может быть решена на основе достаточно простых методов и решений при наличии простых моделей, обеспечивающих для прикладников понимание физики основных процессов, включая надежную оценку необходимых величин. Однако имеется и ряд проблем, которые в настоящее время могут быть решены только путем нелинейного численного моделирования.

С учетом исключительной сложности задачи первые попытки нелинейного численного расчета трехмерной кавитации сопровождались рядом неудач, что является причиной определенного недоверия и необходимости обязательной верификации численного моделирования новых задач. К сожалению, в отличие от экспериментальных исследований и разработки приближенных моделей, существенно стимулирующих уровень понимания физики процессов и проблемы в целом, разработка методов расчета на основе сложных компьютерных программ оказывается существенно менее благоприятной с точки зрения физических интерпретаций. Ныне эта проблема решается с помощью программного обеспечения типа MATCAD, MATLAB и других более специализированных программ.

Задачей настоящей работы является попытка продвижения уровня понимания основных составляющих проблемы движения и обтекания тел в каверне на основе наиболее простых физически ясных моделей и достаточно надежных оценок. Основой исследований является наиболее простая модель идеальной несжимаемой жидкости, включая приближенные модели плоских сечений, гидродинамики тонких тел и др. Рассматриваются проблемы трехмерного обтекания, сопротивления, глассирования в каверне, проблемы устойчивости и динамики тел в каверне.

Асимптотические модели — форма и размеры удлиненных осесимметричных каверн

Асимптотические, включая, в частности, линейные модели, являются одними из наиболее надежных, гарантирующих максимальное улучшение точности при стремлении малого параметра в решении к заданному пределу и, в частности, к нулю. В качестве основы ниже принимается интегро-дифференциальное уравнение (IDE) [32] для формы удлиненной осесимметричной каверны на основе гидродинамики тонких тел в рамках модели малого кавитатора при его радиусе малом по сравнению с основным размерами каверны, включая кавитаторы типа диска, конуса и др.

$$\frac{1}{2R^2} \left(\frac{dR^2}{dx} \right)^2 + \frac{d^2R^2}{dx^2} \ln \frac{R^2}{4x(L-x)} - \int_0^L \frac{d^2R^2}{dx^2} \Big|_{x=x_1} - \frac{d^2R^2}{dx^2} dx_1 - \frac{dR^2}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{dR^2}{dx} \Big|_{x=L} = 2\sigma(x) \quad (1)$$

где r, x — полярные координаты при $x = 0$ в сечении отрыва струй, $r = R(x)$ — форма каверны, L — длина каверны, $\sigma = 2\Delta P / \rho U_\infty^2$ — число кавитации, $\Delta P = (P_\infty - P_c)$ — разность давлений в потоке P_∞ и в каверне P_c , U_∞ — скорость набегающего потока, ρ — массовая плотность жидкости.

Уменьшение чисел кавитации при $\sigma \rightarrow 0$ приводит к неограниченному увеличению размеров и удлинения каверны $\lambda = L / R_k$, R_k — наибольший радиус каверны. При $\lambda \rightarrow \infty$, размеры кавитатора при его радиусе в сечении отрыва R_n становятся малыми $O[(1/\lambda^2) \ln \lambda]$ по сравнению с длиной каверны. Анализ задачи, в рамках метода срачиваемых асимптотических разложений [32, 34], определяет структуру сингулярного решения $R = R(x, \lambda)$ для формы стационарной каверны при постоянном числе кавитации $1/\lambda \rightarrow 0$.

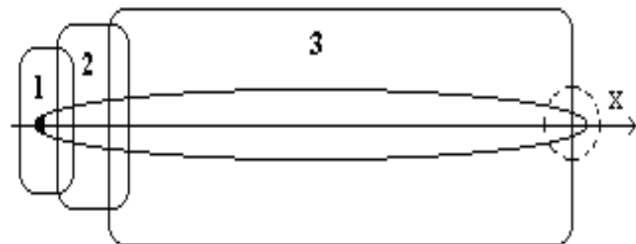


Рисунок 1 — Асимптотическая структура решения для формы тонкой осесимметричной каверны

Структура (рисунок 1) включает: внутреннее нелинейное решение 1 в случае диска в малой $O[(1/\lambda^2)\sqrt{\ln \lambda}]$ области вблизи кавитатора, промежуточное решение (2) в передней части каверны — в виде известной асимптотики расширения струй на бесконечности [19], уточненной в последствии третьим членом (2, а). Внешнее решение в виде возмущения эллипсоида (2, б) примет вид

$$a) R^2 = \frac{2\sqrt{c_{do}x}}{\sqrt{\ln x}} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{\ln \ln x}{\ln x} + \frac{1}{2} \frac{\ln(e\sqrt{c_{do}}/2)}{\ln x} \right], \quad b) R^2 = \frac{1}{\lambda^2} \left[(1-x^2) + \frac{x^2 \ln 4 - \ln(1+x)^{(1+x)} - \ln(1-x)^{(1-x)}}{\ln(\lambda^2)} \right] \quad (2)$$

Внешнее решение (2, б) [20, 32] находится в виде двух членов асимптотического ряда при $1/\lambda \rightarrow 0$. При этом, с точностью до малых $\sim O(1/\lambda^2)$, пренебрегается размерами области внутреннего и промежуточных решений,

включая размеры кавитатора. В решении (2, б) $X = 0$ соответствует миделю каверны при обезразмеривании по полудлине каверны L_k . Определяется также зависимость второго порядка $\sigma = \sigma(\lambda)$ (3, а), обратная зависимость $\lambda = \lambda(\sigma)$ находится последовательными приближениями по уравнениям (3, б). Приводится для сравнения также известная зависимость λ первого порядка (3, с).

Срачивание промежуточного (2, а) и внешнего (2, б) решений определяет также зависимость для величины наибольшего радиуса каверны R_k (3, д), $c_d = c_d(\sigma)$ — коэффициент сопротивления кавитатора, в частности для диска $\tilde{n}_d; 0.82(1 + \sigma)$.

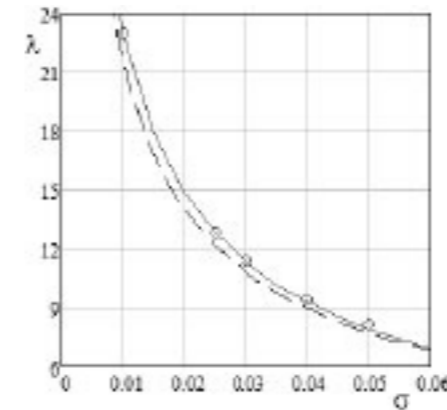


Рисунок 2 — Зависимость удлинения от числа кавитации второго приближения:
 — решение второго порядка
 - - - - - зависимость первого порядка (3, с)
 o o o o o нелинейный численный расчет [10]

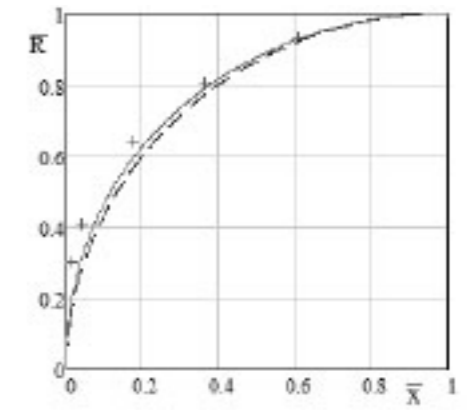


Рисунок 3 — Внешнее решение для формы каверны второго приближения:
 — решение второго порядка (2, б)
 - - - - - эллипсоидальная каверна
 + + + + нелинейный численный расчет [10]

$$a) \sigma = \frac{\ln(\lambda^2)}{\lambda^2} \left[1 - \frac{1}{\ln(\lambda^2)} \right] = \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\sqrt{e}},$$

$$b) \sigma = \frac{2\mu}{\lambda^2} \rightarrow \mu = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\mu}{e\sigma} \right) \quad c) \lambda^2 = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{1}{\sigma}, \quad (3)$$

$$d) R_k^2 = R_n^2 \frac{c_d}{\sigma} \left[1 + 2 \frac{\ln 2 / \sqrt{e}}{\ln(\lambda^2)} \right] = R_n^2 \frac{c_d}{k\sigma}$$

Результаты расчета на основе асимптотического решения (2, 3) в сравнении с данными нелинейного численного расчета показано на рисунках 3 и 4.

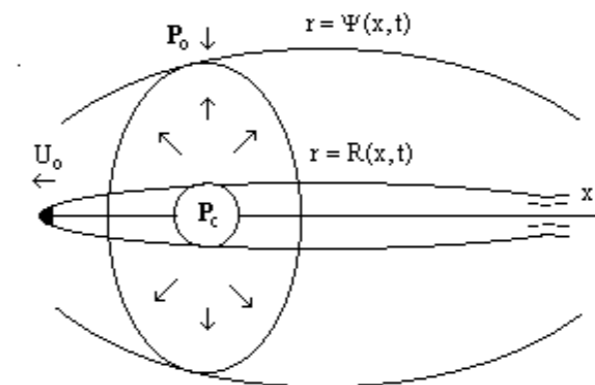


Рисунок 4 — Радиальная модель потока около осесимметричной суперкаверны [31]

Элементарная модель обтекания

Физически процесс образования близкой к осесимметричной каверны $R = R(x, t)$ в рамках гидродинамики тонких тел может быть представлен с помощью модели плоских сечений и радиального расширения течения в этих сечениях (рисунок 4). В случае вытянутых каверн размеры кавитатора малы и его сопротивление практически не зависит от формы каверны, а форма каверны — не зависит от формы кавитатора и определяется только его сопротивлением. Движущийся кавитатор расталкивает неподвижную жидкость в стороны и работа его сопротивления трансформируется в кинетическую энергию, образующегося за ним практически радиального, вблизи каверны, течения жидкости в каждом из проходимых им неподвижных сечений. При этом реальная область возмущений, содержащая основную часть энергии и импульса течения, концентрируется в конечной области, ограниченной поверхностью $r = \psi(x, t) \sim 0.7L_k$ с шириной несколько больше полудлины L_k поверхности кавитатора и каверны. Это делает каверну похожей на след определенного типа. Далее происходит расширение по инерции образовавшегося радиального течения вместе с сечением каверны под воздействием разности давлений в потоке и каверне. При этом процесс расширения сечения слабо зависит от формы поверхности $r = \psi(x, t)$ и тем меньше, чем более удлиненной является поверхность кавитатора и каверны. Сечение каверны достигает максимума в ее средней части и далее происходит схлопывание сечений, которое завершается в задней части каверны с потерей устойчивости течения и трансформацией энергии радиального течения в большинстве, имеющих практический интерес случаев, в энергию неупорядоченного движения в следе за каверной.

Стационарная осесимметричная каверна

При увеличении удлинения λ_* комплекса кавитатор — каверна интегро-дифференциальное уравнение (1) при $1/\lambda_* \rightarrow 0$ в первом приближении может быть упрощено до дифференциального уравнения, соответствующему решению только во внешней зоне 1 (рисунок 1). С учетом обнаруженной в результате асимптотического решения в этой зоне близости формы каверны первого и второго приближений. Такое дифференциальное уравнение может обеспечить достаточно точное представление формы каверны на подавляюще большей части длины каверны, исключая очень малые области поверхности каверны $\sim O(1/\lambda^2)$. С другой стороны, имеется возможность уточнения этого уравнения коэффициентами μ и k , что может значительно уточнить основные размеры каверны. Процесс сращивания также может быть заменен путем применения уравнения сохранения кинетической E_k и потенциальной энергий E_p сечения каверны

$$E_k + E_p = k\pi \frac{\rho}{4} \left(\frac{\partial R^2}{\partial t} \right)^2 + \pi R^2 \Delta P = D, \quad (4)$$

применяя его для момента прохождения кавитатором сечения в неподвижной жидкости, при котором энергия по преодолению сопротивления кавитатора D трансформируется в энергию радиального расширения сечения каверны. Рассмотрение задачи в такой упрощенной постановке совместно с радиальной моделью потока (рисунок 4) придает величинам μ и k очень ясный физический смысл. Здесь $\mu \sim \ln \Psi / R$ может рассматриваться в виде некоторого инерционного коэффициента расширяющегося сечения каверны $k \sim 1$ является поправочным коэффициентом, учитывающим небольшой продольный перенос энергии вдоль сечений каверны. Здесь $\psi = \psi(x, t)$ поверхность, ограничивающая область возмущений течения воздействующую на формирование давления вблизи поверхности каверны и сечений. Поперечные размеры этой области не превышают величин полудлины каверны. С учетом обозначений медленно меняющихся величин μ , k в разложениях (3, а — 3, d) в виде зависимостей (5, а — 5, с), зависимости для μ , k для определения основных размеров стационарной каверны, уточняются на основе данных нелинейного численного расчета обтекания тупых конусов, включая диск [10]. На этой основе зависимости для μ , k определяются выражениями в двухвариантных видах зависимостей от σ и λ (6—7) — (рисунок 5, 6) с сохранением их асимптотической структуры:

$$a) \lambda^2 = \frac{2\mu}{\sigma}, \quad b) R_k^2 = R_n^2 \frac{c_d}{k\sigma}, \quad c) L_k = \frac{R_n}{\sigma} \sqrt{\frac{2c_d \mu}{k}}, \quad (5)$$

$$a) \mu; \ln \sqrt{\frac{1}{e\sigma} \ln \left(\frac{2}{\sigma} + 10 \right)}, \quad b) \mu; \ln \sqrt{\frac{1}{e} (\lambda^2 + 7)}, \quad (6)$$

$$a) k \approx 1 - \frac{2 \ln(2/\sqrt{e})}{\ln(4/\sigma + 18)} \quad b) k; 1 - \frac{2 \ln(2/\sqrt{e})}{\ln(0.8(\lambda)^2 + 35)}, \quad (7)$$

Применение аппроксимаций (6, 7) обеспечивает достаточно высокую точность зависимостей для основных размеров каверны (5, а — 5, с) в широком диапазоне чисел кавитации $\sigma = 0 \div 0.2$ фактически в рамках нелинейной теории 2-го порядка. Здесь также имеется несколько других вариантов аналогичных аппроксимаций для μ и k , незначительно отличающихся друг от друга.

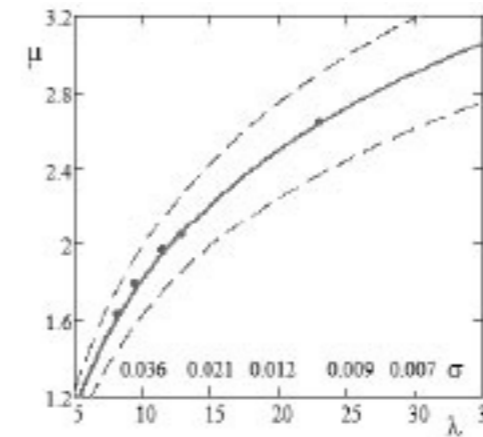


Рисунок 5 — Зависимость $\mu = \mu(\lambda)$
 ————— уточненная зависимость (6),
 - - - - - 10% отклонение величины μ ,
 ••••• $\mu = \sigma \lambda^2$ численный расчет [10]

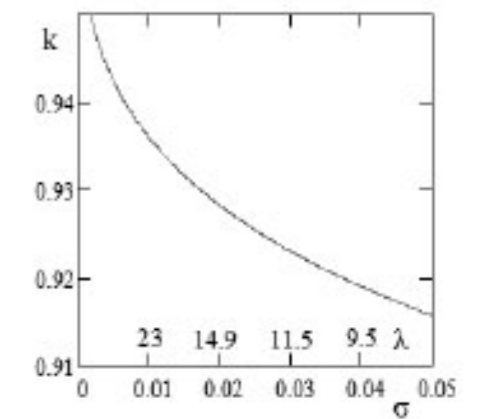


Рисунок 6 — Зависимость (7) для $k(\sigma)$

Форма и основные размеры стационарной каверны $R = R(x)$, может быть определена на основе одной из систем уравнений (8)—(10) при трех основных вариантах задания начальных условий

$$a) \frac{d^2 R^2}{dx^2} + \frac{\sigma}{\mu} = 0, \quad (8)$$

$$b) \left. \frac{dR^2}{dx} \right|_{x=0} = R_n \sqrt{\frac{2c_d}{k\mu}}, \quad c) R^2 \Big|_{x=0} = 0,$$

$$a) \frac{d^2 R^2}{dx^2} + \frac{\sigma}{\mu_c} = 0, \quad \mu_c = \mu \frac{c_d}{(c_d - k\sigma/2)}, \quad (9)$$

$$b) \left[\frac{dR^2}{dx} = R_n \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu_c}} \right]_{x=0}, \quad c) R^2 \Big|_{x=0} = R_n^2,$$

$$a) \frac{d^2 R^2}{dx^2} + \frac{\sigma}{\mu_c} = 0, \quad \mu_c; \mu \frac{c_d}{(c_d - k\sigma)}, \quad (10)$$

$$b) \left[\frac{dR^2}{dx} = 2R_n \sqrt{\frac{2}{k\mu_c} \left(\frac{c_d}{4} - k\sigma \right)} \right]_{x=2R_n}, \quad c) R^2 \Big|_{x=2R_n} = 4R_n^2.$$

При любом из этих вариантов число кавитации может зависеть от $\sigma = \sigma(x)$, включая, в частности, случай вертикальной каверны и др. Величины μ_1, μ_2 в вариантах (9), (10) применяются для небольшой корректировки для сохранения длины каверны при $\sigma = \text{const}$, равной ее значению (5, с). При достаточно небольших отклонениях формы каверны от каверны при $\sigma = \text{const}$ применим вариант зависимостей для μ, k (6, а, 7, а) при типичном значении σ_* . Зависимости (6, b), (7, b) являются очень слабо зависящими от λ , а их составляющие первого порядка зависят только от λ и не зависят от формы каверны. Поэтому при значительных отклонениях и, даже при существенной деформации сечений от круговой формы, применим вариант зависимостей (5, b, 6, b). Экспериментальная верификация уравнений (8)—(10) [36] показала, что эти уравнения даже при существенном отличии формы сечений от круговых являются уравнениями также относительно площади сечений каверны.

Варианты решений при $\sigma = \text{const}$

При любом из этих трёх вариантов при $\sigma = \text{const}$ получаем решение в виде одной и той же эллипсоидальной каверны, однако сдвинутой вдоль ее оси. Ниже: R_k — наибольший радиус каверны, L_m , L_k — расстояние до миделя каверны и длина каверны после миделя, $L_c = L_m + L_k$ — длина каверны, $\lambda = L_c / 2R_k$

Максимально упрощенный вариант уравнений (8) — зависимости (11), (12) в пренебрежении очень малыми размерами кавитатора $\sim O(1/\lambda^2)$ по сравнению с длиной каверны

$$\begin{aligned} \text{a) } R^2 &= R_n \sqrt{\frac{2c_d}{k\mu}} x - \frac{\sigma}{2\mu} x^2, \\ \text{b) } R_k &= R_n \sqrt{\frac{c_d}{k\sigma}}, \quad \text{c) } L_m = L_k, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{d) } L_k &= R_n \frac{\sqrt{c_d 2\mu/k}}{\sigma}, \quad \text{e) } L_c = 2L_k, \quad \text{f) } \lambda = \frac{L_k}{R_k} = \sqrt{\frac{2\mu}{\sigma}}, \\ \bar{R}^2 &= \frac{1}{\lambda^2} \bar{x}(2 - \bar{x}), \quad \bar{R} = R/L_k, \quad \bar{x} = x/L_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Вариант уравнений (9) с учетом размеров кавитатора, зависимости (13, 14)

$$\begin{aligned} \text{a) } R^2 &= R_n^2 + R_n \sqrt{\frac{2(c_d - k\sigma)}{k\mu_1}} x - \frac{\sigma}{2\mu_1} x^2, \quad (13) \\ \text{b) } R_k &= R_n \sqrt{\frac{c_d}{k\sigma}}, \quad \text{c) } L_m = \frac{R_n}{\sigma} \sqrt{\frac{2\mu_1(c_d - k\sigma)}{k}}, \\ \text{d) } L_k &= \frac{R_n}{\sigma} \sqrt{\frac{2\mu_1 c_d}{k}}, \quad \text{e) } L_c = \frac{R_n}{\sigma} \left[\sqrt{\frac{2\mu_1(c_d - k\sigma)}{k}} + \sqrt{\frac{2\mu_1 c_d}{k}} \right], \\ \text{a) } \bar{R}^2 &= \frac{1}{\lambda^2} (\bar{x} + \bar{a}_1) [(2 - \bar{a}_1) - \bar{x}], \quad \bar{x} = \frac{x}{L_k}, \\ \text{b) } \bar{a}_1 &= \frac{\sqrt{c_d} - \sqrt{c_d - k\sigma}}{\sqrt{c_d}} \approx \frac{1}{2} \frac{k\sigma}{c_d}, \quad \bar{a}_1 = \frac{a_1}{L_k}, \end{aligned} \quad (14)$$

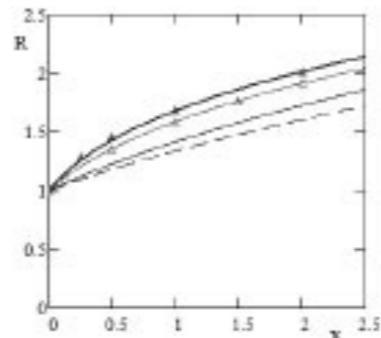


Рисунок 7 — Форма переднего участка каверны за диском:
 ▲▲▲▲ — нелинейный численный расчет $\sigma = 0.01$ [10].
 —▲▲▲▲— аппроксимация — эксперимент: (17, a) [21]
 ————— аппроксимация (17, b)
 ————— расчет при $\sigma = 0.04$, $\sigma = 0.01$, решение (13, a)

где \bar{a}_1 расстояние от носика эллипсоида до сечения при $X = 0$. Одним из существенных недостатков в этом варианте является значительное отклонение результатов расчета формы каверны в небольшой области вблизи диска (рисунок 7).

Вариант уравнений (10) с значительным уточнением профиля каверны — зависимости (15) — (16)

$$\begin{aligned} \text{a) } \bar{R}^2 &= 2^2 + 2\sqrt{\frac{2}{k\mu} \left[\frac{c_d}{4} - k\sigma \right]} (\bar{x} - 2) - \frac{\sigma}{2\mu} (\bar{x} - 2)^2, \\ \text{b) } R_k &= R_n \sqrt{\frac{c_d}{k\sigma}}, \quad \text{c) } L_m = 2 + \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2\mu(c_d - 4k\sigma)}{k}}, \\ \text{d) } L_k &= \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{2\mu c_d}{k}}, \quad \text{e) } L_c = 2 + \frac{1}{\sigma} \left[\sqrt{\frac{2\mu(c_d - 4k\sigma)}{k}} + \sqrt{\frac{2\mu c_d}{k}} \right], \\ \text{a) } \bar{R}^2 &= \frac{1}{\lambda^2} (\bar{x} + \bar{a}_2) [(2 - \bar{a}_2) - \bar{x}], \quad \bar{x} = \frac{x}{L_k}, \\ \bar{a}_2 &= \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4k\sigma}{c_d}} \right) \approx 2 \frac{4k\sigma}{c_d}, \quad \bar{a}_2 = \frac{a_2}{L_k}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь a_2 расстояние от носика эллипсоида до сечения при $x = 2$. Результаты сравнительного расчета решений для формы каверны для трёх вариантов показаны на рисунке 8.

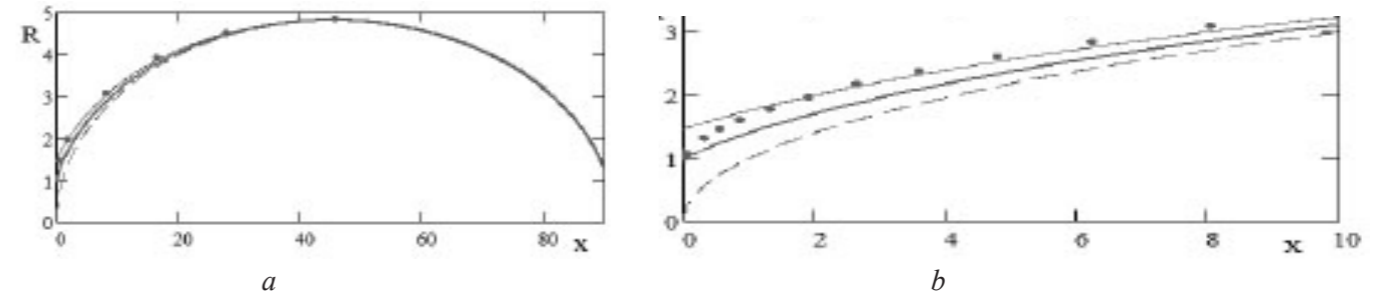


Рисунок 8 — Результаты расчета формы каверны в сравнении с данными нелинейного численного расчета на двух типичных участках:

a — Форма каверны на участке внешнего решения и в целом
 b — Уточненный расчет переднего участка
 ••••• Нелинейный численный расчет [10],
 ————— Уравнения (9), решение (13, a)
 ————— Уравнения (10), решение (15, a)

Для передней части каверны за диском обычно применяется аппроксимация (17, a) [21] с возможной альтернативой (17, b), $x < 2R_n$

$$\text{a) } R = R_n \left(1 + 3 \frac{x}{R_n} \right)^{1/3}, \quad \text{b) } R = R_n \left(1 + 4.5 \frac{x}{R_n} \right)^{1/3.3} \quad (17)$$

Нестационарные осесимметричные каверны — практический расчет

При нестационарном обтекании в общем случае кавитатор с радиусом R_n коэффициентом сопротивления c_d , двигаясь в неподвижной жидкости с переменной скоростью $U_n(t)$ по закону $x = x_n(t)$ в момент времени $t = t_n(x)$ проходит неподвижное сечение x . Здесь $t = t_n(x)$ является функцией обратной $x = x_n(t)$ в момент прохождения сечения задним сечением кавитатора, в котором происходит отрыв. Функция $U(x) = U_n(t)|_{t=t_n(x)}$ определяется на основе закона движения кавитатора $U_n(t)$.

При этом переменными могут быть величины $\Delta P = \Delta P(x, t) = P_\infty(x) - P_c(t)$, и, аналогично, $U(x)$ величины $c_d = c_d(x)$, $R_n = R_n(x)$. Здесь гидростатическое давление $P_\infty = P_\infty(x)$ может зависеть от x , а давление в каверне $P_c = P_c(t)$ от времени t . Оба коэффициента μ , k — зависимости (6), (7), при стационарном обтекании очень слабо зависят от формы рассчитываемой каверны и как показывает опыт расчетов, могут применяться для оценки кавитационного обтекания в большинстве практических случаев даже существенно отличных от каверны при $\sigma = \text{const}$. Чем больше удлинение каверны, тем меньшая точность требуется для определения величины коэффициента μ при расчете течений в различных случаях обтекания. В этом наиболее простом варианте величины μ , k в достаточно типичном диапазоне удлинений $\lambda \sim 10 - 20$ могут быть приняты в качестве универсальных констант $\mu \sim 2 \div 2.2$, $k \sim 0.95 - 0.96$.

Система уравнений для расчета нестационарной осесимметричной каверны определяется на основе трансформации системы уравнений для стационарной каверны при ее записи в системе координат, связанной с неподвижной жидкостью. Система уравнений, соответствующая, в частности, аналогичному варианту стационарной системы (9) в случае кавитаторов типа диска и др. определяется в виде

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\partial^2 R^2}{\partial t^2} + \frac{2\Delta P(x, t)}{\rho\mu(x)} &= 0, \\ \text{b) } \frac{\partial R^2}{\partial t} \Big|_{t=t_n(x)} &= R_n U_n(x) \sqrt{\frac{2[c_d - k\Delta P]}{k\mu_c(x)}}, \quad \text{c) } R^2 \Big|_{t=t_n(x)} = R_n^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение системы уравнений (17) может быть представлено в общем виде интегралами (19)

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} = R_n^2 + 2R_n U_n(x) \sqrt{\frac{c_d - k\sigma(x)}{2k\mu_c}} - \frac{2}{\rho\mu_c} \int_{t_n(x)}^t \Delta P(x,s) ds, \quad (19)$$

$$R^2 = R_n^2 + 2R_n U_n(x) \sqrt{\frac{c_d - k\sigma(x)}{2k\mu_c}} [t - t_n(x)] - \frac{2}{\rho\mu_c} \int_{t_n(x)}^t \left(\int_{t_n(x)}^t \Delta P(x,s) ds \right) dt.$$

При $\Delta P = \Delta P(x)$ рішення (19, а) має універсальний інтеграл (20, а), включаючи аналітичне рішення задачі при русі в частині з постійним прискоренням (20, б)

$$a) R^2 = R_n^2 + 2R_n U_n(x) \sqrt{\frac{c_d - k\sigma(x)}{2k\mu}} [t - t_n(x)] - \frac{\Delta P(x)}{\rho\mu} [t - t_n(x)]^2,$$

$$b) R^2 = R_n^2 + R_n \sqrt{2ax} \sqrt{\frac{2(c_d - k\Delta P / \rho ax)}{k\mu}} \left(t - \sqrt{\frac{2x}{a}} \right) - \frac{\Delta P(x)}{\rho\mu} \left(t - \sqrt{\frac{2x}{a}} \right)^2, \quad (20)$$

$$c) \bar{h}_g \approx \frac{gL_k}{U_0^2} B_{go}(\bar{x}), \quad B_{go}(\bar{x}) \approx \frac{\bar{x}^2}{3}.$$



Рисунок 9 — Данні та результати розрахунку експерименту по вході тіла в воду [47]. Точки — розрахунок на основі рішення (20, а) при $\mu = 2$

Аналогічно можуть бути представлені системи рівнянь нестационарної задачі, що відповідають стаціонарним варіантам рівнянь (8), (10).

Розрахунок каверни, близьких до осесиметричних: искривлення осі каверни

Искривлення осі стаціонарної каверни при $\sigma = \text{const}$ під впливом вспливання її сечень визначається відомим інтегралом (21, а) [21] і визначається в формі залежності (21, б) і більш простої, але менш точної залежності [48] (21, с)

$$a) h_g = \frac{g}{U_\infty^2} \int_0^x \left(\frac{1}{R_0^2(x)} \int_0^x R_0^2(s) ds \right) dx,$$

$$b) \bar{h}_g = \frac{gL_k}{U_0^2} B_{go}(\bar{x}) \quad B_{go}(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{x} - 2 \ln \left(1 - \frac{\bar{x}}{2} \right) \right], \quad (21)$$

$$c) \bar{h}_g \approx \frac{gL_k}{U_0^2} B_{go}(\bar{x}) \quad B_{go}(\bar{x}) \approx \frac{\bar{x}^2}{3}.$$

Результати розрахунку искривлення осі каверни в результаті вспливання її поперечних сечень показані на рисунку 10, а.

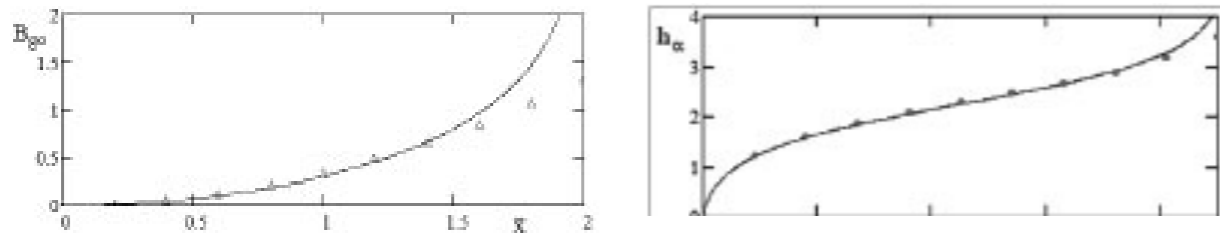


Рисунок 10, а — Искривлення осі каверни за кавитатором типу диска:

- а) при вспливанні сечень каверни
 ————— залежність (21, б),
 Δ Δ Δ Δ Залежність (21, с)
- б) при різних кутах атаки
 ————— залежності (22, а) (13, а),
 - - - - - залежність (22, б)

Розрахунок искривлення осі нестационарної каверни за кавитатором типу диска при вспливанні сечень каверни в системі координат, пов'язаній з нерухою рідиною, визначається залежністю

$$h_g = \frac{g}{U_\infty^2} \int_{t_n(x)}^t \left(\frac{1}{R_0^2(x,t)} \int_{t_n(x)}^t R_0^2(x,s) ds \right) dt.$$

Орієнтовна залежність для розрахунку искривлення осі каверни під впливом поперечної сили на кавитатор визначається залежністю (22, а):

$$a) h_\alpha = \frac{c_{dy} R_n^2}{2} \int_0^x \frac{1}{R^2(x)} dx, \quad b) h_\alpha = R_n \frac{c_\alpha}{4} \sqrt{\frac{2k\mu_1}{c_d}} B_\alpha(\bar{x}), \quad (22)$$

$$c) B_\alpha(\bar{x}) = \left[\ln \frac{(2 - \bar{a}_1)(\bar{x} + \bar{a}_1)}{\bar{a}_1 [2 - (\bar{x} + \bar{a}_1)]} \right], \quad \bar{x} = \frac{x}{L_k} \quad \bar{a}_1 = \frac{a}{L_k}.$$

Для грубої оцінки можливо застосування рішення другого варіанта: системи рівнянь (10), залежності (14). В цьому випадку залежність для h_α отримується в формі (22, б). Результати розрахунку искривлення під впливом підйомної сили кавитатора типу диска під кутом атаки показані на рисунку (10, б).

Ситуація з розрахунком искривлення осі каверни за кавитатором типу диска під кутом атаки виявляється суттєво більш складною, внаслідок чого модель плоских сечень тут може працювати тільки як оцінка. При більшій швидкості розширення сечень, порівняно з визначеною рівняннями (10) (рисунки 7), в цьому випадку можна очікувати суттєво меншої інтенсивності искривлення осі каверни. Дуже хороше співпадіння експериментальних і розрахункових даних по залежностям (21)–(22), підтверджено також даними для конусів з кутами розв'язу не більше 30° [36].

Розрахунок искривлення осі нестационарної каверни в випадку кавитатора типу диска під кутом атаки в системі координат, пов'язаній з нерухою рідиною визначається залежністю

$$h_\alpha(x, t) = \frac{c_{dy} R_n^2}{2} \int_{t_n(x)}^t \frac{1}{R^2(x, t)} dt. \quad (23)$$

Вспливання каверни під впливом поперечних сил на кавитаторі в загальному випадку є двохвимірним вектором і описується тривимірною кривою, залежною від часу.

Позиціонування тіла в каверні

Форма тіла вибирається з умови найбільш оптимального режиму руху тіла в стаціонарній каверні при постійних значеннях швидкості руху і тиску газу в каверні. Задання форми і розмірів визначається двома з трьох величин, що визначають довжину L_b , радіус тіла R_b в його задньому основанні, а також подовження тіла $\lambda_b = L_b / 2R_b$. Задання положення тіла в каверні визначається двома параметрами: відношенням довжини тіла до довжини каверни L_b / L_m і відношенням зазору Δ_b між тілом і каверною в задньому основанні тіла $\Delta_b = \Delta_b / R_b$ (рисунки 11).

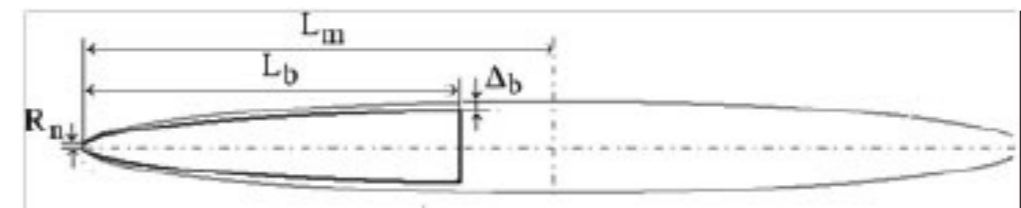


Рисунок 11 — Параметри задання положення тіла в каверні

Найбільш прийнятним, швидше за все, є положення більшої частини тіла в передній частині каверни.

Для можливості розрахунку форми каверни за параметрами тіла, зазору між тілом і каверною і бажаним положенням тіла, необхідним є визначення числа кавітації σ і розміру кавитатора потрібної форми R_n в сеченні отримання.

С учетом очень малых размеров кавитатора в реальных случаях, включая размеры области вблизи кавитатора, здесь в первом приближении возможно применение максимально упрощенного уравнения для формы каверны (12) при $L_m \approx L_k$.

$$\bar{R}^2 = \frac{1}{\lambda^2} \bar{x}(2 - \bar{x}), \quad \bar{R} = R / L_k, \quad \bar{x} = x / L_k. \quad (24)$$

Исходя из уравнения (24), получим

$$\left[\frac{1}{\lambda} \sqrt{\bar{x}(2 - \bar{x})} \right]_{\bar{x}=\bar{L}_b} = \bar{R}_b (1 + \Delta_b). \quad (25)$$

Из уравнений (25) определяется зависимость (26) для удлинения каверны λ в зависимости от размеров тела в каверне

$$\lambda = \frac{2\lambda_b}{(1 + \Delta)} \sqrt{\frac{2 - \bar{L}_b}{\bar{L}_b}}, \quad \bar{L}_b = L_b / L_k, \quad \Delta = \Delta / R_b. \quad (26)$$

Из зависимостей (5, а, 6, b, 26) определяется число кавитации σ в виде зависимостей (27) от параметров тела

$$\sigma = \frac{2\mu(\lambda)}{\lambda^2}, \quad \mu(\lambda) = \ln \sqrt{\frac{(\lambda^2 + 7)}{e}}. \quad (27)$$

Исходя из зависимостей (25) с учетом зависимостей (6, с, 7, с, 11, b, 11, d) при заданном коэффициенте сопротивления кавитатора \tilde{n}_d , определяется величина радиуса кавитатора R_n в сечении отрыва

$$\frac{R_n}{R_b} = \frac{1}{\lambda_b} \sqrt{\frac{2\mu(\lambda)k(\lambda)}{c_d(\lambda)} \frac{(1 + \Delta^2)}{(2 - \bar{L}_b)}} \quad c_d = c_d(\sigma)|_{\sigma=\sigma(\lambda)} \quad (28)$$

Результаты расчета по зависимостям (25, 26) показаны на рисунках 12, 13.

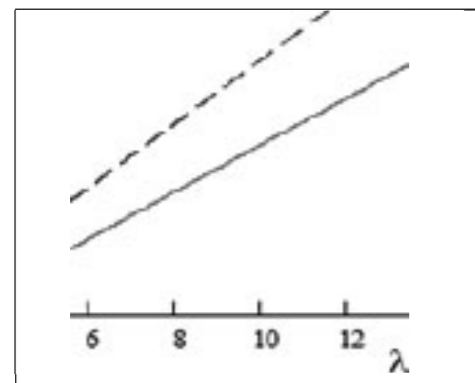


Рисунок 12 — Зависимость удлинения каверны от удлинения тела, рассчитанная по уравнениям (25)

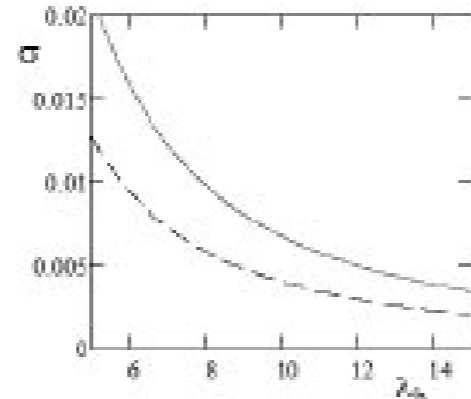


Рисунок 13 — Зависимость числа кавитации от удлинения тела: зависимости (25-26)
 — $\Delta = 0.1, \bar{L}_b = 1$, - - - - $\Delta = 0.1, \bar{L}_b = 0.7$

Глиссирование тела по поверхности каверны

Ряд наиболее интересных результатов в этой области представлен работами. Выдающиеся результаты в рамках известного ударного подхода Н. Wagner [47] и гипотезы плоских сечений, получены в работах [26—28]. В настоящее время применяются для большей части расчетов глиссирования в каверне на основе ударных присоединенных масс в виде зависимостей (29):

$$a) m_h^* = \rho\pi R_b^2 \left(h \frac{2\Delta + h_0}{(\Delta + h_0)^2} \right), \quad b) m_\Delta^* = \rho\pi R_b^2 \left(\frac{2h_0}{\Delta + h_0} \right),$$

где h_0 переменная глубина погружения сечений корпуса в каверну, Δ — переменная величина разности радиусов каверны и тела ($R - R_b$) в плоскости, перпендикулярной оси каверны. При движении тела по трехмерной траектории в системе координат, связанной с неподвижной жидкостью, обе эти величины являются функциями координат и

времени, величина h_0 в общем случае является вектором. Более доступным для понимания является представление зависимостей (29) в виде зависимостей (30) от относительной высоты замыва \bar{H}_0 , $\bar{H}_0 = H_0 / R_b$ смоченной части поверхности тела $\bar{R}_b = \bar{R}(x)$ (рисунок 14)

$$a) m_h^* = \frac{1 - \bar{H}_0 / 4}{1 - \bar{H}_0 / 2}, \quad b) m_\Delta^* = \frac{\bar{H}_0}{4(1 - \bar{H}_0 / 2)}, \quad (30)$$

$$c) \bar{m}_{oh}^* = \rho\pi R_b^2 (1 - \bar{H}_0 / 2)$$

Зависимости (30, а, 30, b) представлены в безразмерном виде относительно ударной присоединенной массы полупогруженного цилиндра, зависимость (30), плавающего на плоской поверхности воды, величина которого равна величине присоединенной массе пластинки при равных радиусах цилиндров и ширине пластинки.

Очень существенным с точки зрения расчетов глиссирования в каверне, в наиболее общих сложных случаях обтекания, является понимание основных физических эффектов формирования процесса глиссирования совместно с детальной проработкой его особенностей на наиболее простых моделях. Это может быть основой достаточно адекватной постановки экспериментов и со-здания программ расчета с учетом их сопоставления с возможной реальностью в процессе разработки.

Далее для простоты рассматривается случай плоского движения без учета искривления оси каверны под действием гравитации и поперечной сила на кавитаторе. Система координат соответствует $x = 0$ в районе кавитатора. Представим величину $h(x)$ в виде

$$h(x) = \alpha x - [R(x) - R_b(x)] = [\alpha x - \Delta(x)]. \quad (31)$$

которая позволяет трансформировать уравнение (30) к следующему виду

$$a) m_h^* = \rho\pi R_b^2(x) \left[1 - \left(\frac{\Delta(x)}{\alpha x} \right)^2 \right], \quad b) m_\Delta^* = \rho\pi R_b^2(x) 2 \left(1 - \frac{\Delta(x)}{\alpha x} \right). \quad (32)$$

где величины α , Δ положительны при глиссировании по верхней части каверны и отрицательны при движении по нижней части.

Зависимость $\Delta = \Delta(x)$ является разрывной функцией в сечении, соответствующем началу глиссирования но это оказывается достаточно несущественным. Аналогичная трансформация имеет место и в общем случае движении с нестационарным обтеканием по трехмерной траектории и также с учетом искривления оси каверны под действием гравитации и поперечной силы на кавитаторе.

Расчет глиссирования при стационарном обтекании в рамках этой наиболее простой модели прямолинейно движущихся тел с учетом уравнений (32) сводится к следующей системе простых уравнений:

Момент количества движения элемента жидкости в поперечном направлении в каждом из сечений вдоль оси диапазоне x , определяется неравенством (33, а):

$$a) \alpha x - \Delta(x) \geq 0, \quad b) m^* = m_h^* + m_\Delta^*, \quad (33)$$

$$c) m^* v_y = \rho\pi R_b^2(x) U_\infty \left\{ \alpha \left[1 - \left(\frac{\Delta(x)}{\alpha x} \right)^2 \right] - 2 \frac{d\Delta(x)}{dx} \left[1 - \left(\frac{\Delta(x)}{\alpha x} \right) \right] \right\}.$$

Уравнение гидродинамической силы элементов жидкости на глиссирующую поверхность в поперечном направлении в каждом из сечений вдоль оси примет вид

$$f_p(x) = U_\infty^2 \frac{d}{dx} \left\{ \rho\pi R_b^2(x) \alpha \left[1 - \left(\frac{\Delta(x)}{\alpha x} \right)^2 \right] - 2 \frac{d\Delta(x)}{dx} \left[1 - \left(\frac{\Delta(x)}{\alpha x} \right) \right] \right\}. \quad (34)$$

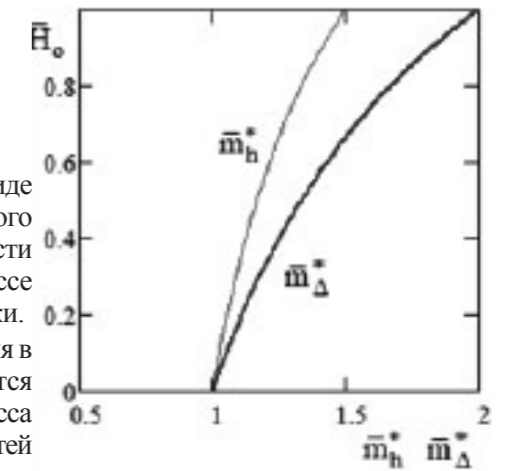


Рисунок 14 — Распределение величин ударных присоединенных масс цилиндра в зависимости от высоты его смоченной поверхности

Качественная картина распределения моментов количества движения в поперечном направлении и гидродинамических сил на глассирующую поверхность в простейшем случае глассирования цилиндра по цилиндрической свободной границе показаны на рисунках 15 и 16.

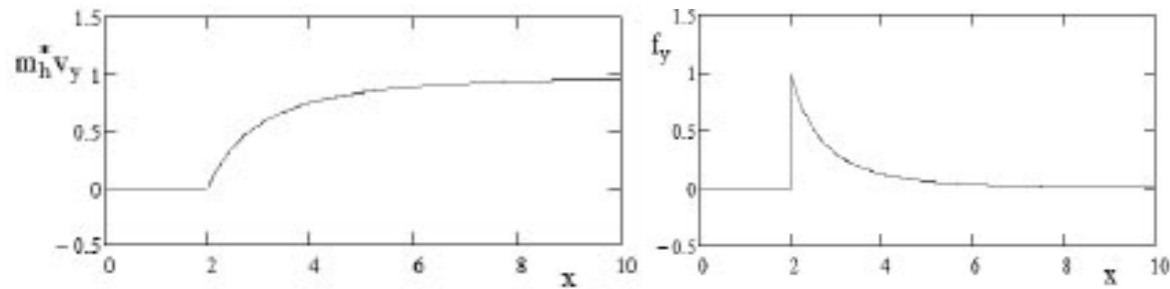


Рисунок 15 — Типичная картина распределения поперечного момента m^*v_y количества движения в районе глассирующей поверхности при глассировании цилиндра по цилиндрической свободной границе

Рисунок 16 — Типичная картина распределения поперечной гидродинамической силы на единицу длины в районе глассирующей поверхности при глассировании цилиндра по цилиндрической свободной границе

Подъемная сила F_L глассирующей поверхности тела длиной L_b , с учетом зависимостей (35, а) и уравнения (35, б) для определения координаты x_p , соответствующей сечению с началом глассирования, в достаточно общем случае определяется зависимостью (35, с)

$$\begin{aligned}
 \text{а) } F_p &= \int_{x_p}^{L_b} f_p(x) dx = \int_{x_p}^{L_b} U_\infty \frac{d}{dx} m^* v_y dx, \\
 \text{б) } [R_b(x) + \alpha x = R(x)]_{x=x_p} &\rightarrow x_p = \frac{\Delta(x)}{\alpha}, \\
 \text{в) } F_p &= \left[\rho \pi R_b^2(x) U_\infty^2 \left[\alpha \left(1 - \left(\frac{\Delta(x)}{\alpha x} \right)^2 \right) - 2 \frac{d\Delta(x)}{dx} \left(1 - \left(\frac{\Delta(x)}{\alpha x} \right) \right) \right] \right]_{x=L_b}
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Суммарный момент сил M_p , элементов жидкости, действующих на глассирующую поверхность в каждом из сечений x относительно расстояния до кавитатора и расстояние до центра давления глассирующей силы x_c , определяются зависимостями (36, а, б, в)

$$\begin{aligned}
 \text{а) } M_p &= \int_{x_p}^{L_b} x f_p(x) dx = \int_{x_p}^{L_b} U_\infty x \frac{d}{dx} m(x)^* v(x)_y dx, \\
 \text{б) } M_p &= U_\infty \left[x m(x)^* v(x)_y - \int_{x_p}^{L_b} m(x)^* v(x)_y dx \right], \text{ в) } x_c = \frac{M_p}{F_p}.
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

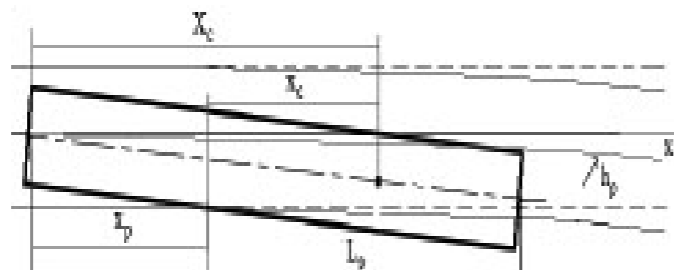


Рисунок 17 — Глассирование цилиндра по цилиндрической свободной границе

Одним из наиболее простых случаев, с точки зрения демонстрации физики процесса глассирования тела в каверне, и в тоже время, достаточно универсально пригодным для контроля расчетов в более общих сложных

случаях, является случай обтекания, когда большая часть поверхностей глассирующего тела и каверны близки к цилиндрической форме (рисунок 17). Предельно упрощенная постановка этой задачи соответствует случаю глассированию цилиндра по цилиндрической свободной границе. Ряд зависимостей решения этой задачи, в несколько другой постановке, получен в работе [4].

Коэффициент подъемной силы \tilde{N}_L в этом случае определяется исходя из зависимости (35, с) в виде (37):

$$\tilde{N}_L = 2\alpha \left[1 - \left(\frac{\Delta}{\alpha L_b} \right)^2 \right], \quad F_L = C_\alpha \pi R_b^2 \frac{\rho U^2}{2}.
 \tag{37}$$

Расстояние от переднего торца цилиндра под углом атаки до сечения x_p , где начинается глассирование и до центра давления x_c , а также длина x_c передней части глассирующей поверхности до центра давления x_c , определяются зависимостями (38)

$$\text{а) } x_p = \frac{\Delta}{\alpha}, \text{ б) } x_c = \frac{2\Delta L_b}{\Delta + \alpha L_b}, \text{ в) } x_c = X_c - \frac{\Delta}{\alpha}.
 \tag{38}$$

Относительные длины глассирующей поверхности L_p / L_b и передней части глассирующей поверхности x_c / L_p определяются в виде

$$\text{а) } \frac{L_p}{L_b} = \frac{1}{L_b} \left(L_b - \frac{\Delta}{\alpha} \right), \text{ б) } \frac{x_c}{L_p} = \frac{\frac{\Delta}{\alpha}}{L_b - \frac{\Delta}{\alpha}}, \text{ в) } \frac{\Delta}{R_b}.
 \tag{39}$$

Трансформация полученной нами зависимости (40, а) к виду аналогичной зависимости (40, б) работы [3, 4] в других переменных для относительной длины от центра давления до задней кромки глассирующей поверхности, обнаруживает их совпадение

$$\text{а) } (1 - \bar{x}_c) = \left[\frac{L_b \alpha}{\Delta + L_b \alpha} \right]_{L_b = \frac{h_o + \Delta}{\alpha}} = \frac{\Delta + h_o}{2\Delta + h_o}, \text{ б) } \frac{\Delta + h_o}{2\Delta + h_o}.
 \tag{40}$$

Величина угла атаки α может быть выражена в виде зависимости от высоты замыва поверхности тела \bar{H}_o в его заднем сечении и параметра $\bar{L}_b = L_b / L_k$, определяющем, в какой части каверны тело находится,

$$\alpha(\lambda, \bar{H}_o, \bar{L}_b) = \frac{\frac{\Delta}{\alpha}}{(1 + \lambda)\lambda} \sqrt{\frac{2 - \bar{L}_b}{\bar{L}_b}}, \quad \lambda = \frac{\Delta}{R_b}, \quad \lambda = \frac{L_k}{R_k}.
 \tag{41}$$

При этом расстояние до центра давления от начального сечения поверхности глассирования определяется зависимостью:

$$\bar{x}_c = 1 - \frac{2}{4 - \bar{H}_o}, \quad \bar{x}_c = \frac{x_c}{L_p}, \quad \bar{x}_c|_{\bar{H}_o=0} = \frac{1}{2}, \quad \bar{x}_c|_{\bar{H}_o=1} = \frac{1}{3}.
 \tag{42}$$

Зависимость изменения положения центра давления от высоты смоченной части глассирующей поверхности в заднем сечении тела изображена на рисунке 18.

Важно заметить, что в процессе глассирования сечения каверны не только деформируются, но и отталкиваются глассирующей поверхностью, приобретая некоторую скорость поперечного движения как показано на рисунке 17: пунктир это невозмущенная свободная поверхность цилиндрической формы, сплошная линия соответствует движению сечения свободной поверхности вниз под действием глассирующей поверхности. Приближенное уравнение для определения искривления, соответственно, оси каверны $h_p = h_p(x)$ и скорости ее поперечных сечений под действием глассирующей поверхности определяется в виде

$$\frac{d}{dx} \left\{ \left[\alpha - \frac{dh_p}{dx} \right] \bar{m}_{hp}^* - \frac{d\Delta}{dx} \bar{m}_{\Delta p}^* - \rho \pi \frac{dh_p}{dx} \left(1 + \frac{\Delta}{R_b} \right)^2 \right\} = 0.
 \tag{43}$$

При этом, как это видно из рисунка 17, может иметь место существенное уменьшение, в частности в торцевом сечении тела, величин ударных присоединенных масс, определяемых в этом случае зависимостями (41).

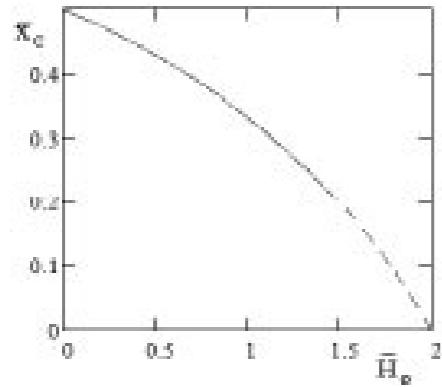


Рисунок 18 — Расстояние между центром давления и начальным сечением глиссирования в зависимости от высоты смоченной поверхности цилиндра в его заднем торце

При появлении поперечной скорости сечений каверны уменьшается также величина относительной скорости взаимодействия глиссирующей поверхности с каверной что в определенной степени эквивалентно уменьшению эффективного угла атаки. Результат взаимодействия тела с каверной в целом может привести к изменению всех параметров обтекания при существенном уменьшении силы глиссирования.

Принимая начало координат в сечении $x = 0$, соответствующему началу глиссирования с учетом зависимостей (40), (41) задача для определения искривления каверны h_p под действием глиссирующей поверхности при нулевых начальных условиях определяется в виде

$$\frac{dh_p}{dx} \left[\bar{m}_{hp}^* + (1 + \Delta)^2 \right] + \left[\alpha \bar{m}_{hp}^* - \frac{d\Delta}{dx} \bar{m}_{\Delta p}^* \right] = 0, \quad h_p|_{x=0} = 0 \quad \text{при } \Delta = \Delta / R_b. \quad (45)$$

Решение задачи (42), соответствующее глиссированию цилиндра по цилиндрической свободной границе в виде двух приближений показано на рисунке 19.

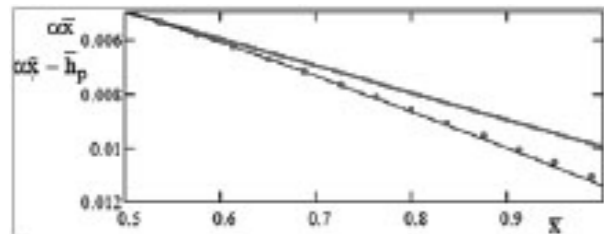


Рисунок 19 — Искривление оси каверны в районе глиссирования под действием сил глиссирования

— положение оси цилиндра под углом атаки
 — искривление оси каверны решение первого приближения, уравнение (42)
 ••••• искривление оси каверны — второе приближение

Здесь исходные данные для расчета подобраны применительно к случаю движения тела с удлинением $\lambda_b = 20$ под углом атаки $\alpha = 0.01$ с задней частью тела, близкой к цилиндрической, при заднем торце тела в миделе каверны с удлинением $\lambda \approx 18$ при зазоре между телом и каверной в районе глиссирования $\Delta / R_b = 0.1$. Этот случай соответствует координате начального сечения глиссирования $x_p / L_k = 0.5$.

Результаты оценки величин углов наклона искривленной, под действием глиссирования, оси каверны, в сравнении с углом атаки цилиндра, показаны на рисунке 20.

Результаты оценок на основе эвристической, но физически понятной модели, указывают на возможность существенной коррекции зависимостей при расчете глиссирования с учетом важности как самих решений, так и способа их применения. Предварительные оценки сравнения с экспериментальными данными [36] указывают на наличие эффекта уменьшения величин подъемной силы вследствие прогиба оси каверны под действием сил глиссирования. Однако здесь имеется необходимость более детальной проверки на основе данных экспериментов [36] с учетом взаимодействия процесса глиссирования с процессами существенного искривления оси каверны под действием гравитации и особенно подъемной силы на кавитаторе.

Зависимость (35, с) для силы глиссирования F_p , с учетом взаимодействия с каверной преобразуется к виду (46):

$$F_p = \rho \pi R_b^2(x) U_0^2 \left[\left(\alpha - \frac{dh_p(x)}{dx} \right) \left(1 - \left(\frac{\Delta(x) + h_p(x)}{\alpha x} \right)^2 \right) - 2 \frac{d\Delta(x)}{dx} \left(1 - \left(\frac{\Delta(x) + h_p(x)}{\alpha x} \right) \right) \right]_{x=L_b} \quad (46)$$

При небольшом изменении $\Delta(x)$ при увеличении давления вследствие опускания сечений каверны в первом приближении можно пренебречь.

Глиссирование в каверне в общем случае происходит в процессе взаимодействия с импульсом количества движения вследствие воздействия гравитации и особенно воздействия поперечной силы на кавитаторе. Существенным может быть совместное воздействие на каверну гравитации, сил на кавитаторе и глиссирования с учетом их взаимодействия на величину подъемной силы глиссирующей поверхности, а также на условия обтекания стабилизирующих и управляющих элементов вблизи торцевого сечения тела. Особенно существенным может оказаться учет воздействия этих факторов при их взаимодействии для обработки результатов маломасштабных экспериментов при недостаточно высоких скоростях движения и обтекания моделей.

Запишем уравнения (19), (20) для расчета искривления оси каверны при воздействии гравитации в виде

$$x \leq x_p: \quad a) \frac{d}{dx} \left(\rho R^2 \frac{dh_g}{dx} \right) - \frac{\rho g}{U^2} R^2 = 0, \quad b) R^2 \frac{dh_{g\alpha}}{dx} = \frac{g\kappa}{U^2} \int_0^{x_p} R^2 dx - \frac{c_{dy} R_n^2}{2}. \quad (47)$$

Эти уравнения имеют место на начальном участке до начала глиссирования и их предварительный расчет определяет начальные условия для расчета на участке смоченной части поверхности глиссирования.

С учетом взаимодействия процессов гравитации поперечной силы на кавитаторе, сил глиссирования на смоченном участке глиссирующей поверхности могут происходить существенные искривления оси каверны h_{\bullet} и, соответственно, ударных присоединенных масс глиссирования — зависимости (44, б, 44, с) при изменении углов атаки глиссирующей поверхности. Уравнение для расчета искривления оси каверны на участке глиссирующей поверхности с учетом совместного влияния гравитации, силы на кавитаторе и глиссирующей поверхности в этом случае определяется в виде (45, d). При этом коэффициент $\kappa_{fa} < 1$ учитывает наличие гидростатической силы в сечении каверны.

a) $x_p \leq x \leq L_b$,

$$h_{\bullet} = h_{g\alpha} + h_p, \quad h(x) - h_{\bullet}(x) = \alpha x - (\Delta(x) + h_{\bullet}(x)),$$

$$b) \bar{m}_{h_{\bullet}}^* = \frac{m_{h_{\bullet}}^*}{\rho \pi R_b^2(x)} = \left[1 - \left(\frac{\Delta(x) + h_{\bullet}(x)}{\alpha x} \right)^2 \right],$$

$$c) \bar{m}_{\Delta_{\bullet}}^* = \frac{m_{\Delta_{\bullet}}^*}{\rho \pi R_b^2(x)} = 2 \left(1 - \frac{\Delta(x) + h_{\bullet}(x)}{\alpha x} \right), \quad (48)$$

$$d) \frac{d}{dx} \left(\rho R^2 \frac{dh_{\bullet}}{dx} \right) - \kappa_{fa} \frac{\rho g}{U^2} R^2 + \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left[\left(\alpha - \frac{dh_{\bullet}}{dx} \right) m_{h_{\bullet}}^* - \frac{d\Delta}{dx} m_{\Delta_{\bullet}}^* \right] = 0,$$

$$e) R^2 \frac{dh_{\bullet}}{dx} = \frac{g\kappa_{fa}}{U^2} \int_0^{x_p} R^2 dx - \frac{c_{dy} R_n^2}{2} + \frac{g\kappa_{fa}}{U^2} \int_{x_p}^x R^2 dx - \frac{1}{\pi} \int_{x_p}^x \frac{d}{dx} \left[\left(\alpha - \frac{dh_{\bullet}}{dx} \right) m_{h_{\bullet}}^* - \frac{d\Delta}{dx} m_{\Delta_{\bullet}}^* \right] dx.$$

Здесь уравнение (44, d) аналогично уравнению (43) может быть записано в интегральном виде, начиная с первого интеграла этого уравнения (44, e).

Исходя из наиболее простых моделей при стационарном глиссировании здесь можно отметить основные моменты в целом, которые следует учитывать при постановке экспериментов и разработке программ для расчета глиссирования в общем случае:

В отличие от глиссирования по плоской поверхности сила глиссирования в каверне формируется также и течением сверху каверны и как следует из рисунка 14 влияние воздействия этой части течения очень существенно порядка 25%. При этом постановка экспериментов глиссирования в каверне и расчетных моделей на основе модели глиссирования в полукаверне на плоской поверхности может происходить с двойным нарушением физики процесса, так как при такой постановке скорее всего исключается возможность учета существенного уменьшения силы глиссирования при просадке каверны под воздействием глиссирования. Причем возможность

свободной просадки полукаверны каверны на плоской поверхности жидкости в эксперименте скорей всего также маловероятна.

Нестационарное глссирование

В большинстве случаев можно считать, что движение с переменной скоростью по криволинейной траектории на участках длины значительно больше длин тела и каверны близко к прямолинейному. Процессы движения обтекания в этом случае рассматриваются в системе координат $y, 0, x$, связанной с неподвижной жидкостью, в рамках двухмерной модели. Движение оси тела в этой неподвижной системе координат в общем случае описывается зависимостью (49, а)

$$a) \alpha(t)[x_n(t), -x], \quad h(x, t) = \alpha[x_n(t) - x] - \Delta(x, t) . \quad (49)$$

при величине $h(x, t)$ в виде зависимости (45, b). Здесь $x = x_n(t)$ закон движения кавитатора по касательной к траектории на спрямленном участке траектории. При этом зависимости для ударных присоединенных масс в системе координат, связанной с неподвижной жидкостью определяются зависимостями (50):

$$a) m_h^* = \rho \pi R_b^2(x, t) \left[1 - \left(\frac{\Delta(x, t)}{\alpha(t)(x_n(t) - x)} \right)^2 \right], \quad (50)$$

$$b) m_\Delta^* = \rho \pi R_b^2(x, t) 2 \left(1 - \frac{\Delta(x, t)}{\alpha(t)(x_n(t) - x)} \right).$$

Здесь и форма тела и форма каверны, включая величину зазора $\Delta(x, t)$, должны быть представлены в системе координат, связанной с неподвижной жидкостью.

В частном случае при движении с постоянной скоростью в стационарной каверны при постоянном давлении форма каверны определяется исходя из интеграла (19, b) в виде (47, b)

$$a) x_n(t) = Ut, \quad t_n(x) = \frac{x}{U}, \quad (51)$$

$$b) R^2 = R_n^2 + 2R_n U_n(x) \sqrt{\frac{c_d - k\sigma(x)}{2k\mu}} \left[t - \frac{x}{U} \right] - \frac{\Delta P}{\rho\mu} \left[t - \frac{x}{u} \right]^2.$$

При этом основные элементы глссирования определяются зависимостями (52)

$$a) \alpha[x_n(t) - x]: \quad \alpha(Ut - x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \alpha(Ut - x) = \alpha U,$$

$$b) f(x, t) = \alpha U \frac{\partial}{\partial t} m_h^*(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial R}{\partial t} m_\Delta^* \right), \quad (52)$$

$$c) F_p = \int_{x_n(t) - x_p(t)}^{x_n(t) - L_b} \left[\alpha U \left(\frac{\partial m_h^*(x, t)}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial R}{\partial t} m_\Delta^* \right) \right] dx.$$

В интеграле (52, c) $x_p(t)$ — расстояние от кавитатора до начального сечения глссирующей части поверхности тела. Аналогично сила глссирования в общем случае определяется зависимостью (53)

$$a) f_p(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \alpha(t) ((x_n(t) - x))}{\partial t} m_h^*(x, t) - \frac{\partial R(x, t)}{\partial t} m_\Delta^*(x, t) \right], \quad (53)$$

$$b) F_p(t) = \int_{x_n(t) - x_p(t)}^{x_n(t) - L_b} f_p(x, t) dx .$$

При этом в дальнейшем может возникнуть необходимость улучшения зависимости (49) и (48) с учетом возможного уменьшения силы глссирования, вследствие прогиба каверны под действием силы глссирования: (уравнение (42), рисунок 20).

Сопротивление тел в каверне

Сопротивление тела в каверне D зависит от значительного количества величин, при этом коэффициент сопротивления включает две части, одна из которых \tilde{N}_{DC} характеризует кавитационное сопротивление, другая часть C_{DF} — вязкое сопротивление корпуса, контактирующего с водой:

$$a) C_{DF} = C_{Dc} + C_{Df}, \quad b) C_D = D / \pi R_b^2 \frac{\rho U_n^2}{2}. \quad (54)$$

Для целей предварительной оценки и возможностей, по крайней мере качественной оптимизации по уменьшению сопротивления, вязкую компоненту сопротивление можно определить в виде произведения величины площади смоченной части глссирующей поверхности на коэффициент вязкого сопротивления пластинки $\tilde{\eta}_f$ на основе зависимости (46, а) Шлихтинга [37]:

$$a) c_f = \frac{0.455}{(\lg Re_l)^{2.58}}, \quad b) \cos(\beta) = \frac{\Delta - h}{\Delta + h}. \quad (55)$$

В качестве исходных задаются величины, характеризующие тело и, определяющие основные параметры стационарной каверны, зависимости (23—27). Величина площади смоченной части глссирующей поверхности тела в каверне $\bar{S} = S / R_b^2$ исходя из зависимости (51, b) для угла смоченной поверхности 2β [25]—[28] и, с учетом зависимости (31), определяется интегралом (52, а). В рамках системы безразмерных величин (52, b) площадь смоченной части глссирующей поверхности определяется в зависимости от формы тела: в случае цилиндра — $B_c = B_c(\bar{x})$, (52, c) и эллипсоидальной формы тела — $B_E = B_E(\bar{x})$, (52, d).

$$a) \bar{S} = \int_{\bar{x}_p}^{\bar{L}_b} B(\bar{x}) a \cos \frac{1 - \left(\frac{\lambda_b}{\bar{L}_b \Delta} \right) \alpha \bar{x}}{\left(\frac{\lambda_b}{\bar{L}_b \Delta} \right) \alpha \bar{x}} d\bar{x}, \quad \Delta = \frac{\Delta}{R_b}, \quad \lambda_b = \frac{L_b}{2R_b}, \quad (56)$$

$$b) \bar{S} = \frac{S}{R_b^2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L_k}, \quad \bar{L}_b = \frac{L_b}{L_k}, \quad \bar{x}_p = \frac{x_p}{L_k},$$

$$c) B_c(\bar{x}) = R_b, \quad \bar{B}(\bar{x}) = 2 \left(\frac{2\lambda_b}{\bar{L}_b} \right),$$

$$d) B_E(\bar{x}) = R_b \sqrt{\frac{\bar{x}(2 - \bar{x})}{\bar{L}_b(2 - \bar{L}_b)}}, \quad \bar{B}(\bar{x}) = 2 \left(\frac{2\lambda_b}{\bar{L}_b} \right) \sqrt{\frac{\bar{x}(2 - \bar{x})}{\bar{L}_b(2 - \bar{L}_b)}}.$$

Величина R_b в общем случае определяется как радиус поверхности тела длиной L_b в каверне с полудлиной, равной L_k при величине зазора между телом и каверной $\Delta = \Delta(x)$, величина x_p определяет расстояние от кавитатора до начала смоченной части поверхности глссирования.

Результаты расчета площади смоченной части поверхности тела в форме цилиндра и эллипсоида при глссировании в каверне более тяжелого и легкого тел показаны на рисунке 21.

Здесь под ρ_b подразумевается осредненная массовая плотность тела, $\bar{\rho}_b = \rho_b / \rho$.

Для расчета кавитационной части коэффициента сопротивления применяется известная зависимость (57, а) для коэффициента сопротивления по наибольшему радиусу каверны

$$a) \tilde{N}_D = k\sigma = k \frac{2\mu}{\lambda^2}, \quad b) C_{Dc} = k(\lambda) \left(\frac{\mu(\lambda)(1 + \Delta_b)^4}{2\lambda_b^2(2 - \bar{L}_b)^2} \right). \quad (57)$$

с пересчетом этой зависимости по площади торцевого сечения тела и величин k, μ, λ через параметры тела, зависимость (26) с учетом зависимостей (6, b, 7, b) приводится к виду (57, b), где под Δ_b понимается зазор в торце тела.

Величина суммарного коэффициента сопротивления C_{DF} , включающего составляющие вязкого и кавитационного сопротивления исходя из зависимостей (54, 55, а, 56, 57) определяется выражением (58):

$$C_{DF} = \frac{0.455 / \pi}{\left\{ \log \left[\kappa_f (1 - \bar{x}_p) Fr_L \right] \right\}^{2.58}} \int_{\bar{x}_p}^{\bar{L}_b} B(\bar{x}) a \cos \frac{2 - \left(\frac{2\lambda_b}{\bar{L}_b \Delta} \right) \alpha \bar{x}}{\left(\frac{2\lambda_b}{\bar{L}_b \Delta} \right) \alpha \bar{x}} d\bar{x} + k \left(\frac{\mu(1 + \Delta)^4}{2\lambda_b^2(2 - \bar{L}_b)^2} \right), \quad Fr_L = \frac{UL_b}{\nu}. \quad (58)$$

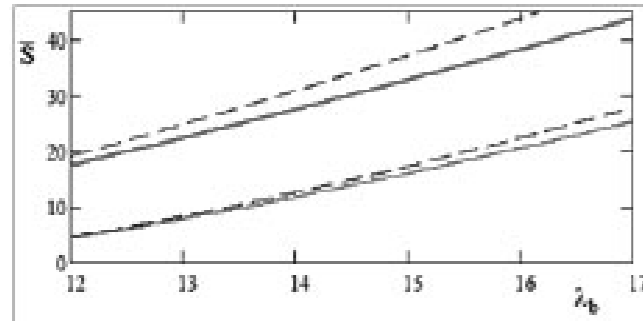


Рисунок 21 — Оценка площади смоченной части глссирующих поверхностей в каверне для тел в форме цилиндра и эллипсоида

— Эллипсоид, $\lambda = 0.1, \alpha = 0.007, \bar{p}_b \sim 2$
 - - - - - Эллипсоид, $\lambda = 0.1, \alpha = 0.007, \bar{p}_b \sim 1.5$,
 Данные аналогичного расчета для цилиндра при равных величинах радиуса в заднем торце и расстояния до кавитатора

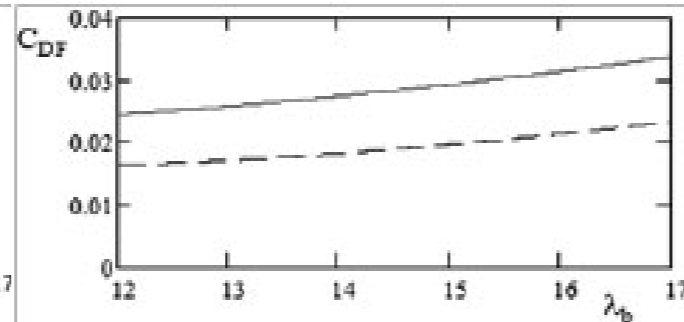


Рисунок 22 — Оценка величин суммарного коэффициента сопротивления глссирующего тела эллипсоидальной формы $Re_L = 5.6 \times 10^8, \kappa_f = 0.8$

— $\lambda = 0.1, \bar{L}_b = 1, \alpha = 0.07, \kappa_f = 0.8, \bar{p}_b \sim 2$
 - - - - - $\lambda = 0.1, \bar{L}_b = 1, \alpha = 0.05, \kappa_f = 0.8, \bar{p}_b \sim 1.5$

где ν — кинематический коэффициент вязкости. Результаты оценки величин суммарного коэффициента сопротивления тела иллюстрируются рисунком 22.

Зависимость для суммарного коэффициента сопротивления является многопараметрической и требующей, по крайней мере дополнительной методики, для подбора нужных параметров с точки зрения максимального снижения сопротивления. Набор исходных данных для расчета, представленного на рисунке 19, достаточно далек от оптимальной комбинации исходных данных, но здесь есть существенная вероятность нахождения существенно более оптимальной комбинации параметров с точки зрения уменьшения сопротивления и более оптимальной тенденции изменения величин коэффициента сопротивления в зависимости от удлинения тела.

Достаточно очевидным является, то что увеличение веса тела приводит к увеличению вязкой составляющей коэффициента сопротивления а увеличение скорости к уменьшению смоченной площади поверхности к уменьшению этой величины. Уменьшение числа кавитации ведет к уменьшению кавитационной части сопротивления, а увеличение зазора между поверхностью тела и каверны к существенному увеличению коэффициента кавитационной компоненты сопротивления.

Давление в каверне с искусственным поддувом

Применение изотермы и адиабаты при расчетах зависимости давления в каверне P_c от объема каверны V_c приводят к близким результатам. Наиболее приемлемо здесь применение политропной зависимости в виде (59, а). С учетом закона сохранения массы газа в каверне M_c в виде (59, б) [24], зависимость давления газа от объема каверны определяется уравнением (59, а)

$$a) M_c = c_0 V P_c^n, \quad b) c_0 = \frac{M_{c0}}{V_0 P_{c0}^n}, \quad c) \frac{d}{dt} M_c = M'_{in} - M'_{out} \quad (59)$$

Здесь $1/n$ — показатель политропы, $\mu - 1$ соответствует изотермическому процессу, $n = 1/\kappa$, κ — показатель адиабаты, соответствует адиабатическому процессу, реальный процесс находится между этими случаями $1/\kappa \leq n \leq 1$. Константа C_0 определяется по начальным параметрам газа в каверне применяя уравнение идеального газа M_{in} , M_{out} скорости массового поддува и уноса газа из каверны.

Система уравнений для определения давления газа в каверне P_c в общем случае определяется в виде

$$a) c_0 n \frac{dV}{dt} P_c^n + c_0 n V P_c^{(n-1)} \frac{dP_c}{dt} - (M'_{in} - M'_{out}) = 0, \quad (60)$$

$$b) R^2(x, t) \Big|_{x=X_e(t)} = 0, \quad X_n(t) - X_e(t) = L_c(t),$$

$$c) \frac{dV}{dt} = \pi \int_{X_e(t)}^{X_n(t)} \frac{\partial R^2(x, t)}{\partial t} dx, \quad d) \frac{dV}{dt} = \pi \int_{X_e(t)}^{X_n(t)} \frac{\partial R^2(x, t)}{\partial t} dx.$$

Здесь закон движения конца каверны $x = x_c(t)$ (60, б) и зависимости для объема каверны (59, с, 60, б) определяются на основе решений (18, а, 18, б).

Эта система становится замкнутой при задании определенного закона уноса газа из каверны. Ряд интересных результатов в этой области представлен во многих работах. Из двух основных типов уноса газа по вихревым шнурам и областью хаотического потока газа в хвосте каверны именно второй механизм уноса позволяет удерживать в каверне нужное давление. Здесь наиболее важным является определение ограничений, в рамках которых обеспечивается реализация такого типа уноса. Эти условия аналогичны условиям, определенным в работе [2] для каверны без воздействия силы веса тела на каверну, однако с учетом результатов исследований [12], уже существенно зависят от веса тела в каверне. Основным механизмом уноса газа, позволяющий удерживать нужное давление в каверне, может иметь место в достаточно широкой области, с одной стороны при условии что, сила глссирования, в частности вес тела, не превышает величины веса воды в объеме, равном объему каверны и, с другой стороны, вес тела должен быть достаточно существенным чтобы предотвратить появление вихревых шнуров гравитационной природы.

В рамках таких ограничений интенсивность объемного уноса газа определяется зависимостью

$$Q_v \approx c_q d^2 U_\infty, \quad \bar{Q}_v = Q_v / d^2 U_\infty, \quad c_q \sim 0.25 \div 0.30 \quad (61)$$

Результаты маломасштабных экспериментальных исследований из одного, из наиболее надежных источников [6, 7], приведены на рисунке 23.

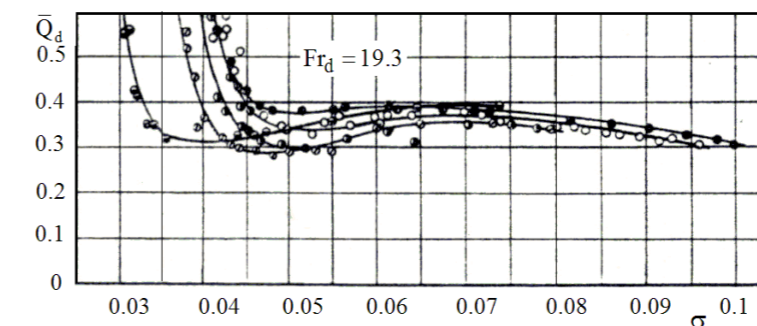


Рисунок 23 — Данные экспериментов по объемному уносу газа $\bar{Q}_d = Q_v / U_\infty d^2$ в ротационном бассейне за диском [7]: $d = 2.56 \text{ mm}, U_\infty = 30 \text{ m/s}, Fr_d = 19.3$

• • • • — $H = 24d = 61.5 \text{ mm}$,
 o o o o — $H = 20d = 51.2 \text{ mm}$,
 ■ ■ ■ ■ — $H = 5d = 12.8 \text{ mm}$.

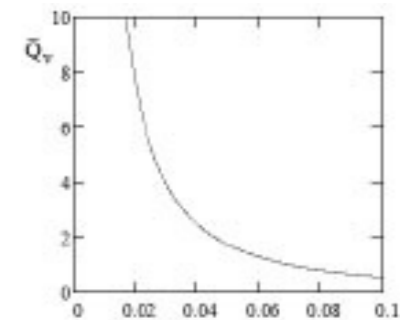


Рисунок 24 — Оценка зависимости для коэффициентов уноса газа в рамках масштабов натуральных экспериментов, зависимость (53),

С другой стороны, проведение натуральных экспериментов при значительно больших величинах скоростей движения и линейных масштабов обнаружило значительное увеличение интенсивности процессов уноса газа [1] и [41]. Обнаруженное здесь значительное увеличение толщины турбулентных пограничных слоев, по сравнению в основном с ламинарными слоями в маломасштабных экспериментов позволило сформулировать известную гипотезу о механизме уноса газа пограничным слоем. Это позволило разработать теорию и соответствующий метод расчета [41]. При этом результаты расчета уноса газа оказались близкими к данным и натуральных и маломасштабных экспериментов [1]. Интенсивность объемного уноса газа в рамках этого подхода определяется зависимостью (62), которая для возможности сравнения с данными маломасштабных экспериментов, может быть представлена в виде

$$\bar{Q}_v = c_{q(Fr_L)} \frac{c_d}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{\sigma} \ln \frac{1}{\sigma}}, \quad \bar{Q}_v = \frac{Q_v}{d^2 U_\infty} \quad (62)$$

При этом величина $c_{q(Fr_L)}$ рассчитывается применительно к реальному диапазону чисел Re_L, Fr_L и, в масштабах данных этого натурального эксперимента [1], оценена величиной $c_{q(Fr_L)} \approx 0.013$. Результаты расчета по зависимости (58) при $c_{q(Fr_L)} \approx 0.013$ показаны на рисунке 24.

Величина $\bar{n}_q = c_q(Re)$ является медленно изменяющейся величиной в зависимости от числа Рейнольдса по длине каверны. С учетом значительно больших величин коэффициентов уноса газа, по сравнению с данными мало масштабных экспериментов, к постановке и результатам натурального эксперимента имеются некоторые вопросы. В частности, недавние эксперименты и их анализ [8, 14, 16, 17] обнаружили существенное увеличение интенсивности уноса газа при взаимодействии задней части каверны с реактивной струей газа, что имело место

при постановке данного натурального эксперимента, который осуществлялся в рамках вертикального погружения тела с возможностью в некоторых случаях близости к процессу открытия задней части каверны, что также могло увеличить величины уноса газа по сравнению с случаем горизонтального движения. Тем не менее гипотеза, обладающая такой физической очевидностью и, соответственно, расчеты на ее основе с возможностью их некоторого усовершенствования можно считать достаточно близкими к реальности и применения их, по крайней мере, для оценочных расчетов.

В настоящее время имеются также попытки разработки моделей численного расчета процессов уноса газа на основе многофазной жидкости, которые также можно считать достаточно перспективными.

Устойчивость и пульсации каверны при движении с развитой кавитацией

Основой теории движения суперкавитирующих тел прежде всего является проблема устойчивости движения и обтекания тела в каверне при прямолинейном движении с постоянной скоростью. Она включает три основных составляющих: устойчивость каверны с искусственным поддувом с учетом возможности потери ее устойчивости с появлением пульсаций каверны, статическая и динамическая устойчивости при движении и вращении тела, взаимодействующего с поверхностью каверны, включая проблему взаимодействия этих трех составляющих процесса устойчивости при движении с развитой кавитацией в целом. Ряд наиболее интересных результатов в этой области представлен работами [18, 23–25, 28].

Одним из выдающихся результатов в этой области можно считать разработку известной теории устойчивости и пульсаций осесимметричных каверн [24, 25, 28] на основе системы уравнений для нестационарной каверны (17)–(19, а).

Исходным в этой теории является исследование малых возмущений объема стационарной каверны с искусственным поддувом при прямолинейном движении. В то же время в реальности имеет место только близкое, к прямолинейному движение в форме колебаний при малых отклонениях траектории движения кавитатора $w = w(x)$ при соответствующем искривлении оси каверны от прямой, в частности, в вертикальной плоскости (рисунок 25).



Рисунок 25 — Форма каверны при малых отклонениях траектории от прямой линии

В этом случае могут происходить небольшие изменения глубин движения и, соответственно гидростатического давления и давления в каверне. С учетом того, что учет этого процесса может оказаться существенным, как для устойчивости и пульсации каверны, так и для устойчивости движения тела в целом, ниже делается попытка разработки соответствующего дополнения этой теории.

Аналогично исследованиям [24, 25] исходим из зависимости давления в каверне от объема в виде политропы (59, а) и ее линеаризации для малых изменений объема (59, б):

$$a) VP_c^n = \text{const}, \quad b) \delta V = -\frac{\kappa_v n V_0}{P_0} \delta P, \quad (63)$$

где $\kappa_v < 1$ учитывает наличие тела в каверне.

Аналогично [24] решение задачи в общем случае сводится к получению и исследованию дифференциального уравнения для δP с запаздывающим аргументом. При этом одной из основных сложностей является получения линейных зависимостей для возмущения объема каверны от возмущения давления в ней. Решение этой задачи находится, исходя уравнения для формы нестационарной каверны в системе координат, связанной с неподвижной жидкостью (17)–(18) в виде (64, а) и ее решения в виде (64, е), соответствующего универсальному интегралу (19, а)

$$a) \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = a \Delta P_0 + a \delta P_c, \quad \delta P_c = P_k(t) - P_v(x),$$

$$b) a = \frac{2\pi}{\rho \mu_c}, \quad c) \Delta P_0 = (P_\infty - P_0), \quad d) P_v(x) = \rho g \Delta_y(x), \quad (64)$$

$$e) S = S_0 + S'_0(x) \left(t - \frac{x}{U_0} \right) - a \Delta P_0 \left(t - \frac{x}{U_0} \right)^2 - a P_v \left(t - \frac{x}{U_0} \right)^2 + a \int_{x/U_0}^t \left[\int_{x/U_0}^t P_k(s) ds \right] dt, \quad S'_0(x) = \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{x/U_0}.$$

Исходя из уравнений для определения объема (65)

$$a) V(t) = \int_{U_0 t - L(t)}^{U_0 t} S(x, t) dx \quad b) S(x, t) \Big|_{x=U_0 t - L(t)} = 0 \quad (65)$$

определение линейных зависимостей для объема δV проводится аналогично получению такого типа зависимостей в работе [24] исходя из уравнения (66) с учетом уравнений (64)–(65)

$$\frac{d^2 V(t)}{dt^2} = \int_{U_0 t - L(t)}^{U_0 t} \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial t^2} dx + U_0 \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=U_0 t} - \left(U_0 - \frac{dL(t)}{dt} \right) \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=U_0 t - L(t)} \quad (66)$$

Линейная зависимость для объема каверны при малых возмущениях от пульсаций давления в каверне и возмущениях траектории в вертикальной плоскости с учетом весомости жидкости определяется зависимостью (67)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{2\pi}{\rho \mu} \left\{ U_0 \tau_0 \left(P_c(t - \tau_0) + P_c(t) - \frac{2}{\tau_0} \int_{t-\tau_0}^t P_c(t) dt \right) + \rho g \left(\tau_0^2 U_0 \frac{dh(U_0(t - \tau_0))}{dt} - \int_{U_0(t-\tau_0)}^{U_0 t} w(x) dx + U_0 \tau_0 w(U_0(t - \tau_0)) \right) \right\} \quad (67)$$

Одной из основ исследований устойчивости и пульсаций каверны без учета воздействия движения является применение специфического для этих целей масштаба времени T_* [24] — зависимость (68):

$$a) \frac{1}{T_*} = \sqrt{\frac{1}{\kappa_v n} \left(\frac{2\pi}{\mu} \right) \left(\frac{P_0 L_0}{\rho V_0} \right)}, \quad b) \tau_0 = \frac{L_0}{U_0}, \quad \bar{\tau}_0 = \sqrt{\frac{1}{\kappa_v n} \left(\frac{2\pi}{\mu} \right) \left(\frac{P_0 I_0^3}{\rho V_0 U_0^2} \right)} \quad (68)$$

где величины L_0, V_0, P_0 соответствуют стационарным значениям длины, объема и давления в каверне, U_0 — скорость движения.

С учетом обезразмеривания по этому масштабу T_* в системе независимых масштабов ρ, U_0, T аналогично работам [24, 25] определяется дифференциальное уравнение (65) с запаздывающим аргументом, содержащее интегральную часть, но уже с учетом воздействия движения.

$$P_c''(t) + P_c(t - \tau_0) + P_c(t) - \frac{2}{\tau_0} \int_{t-\tau_0}^t P_c(s) ds + 2 \frac{Tg}{U_0} \left(\tau_0 w'(t - \tau_0) + w(t - \tau_0) - \frac{1}{\tau_0} \int_{t-\tau_0}^t w(s) ds \right) = 0. \quad (69)$$

Здесь и далее водятся обозначения $w' = \frac{dw}{dt}$. Последовательным дифференцированием уравнения задача в итоге сводится к решению и исследованию дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом в виде (66):

$$P_c'''(t) + P_c'(t) + P_c'(t - \tau_0) - \frac{2}{\tau_0} P_c(t) + \frac{2}{\tau_0} P_c(t - \tau_0) + 2 \frac{gT}{U_0} \left(\tau_0 w''(t - \tau_0) + w'(t - \tau_0) - \frac{1}{\tau_0} w(t) + \frac{1}{\tau_0} w(t - \tau_0) \right) = 0. \quad (70)$$

При этом левая часть обоих уравнений без учета воздействия движения на процессы устойчивости каверны тождественно совпадает с уравнениями исследований (24, 25, 28).

Исследования [25] на основе первой части уравнения (66) определили условие асимптотической устойчивости в виде $0 \leq \bar{\tau}_0 < \pi\sqrt{2}$. Это условие приводит к физически более понятным условиям устойчивости на основе изотермы и адиабаты

$$a) P_0 < 0.622 P_\infty, \quad b) P_c' = \frac{dP_c}{dt}. \quad (71)$$

Процесс потери устойчивости имеет очень интересную физику основой которой является следующее. При давлении в каверне менее примерно половины величины гидростатического давления возмущения формы каверны и ее объема при случайных возмущениях быстро затухают. При значениях давлений в каверне больше половины гидростатического каверна начинает забирать энергию из окружающего потока которая трансформируется в энергию колебаний и изменения формы и размеров каверны. Характер этих изменений в процессе исследований движения в открытом канале иллюстрирует рисунок (26) [36].

Можно ожидать, что дальнейшие исследования в этой области, но уже с учетом воздействия колебательного характера траектории внесут в условия устойчивости каверны существенные коррективы.

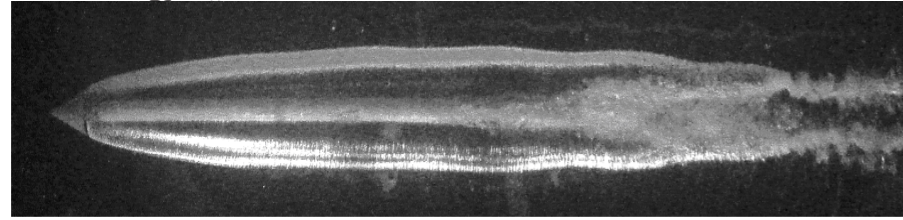


Рисунок 26 — Пульсирующая каверна при движении в открытом канале с постоянной скоростью

Устойчивость движения – уравнения динамики

Основой можно считать систему уравнений плоского движения глассирующего тела, движущегося с постоянной скоростью при малом нестационарном возмущении основных параметров течения. Существенные сложности здесь связаны с моделированием процесса нестационарного глассирования. С точки зрения понимания процесса в целом и оценки возможных сложностей, оптимальным можно считать рассмотрение наиболее простого случая.

Исходным для расчета глассирования принимается уравнение (48) при его рассмотрении в системе координат, связанной с неподвижной жидкостью. В первом приближении можно ограничиться только первым членом уравнения (48), наиболее существенным в большинстве случаев.

$$f_p(x, t) = \rho \pi R_b^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \alpha(t)(x_n(t) - x)}{\partial t} \left[1 - \left(\frac{\Delta(x, t)}{\alpha(t)(x_n(t) - x)} \right)^2 \right] \right] \right\}. \quad (72)$$

Здесь $\alpha(t)$ и $\Delta(x, t)$ величины угла атаки и зазора между телом и каверной. С учетом существенных усложнений в первом приближении можно также ограничиться максимально простым случаем глассирования цилиндра с радиусом R_b при зазоре $\Delta(x, t) \approx \Delta(t)$. Нужно учесть, что постоянной величины зазора Δ_0 при стационарном обтекании может соответствовать возмущение зазора зависящее также и от x , т. е. при $\Delta = \Delta_0 + \Delta(t, x)$, однако можно надеяться, что эта зависимость не всегда так существенна.

С учетом движения тела с постоянной скоростью по закону $x_n(t) = Ut$ уравнение (72) преобразуется к виду

$$f_p(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\left((Ut - x) \frac{d\alpha(t)}{dt} \right) + U\alpha(t) \right] \left[1 - \left(\frac{\Delta(t)}{\alpha(t)(Ut - x)} \right)^2 \right] \right\}. \quad (73)$$

Величины суммарных угла и зазора между телом и каверной представляются в виде суммы стационарных и, малых по величине, нестационарных составляющих при $\alpha \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha(t), \quad \Delta = \Delta_0 + \Delta(t).$$

Исходя из уравнения (73) определяется линейное двухчленное разложение выражения в этом уравнении в скобках с последующим его дифференцированием по t и его трансформация к системе координат, связанной с началом в плоскости кавитатора в виде зависимостей (74), (75):

$$a) f_p(x, t) = f_{p0}(x, t) + f_{p\alpha}(x, t), \quad b) f_{p0}(x, t) = \rho \pi R_b^2 U^2 \left(\frac{2\Delta_0^2}{\alpha_0 x^3} \right). \quad (74)$$

$$f_{p\alpha}(x, t) = \rho \pi R_b^2 U^2 \left\{ \left[\left(\frac{2\Delta_0^2}{\alpha_0 x^3} \right) \alpha(t) + \left(\frac{2}{U} + \frac{2\Delta_0^2}{\alpha_0^2 x^2 U} \right) \frac{d\alpha(t)}{dt} + \left(\frac{x}{U^2} - \frac{\Delta_0^2}{\alpha_0^2 x U^2} \right) \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \right] + \left[\left(\frac{4\Delta_0}{\alpha_0^2 x^3} \right) \Delta(t) - \left(\frac{2\Delta_0}{\alpha_0^2 x^2 U} \right) \frac{d\Delta(t)}{dt} \right] \right\}. \quad (75)$$

Сила глассирования является основной силой, уравновешивающей вес тела при стационарном обтекании. При этом подъемные силы на кавитаторе и управляющих крыльевых элементах малосущественны с точки зрения формирования подъемной силы в целом, но могут быть очень значительны с точки зрения формирования моментов. С точки зрения выбора угла атаки, соответствующего исходному движению с постоянной скоростью при стационарном обтекании, можно принять случай нейтрального положения углов атаки кавитатора и стабилизатора при нулевых значениях подъемной силы. Величина стационарной силы глассирования F_{p0} исходя из (7, b) определяется интегралом (72), где $x_{p0} = \Delta_0 / \alpha_0$ — координата начального сечения глассирующей поверхности

$$F_{p0} = \rho \pi R_b^2 U^2 \frac{2\Delta_0^2}{\alpha_0} \int_{\Delta_0/\alpha_0}^{L_b} \frac{dx}{x^3} = \rho \pi R_b^2 U^2 \left(\alpha_0 - \frac{\Delta_0^2}{L_b \alpha_0} \right). \quad (76)$$

Величина угла атаки α_0 в этом случае определяется квадратным уравнением (73, a)

$$a) \rho \pi R_b^2 U^2 \left(\alpha_0 - \frac{\Delta_0^2}{L_b \alpha_0} \right) = G, \quad b) L_c = \frac{2L_b \Delta_0}{\Delta_0 + L_b \alpha_0}. \quad (77)$$

Из уравнения моментов определяется также положение центра давления глассирующих сил L_c , соответствующее движению с постоянной скоростью при стационарно обтекании – зависимость (77, b). Ситуация в реальности несколько отлична. Для обеспечения статической устойчивости необходимо выбирать не положение центра тяжести, совпадающее с центром глассирующих сил, а наоборот обеспечивать нужное положения центра давления с помощью гидродинамических сил на кавитаторе и стабилизаторах и в этом случае моменты сил на кавитаторе и стабилизаторе также должны быть учтены.

При формировании системы маловозмущенных уравнений динамики предполагается, что сила веса при движении с постоянной скоростью в условиях стационарного обтекания компенсируется стационарной компонентой силы глассирования при обеспечении условий статической устойчивости, включая моменты на кавитаторе и стабилизаторе. Величина нестационарных компонент сил глассирования и момента относительно центра давления $x = L_c$, при стационарном обтекании, определяются на основе стационарной и нестационарной составляющей сил f_p — зависимости (78) в виде интегралов:

$$a) x_p = \frac{\Delta_0 + \Delta}{\alpha_0 + \alpha}, \quad x_{p0} = \frac{\Delta_0}{\alpha_0},$$

$$b) F_{p\alpha} = \left[\int_{x_p}^{L_b} f_{p0}(x) dx - \int_{x_{p0}}^{L_b} f_{p0}(x) dx \right] + \int_{x_{p0}}^{L_b} f_{p\alpha}(x) dx, \quad (78)$$

$$c) m_{p\alpha} = L_c \left[\left(\int_{x_p}^{L_b} \left(\frac{x - L_c}{L_c} \right) f_{p0}(x) dx - \int_{x_{p0}}^{L_b} \left(\frac{x - L_c}{L_c} \right) f_{p0}(x) dx \right) + \int_{x_{p0}}^{L_b} \left(\frac{x - L_c}{L_c} \right) f_{p\alpha}(x) dx \right].$$

При этом дополнительно определяются линейные разложения первых интегралов (22, a) и (22, b) на основе стационарной составляющей глассирования f_{p0} при $\alpha \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$. Процедура определения зависимостей для глассирующей силы и момента сил глассирования включает аналитическое интегрирование существенного количества элементарных интегралов, приводя к простым но достаточно объемным по величине выражениям. Однако основным преимуществом этого подхода является достаточно простая структура окончательных выражений для силы глассирования $F_{p\alpha}$, момента сил глассирования в виде выражений:

$$F_{p\alpha} = \pi \rho R_b^2 \frac{\rho U^2}{2} \left[\left(a_{\alpha F_p} \alpha + b_{\alpha F_p} \frac{d\alpha}{dt} + c_{\alpha F_p} \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right) + \left(a_{\Delta F_p} \Delta + b_{\Delta F_p} \frac{d\Delta}{dt} \right) \right],$$

$$m_p = \pi \rho R_b^2 \frac{\rho U^2}{2} L_c \left[\left(a_{\alpha m_p} \alpha + b_{\alpha m_p} \frac{d\alpha}{dt} + c_{\alpha m_p} \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right) + \left(a_{\Delta m_p} \Delta + b_{\Delta m_p} \frac{d\Delta}{dt} \right) \right]. \quad (79)$$

С учетом зависимостей для силы глассирования и момента сил глассирования (75) относительно центра давления L_c соответствующего стационарному обтеканию при учете всех сил и моментов определение основных элементов возмущенного движения сводится к решению двух дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$M \left(\frac{d^2 y}{dt^2} + L_c \frac{d\omega(t + \tau_c)}{dt} \right) + F_p + \frac{\rho U^2}{2} (\pi R_n^2 c_\alpha \alpha_n + S_w c_w \alpha_w) = 0, \quad (80)$$

$$I \left(\frac{d\omega}{dt} + \frac{L_c}{U} \frac{d^2 \omega(t + \tau_c)}{dt^2} \right) + m_p + \frac{\rho U^2}{2} (\pi R_n^2 L_c c_\alpha \alpha_n - S_w L_w c_w \alpha_w) = 0.$$

где M, I — масса и момент инерции тела, $y - y(t)$ соответствует движению центра масс тела, $\omega = \omega(t)$ — угловая скорость движения тела, t — время, $\tau_c = L_c / U$. В системе уравнений (80) учтено, что движение центра масс тела соответствует не свободному движению и вращению тела под действием только сил и моментов от кавитатора и стабилизатора а является ограниченным траекторией движения кавитатора $\omega = \omega(t)$.

Величины R_n, c_α, α_n определяют параметры кавитатора с точки зрения образования подъемной силы и аналогично стабилизатора S_w, c_w, α_w , расположенного в задней части тела на расстоянии L_w от центра стационарной составляющей давления $x = L_c$. Система уравнений (80) может быть трансформирована к более удобному виду

$$\begin{aligned} M \left(U \frac{d\theta}{dt} + L_c \frac{d^2 [\alpha(t + \tau_c) + \theta(t + \tau_c)]}{dt^2} \right) + F_p(\alpha, \Delta) + \frac{\rho U^2}{2} (\pi R_n^2 c_\alpha \alpha_n + S_w c_w \alpha_w) = 0, \\ I \left(\frac{d^2 (\alpha + \theta)}{dt^2} + \frac{L_c}{U} \frac{d^3 [\alpha(t + \tau_c) + \theta(t + \tau_c)]}{dt^3} \right) + m_p(\alpha, \Delta) + \frac{\rho U^2}{2} (\pi R_n^2 L_c c_\alpha \alpha_n - S_w L_w c_w \alpha_w) = 0. \end{aligned} \quad (81)$$

Здесь $\omega = \alpha + \theta$. Любые из зависимостей для траектории центра масс тела $y = y(t)$ и траектории движения кавитатора может быть $w = w(t): W = (\alpha + \theta)L_c$, и могут быть представлены в виде функций от $x: w(x) = y(x)$, $\theta = \frac{dy}{dx}$ в центре масс. Система уравнений в виде (81) совместно с зависимостями для определения сил и моментов глссирования (79) и уравнением (70) для определения изменения давления в каверне $P_c = P_c(t)$ и, соответственно, изменения $\Delta = \Delta(t)$ входящего в зависимости (79) является замкнутой дающей возможность определить все элементы движения и деформации каверны. Эти 3 уравнения являются взаимозависимыми, так как траектория движения кавитатора $w = w(t)$, определяемая системой уравнений (81) является в то же время необходимой для решения уравнения (70) для возмущений формы каверны.

Углы атаки при движении кавитирующих настолько малы, что рассмотрение задачи динамики в подвижной системе координат, связанной с применением достаточно сложного подхода через углы Эйлера вряд ли целесообразно при данном подходе и вообще вызывает сомнение при любых попытках решения аналогичных задач. Предполагается также возможность большего усовершенствования и упрощения расчетов нестационарного глссирования с возможностью рассмотрения задачи в общем случае при $\Delta = \Delta(x, t)$.

Разработку уравнений (70)–(81) можно считать только первым шагом с точки зрения дальнейших детальных исследований включая аналитического анализа устойчивости совместно с детальными численными расчетами системы уравнений движения кавитирующих тел с проверкой роли всех отдельных составляющих проблемы различной природы. Но даже полный комплекс этих исследований не дает полного решения проблемы. Дело в том, что решения на основе уравнения (70) приводят к бесконечно нарастающим по величине возмущениям. Те анализ на основе таких уравнений может указать на возможность неустойчивости. Но в реальности такие возмущения не могут быть бесконечно большими, как показывают в том числе эксперименты возмущения каверны имеют ограниченный характер. Если исходя из уравнений (70) или в общем случае исходя из уравнений (17) на основе более точного подхода расчеты указывают на неустойчивость то эта неустойчивость может иметь достаточно небольшие масштабы возмущений возможно даже благоприятные для устойчивого движения в целом. Проблема в целом может быть решена только на основе нелинейных решений в рамках вязкой жидкости с учетом возможности расчета течения, теряющего устойчивость в задней части каверны которое может дать возможность определения реальных масштабов неустойчивой компоненты решения.

Выводы

Проблема расчета процессов движения и обтекания суперкавитирующих тел приводит в общем случае к необходимости решения очень сложной системы уравнений для ряда элементов ее составляющих. Одними из основных проблем решения этой сложной задачи является не так само решение задачи, как проблема верификации адекватности этого решения, так и возможностей упрощения этой системы с уменьшением ее сложности и, соответственно минимизации возможных ошибок и при программировании и при решении. Можно надеяться, что наличие ряда простых физически понятных решений и уравнений позволит в дальнейшем проанализировать, на этой основе, все отдельных составляющие проблемы движения и выяснить основные причины возможных осложнений при разработке более серьезных программ расчета в этой области.

Литература

1. Braselmann, H., Buerger, K.-H. & Koeberle J. (2002) On the gas loss from ventilated supercavities-experimental investigation // High Speed Hydrodynamics scientific school Proc., post meeting volume 2002 Chebocary Russia. pp. 9—13.
2. Campbell, I. J. Hilborne D.V. Entrenment behind artificially initiated cavities// Second symposium Naval Hydrodynamics, Washington, 1958.
3. Cox, R.N. & Clayden, W. A. Air entrainment at the rear of steady cavity, Symposium on Cavitation in Hydrodynamics, London (1965).
4. Dzielski, Y. J. Longitudinal stability of a supercavitating vehicle, Journal of Ocean Engeeniring, Vol. 36, No. 4, 2011, pp. 562—570.
5. Dzielski, Y. & Kurdila, A. (2003). A benchmark control problem for supercavitating vehicles and an initial investigation of solutions. Journal of Vibration and Control 9(9): 791—804.
6. Epshtein, L. A. (1970). Methods of dimensions and similarity in the problems of vessels hydromechanics [In Russian], Sudostroyenie, Leningrad.
7. Эпштейн, Л. А., Блюмин, В. И. Исследование развитых кавитационных течений во вращающемся канале// Труды ЦАГИ, вып. 1965, стр. 3—31.
8. Fronzo, M., Hansford, S., Berger, Z. & Kinzel, M. (2018). Regime Classification methods for a gas jet in a liquid co-flow. Proceedings of the 10th International Symposium on Cavitation, Baltimore, USA.
9. Garabedian, P. R. (1961). Calculation of axially symmetric cavities and jets.—J. Fluid Mech., 11. P.2. 187—208.
10. Guzevsky, L. G. Numerical analysis of cavitation flows. (1979), Novosibirsk. (Preprint No. 40—79 of CO AS USSR, Heat-Physics Institute —1979.) — 36 p.
11. Kam, A., Huang, R., Shao, S., Arndt, R. E. A. & Hong, J. Probing into Physics of Ventilation Demand for Supercavitating Underwater Vehicles Proceedings of 31st Symposium on Naval Hydrodynamics Monterey, California, 11—16, September, 2016/
12. Kapankin, Ye. N., Gusev, A. V. Experimental research of reciprocal influence gravity and cavitator lift on nature of flow at the back part of cavity and gas loss from it. // J. Proceedings of TsAGI — 1984, No. 2244, pp. 19—28. (Russ.)
13. Kiceniuk, T., Creengard, R. Measurements of Lift Coefficients for a Family of Cones planning on Water. Hydrodynamics lab Caltech, Pasadena CA, USA. Report NE—12.3, 1952, pp.15—23.
14. Kinzel, M., Money, M., Krane, M. & Kirschner, I. (2015). Jet-Supercavity Interaction: Insights from CFD. Journal of Physics: Conference Series 656: 012133.
15. Kirschner, I.V., Kring, D.C., Stokes, A.W et al. (2002). Control strategies for supercavitating vehicles. Journal of Vibration Control 18(2): 219—242.
16. Kirschner, I. N., Money, M. Y., Krane, M. H. and Kinzel, M. P. (2015). Jet-Supercavity Interaction: Insights from Physics Analysis 9-th International Symposium on Cavitation (CAV2015) IOP Publishing Journal of Physics: Conference Series 656.
17. Money, M. Y, Krane, M. H, Kirschner, I. N. & Kinzel, M. P. (2015). Jet-Supercavity Interaction: Insights from Experiments. Journal of Physics: Conference Series 656: 012162.
18. Kirschner, I. N., Rosenthal, B.Y. & Uhlman, Y. S. (2003). Simplified Dynamical Systems Analysis of Supercavitating High-Speed Bodies. // Proc. of Fifth Intern. Symp.on Cavitation — CAV 2003, Osaka, Japan.
19. Levinson, N. (1946) On the asymptotic shape of the cavity behind an axially nose moving through an ideal fluid // Annals of Mathematics. vol.47. N4. —704—731.
20. Logvinovich, G. , Serebryakov, V. (1975). On methods of calculation of of slender axisymmetric cavities shape. Hydromechanics, 32, Kyiv, 47—54. (Russ.)
21. Логвинович, Г. В. (1969) Гидродинамика течений со свободными границами. — Киев: Наук. думка, 1969. 215 с.
22. Логвинович, Г. В. (1980). Некоторые вопросы глссирования // Труды ЦАГИ Вып. 2052 Сборн. Статей Некоторые вопросы глссирования и кавитации, ЦАГИ, Москва, 1980. — С. 3—12.
23. Michel, J. M. Ventilated cavities: a contribution to the study of pulsation mechanism. // Proc. of IUTAM Symp. In Leningrad: Unsteady Flows of water with high speeds. —1971, Nauka —1973, pp. 343—360.
24. Парышев, Э. В. (1978) Система нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающих динамику нестационарных осесимметричных каверн // Тр. ЦАГИ им. Н.Е.Жуковского. —1978. — Вып. 1907. — С. 3—16.
25. Paryshev, E.V. Theoretical investigations of stability and pulsations of axisymmetric cavities. // J. Proceedings of TsAGI —1978, No. 1907, pp. 17—40. [In Russian]

26. Paryshev, E. V. The plane problem of immersion of an expanding cylinder through a cylindrical free surface of variable radius, Proceedings of Intern. Summer Scientific School "High-Speed Hydrodynamics"—HSH2002, Cheboksary, 2002, pp. 277—285.
27. Paryshev, E. V. "Some problems of planing of a cylinder in a cavity," Proceedings of Intern. Summer Scientific School "High Speed Hydrodynamics"—, HSH 2013, Cheboksary, 2013, pp. 136—142. (Russ).
28. Paryshev, E.V. Approximate mathematical models in high-speed hydrodynamics// J of Engineering Mathematics 2006, 55, pp. 41—64.
29. Payne 1990 P.R. Planning and Impacting Plate Forces at large Trim Angles. // Ocean Engng., 1990, vol. 17, № 3, pp. 201—233.
30. Savchenko, Yu. N. Semenenko V.N. and Putilin S.I (1999) "Nonstationary processes during supercavitating motion of bodies," J. Hydromechanics, v.1 (73), No.1, pp. 79—97. [In Russian].
31. Serebryakov, V. V. Ring model for calculation of axisymmetric flows with developed cavitation. // J. Hydromechanics — 1974, No. 27, pp. 25—29. (Russ).
32. Serebryakov, V. Asymptotic solution of the problem on slender axisymmetric cavity. DAN of Ukraine SSR, ser. A, 12, 1973, 1119 — 1122. (Russ).
33. Serebryakov V. V. Physical-mathematical bases of the principle of independence of cavity expansion, Proceedings of Seventh International Symposium on Cavitation: CAV2009, Paper No.169, Michigan University, Ann Arbor, Michigan, USA, 2009.
34. Serebryakov, V. V. 2002 The models of the supercavitation prediction for high speed motion in water // Proceedings of Int.Sci. School High Speed Hydrodynamics: HSH2002 Cheboksary, 2002, Russia, pp.71—92 (invited lecture).
35. Serebryakov, V.V. (2002) Supercavitation for High Speed Motion in Water: Prediction and Drag Reduction Problems // Proceedings of ASME FEDSM 2, Montreal, 2002, 8 p.
36. Vladimir V. Serebryakov, Vladimir V. Moroz, Viktor V. Kochin, and John E. Dzielski Experimental Study on Planing Motion of a Cylinder at Angle of Attack in the Cavity Formed behind an Axisymmetric Cavitator Journal of Ship Research, 2019, pp. 1—15 <http://dx.doi.org/10.5957/JOSR.09180077>
37. Schlichting, G., 1969, Theory of the boundary layer [], Nauka, Moscow. 742 p.
38. Skidmore, G. M., Brungart, T. A., Lindau, Y.W., Money M. Y., The Pulsation of Ventilated Supercavities in Rigid Wall Water Tunnel Facilities, J. of Hydrodynamics, Ser. B, 2013.
39. Silberman, E., Song, C.S. Instability of ventilated cavities // Y. Ship Research — 1961, v. 5, No.1, pp.13—33.
40. Song, Cs. Pulsation of ventilated cavities // J. Ship Reserch — 1962. — V. 5, No.4, pp. 8—20.
41. Spurk, Y. H. A theory for the Gas Loss from Ventilated Cavities // Proceedings of Int. Sci. School High Speed Hydrodynamics: HSH 2002, Cheboksary, pp.191—196.
42. Terentiev, A., Kirschner, I., Uhlman, J. (2011) The Hydrodynamics of Cavitating Flows Backbone Publishing, USA, 598 p.
43. Vanek, B., Bokor, Y., Balas, GJ, ARNDT R E A (2007) Longitudinal motion control of a high-speed supercavitation vehicle. Journal of Vibration and Control 13(2): 159—184.
44. Varyukhin, A. N. Deformation boundaries of an axisymmetric cavity by gas jet, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Vol. 49, No. 5, pp. 770—775, 2008.
45. Wagner, H. Uber Stoss- und Gleitvorgange an der Oberflache von Flussigkeiten. — Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. S. , 1932, 193—213.
46. Waid, R. L. Forces on composite bodies in full cavity flow, Report No. E-73.8, 1957, Hydrodynamics Laboratory, California Institute of Technology.
47. Wang, Zou, Benlong Wang. Longitudinal maneuvering motions of the supercavitating vehicle European Journal of Mechanics / B Fluids 81 (2020), pp 105—113.
48. Zhuravlev, Yu. (1973) Methods of perturbations theory in 3-D stream flows. CAGI proceeding, N.1532, 23 p (Russ).
49. Zou, W., Xue, L. P, Wang, B.L et al. (2018) Gas flows and losses inside high-speed ventilated supercavitating flows. Ocean Engineering 164: 65—73.

Надійшла 19.12.2019 року

УДК 532-528

Лінійні моделі гідродинаміки при русі тіл з розвиненою кавітацією

В. В. Сєребряков

Мета. До числа найбільш складних завдань математичної фізики відноситься дослідження кавітаційних течій. Використання сучасних комп'ютерних технологій забезпечило значний прогрес в цій області. Однак розробка методів розрахунку на основі складних комп'ютерних програм не завжди виявлялася успішною і виникає нагальна потреба в верифікації чисельного моделювання нових завдань.

Методи дослідження. Завданням цієї роботи є спроба розвитку рівня розуміння основних складових проблеми руху і обтікання тіл в каверні на основі найбільш простих, фізично очевидних моделей і досить надійних оцінок.

Результати дослідження. Розглянуто елементарні залежності і рівняння стосовно до проблем обтікання і руху суперкавітуючих тел, включаючи рівняння і залежності для розрахунку форми стаціонарних і нестационарних каверн, близьких до осесиметричним, викривлення їх осей, опір тіл при русі в каверні, включаючи при цьому в'язку і кавітаційну складову, моделі і рівняння для розрахунку глиссирования по поверхні каверни, а також рівняння для оцінки стійкості обтікання і руху. Основна увага спрямована на детальне вивчення фізики процесів на основі найбільш простих моделей обтікання і руху.

Висновки. Проблема розрахунку процесів руху і обтікання суперкавітуючих тел призводить в загальному випадку до необхідності вирішення дуже складної системи рівнянь для низки елементів її складових. Одними з основних проблем вирішення цього складного завдання є не так саме рішення задачі, як проблема верифікації адекватності цього рішення, так і можливостей спрощення цієї системи зі зменшенням її складності і, відповідно мінімізації можливих помилок і при програмуванні і при вирішенні. Можна сподіватися, що наявність ряду простих фізично зрозумілих рішень і рівнянь дозволить в подальшому проаналізувати, на цій основі, все окремих складові проблеми руху і з'ясувати основні причини можливих ускладнень при розробці більш серйозних програм розрахунку в цій області.

Ключові слова: суперкавітація, каверна, глиссирование, динаміка.

UDC 532-528

Linear hydrodynamic models for moving bodies with developed cavitation

V. V. Serebryakov

Aim. Among the most complex problems of mathematical physics is the study of cavitation flows. The use of modern computer technology has made significant progress in this area. However, the development of calculation methods based on complex computer programs has not always been successful, and there is an urgent need to verify the numerical simulation of new problems.

Research methods. The objective of this work is an attempt to develop a level of understanding of the main components of the problem of movement and flow around bodies in a cavity based on the simplest, physically obvious models and fairly reliable estimates.

The results of research. Elementary dependences and equations are considered with reference to the problems of flow around and the movement of super-cavitating bodies, including equations and dependences for calculating the shapes of stationary and unsteady caverns close to axisymmetric, the curvature of their axes, the resistance of bodies when moving in a cavity, including the viscous and cavitation component, models and equations for calculating planing along the surface of the cavity, as well as equations for evaluating the stability of flow and movement. The main attention is directed to a detailed study of the physics of processes based on the simplest models of flow and motion.

Conclusion. The problem of calculating the processes of motion and flow around supercavitating bodies leads in the general case to the need to solve a very complex system of equations for a number of elements of its components. One of the main problems in solving this complex problem is not so much the solution of the problem as the problem of verifying the adequacy of this solution, and the possibilities of simplifying this system with reducing its complexity and, accordingly, minimizing possible errors during programming and solving. It is hoped that the presence of a number of simple physically understandable solutions and equations will allow us to further analyze, on this basis, all the individual components of the problem of motion and find out the main causes of possible complications when developing more serious calculation programs in this area.

Key words: supercavitation, cavity, gliding, dynamics.