УДК 330.144: 517.997.5

І. М. Ляшенко,
д. ф.-м. н, проф.,
Ю. П. Тадеєв,
к. е. н., доц., докторант,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ПРО ОПТИМАЛЬНЕ СПІВВІДНОШЕННЯ КАПІТАЛОВКЛАДЕНЬ У ВИРОБНИЧИЙ ТА В ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ КАПІТАЛИ

Для замкнутої однопродуктової економіки при інших спрощених гіпотезах ставиться і розв'язується задача оптимального керування на швидкодію досягнення заданого рівня виробничого капіталу. Розглядається можливість фінансування розширення виробничих фондів та фінансування підвищення якості робочої сили. Побудовано магістраль та криву перемикання.

The optimal control problem for closed economy with a unique final good is stated and solved in the article in case of other simplified hypothesis. The possibilities of production's funds expansion and financing in improving the labor quality are considered. Main trajectory and switch curve are constructed.

Ключові слова: виробничий капітал, інтелектуальний капітал, оптимальне керування, оптимальне керування на швидкодію, магістраль, крива перемикання.

ВСТУП

Вплив науково-технічного прогресу на характер економічного зростання можна враховувати в економіко-математичних моделях у різних формах. Найчастіше в такому контексті розглядаються варіанти неавтономних (тобто змінних у часі) виробничих функцій. Зокрема, сюди відносяться економіко-математичні моделі з так званим зовнішнім (екзогенним) науково-технічним прогресом. Рідше розглядаються економіко-математичні моделі, в яких вплив наукових досліджень на виробництво запрограмований в самій системі — це так звані моделі з внутрішнім (ендогенним) врахуванням НТП.

Так, у роботі [1] розглядається односекторна замкнута модель економіки з величиною випуску Y, обсягом основних фондів K, обсягом ресурсів праці L. Споживання в моделі не фігурує. Через позначений загальний обсяг інвестицій в НТП. Вважається, що величина випуску описується співвідношенням:

$$Y = A(Q)F\left(K,L\right) \quad (1),$$

де $F\left(K,L\right) = g(K)h(L)$ — неокласична виробнича функція з відокремленими змінними $A(Q)$ — мультиплікатор прогресу, величина якого відображає ефективність витрат "на науку".

Динаміка моделі визначається відношенням, в якому ділиться національний дохід між капіталовкладеннями на кількісне розширення основних фондів та якісне покращення виробництва (НТП). Таке відношення в [1; 2] описується нормою нагромадження $u(t)$, $0 \le u(t) \le 1$, яка і є параметром керування системою:

$$\dot{K} = uY, \quad \dot{Q} = (1-u)Y, \quad \dot{L} = p(L),$$
$$K(0) = K_0, \quad Q(0) = Q_0, \quad L(0) = L_0, \quad (2),$$

де $\dot{K}, \dot{Q}, \dot{L}$ — означають відповідні похідні за часом.

Ставиться і розв'язується така задача [1; 2]: вибрати керування $u(t)$, $0 \le u(t) \le 1$, в системі (2) так, щоб траєкторія $(K(t),Q(t),L(t))$ досягла заданого рівня $\overline{K}$ обсягу основних фондів за найменший час $T, 0 \le t \le T$. Для цього використовується принцип максимуму Понтрягіна [3] і розв'язок шукається у вигляді синтезу $u(K,Q,L)$. Будується узагальнена крива перемикання та магістраль [1; 2].

Для оптимального керування в описаній моделі встановлюється таке правило: якщо мета достатньо віддалена ($K_0 \ll K$), то всі капіталовкладення потрібно направляти в ту область, де норма ефективності більша. На магістралі $\left(\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial Y}{\partial Q}\right)$ капіталовкладення розподіляються в такій пропорції, щоб рівність норм ефективності виконувалась тотожно.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Описаний в [1; 2] підхід поряд із методологічними досягненнями, до яких відносяться економічна і математична постановки задачі, метод дослідження, одержані якісні результати, все ж є один істотний недолік. Це стосується встановлення функціональної залежності $A(Q)$ мультиплікатора прогресу, яка сама по собі є досить складною задачею. Наша мета — позбутись вказаного недоліку.

Для цього спочатку сформулюємо ті спрощені гіпотези, на основі яких грунтується запропонована нами економіко-математична модель. Як і в роботі [1], нами розглядається однопродуктова замкнута економіка, що використовує лише два ресурси — капітал і працю; споживання, амортизація основних фондів та темп зростання населення в моделі не враховуються; капіталовкладення в основні фонди кількісно розширюють виробничі ресурси. Але, на відміну від роботи [1], вважаємо, що у нас відсутній у явному вигляді мультиплікатор прогресу, а прогрес здійснюється шляхом капіталовкладень у працю, що призводить до підвищення кваліфікації робітників і, таким чином, створюється складна праця, що вимірюється в одиницях простої праці. Іншими словами, інвестиції в інтелектуальний каптал призводять до кількісного розширення простої праці. Ще одна спрощена гіпотеза полягає в тому, що всі коефіцієнти в моделі покладені рівними одиниці, що, в свою чергу, зняло всі питання щодо специфікації моделі.

Отже, величина випуску продукції описується неокласичною виробничою функцією х відокремленими змінними:

$$Y = F(K,L) = g(K)h(L) \quad (3).$$

Зокрема, це може бути функція Кобба-Дугласа $F(K,L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1.$

Динаміка системи описується за допомогою системи двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= uY = ug(K)h(L), \\ \dot{L} &= (1-u)Y = (1-u)g(K)h(L) \end{aligned} \quad (4).$$

До системи (4) додаються початкові умови

$$K(0) = K_0, \quad L(0) = L_0 \quad (5).$$

Потрібно обрати керування $u(t), \quad 0 \le u(t) \le 1$ в системі (4) так, щоб, виходячи зі стану (K_0, L_0) при $t=0$, траєкторія $(K(t),L(t))$ досягла заданого рівня $\overline{K}$ обсягу виробничого капіталу за найменший час $T, 0 \le t \le T$.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Використовуючи методологію [1], розв'язуємо сформульовану задачу оптимального керування на швидкодію за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. При цьому шукатимемо розв'язок у вигляді синтезу $u(K,L)$. Термінальний многовид M у нашій задачі є прямою:

$$K - \overline{K} = 0 \quad (6),$$

у фазовій площині (K,L).

Введемо спряжені змінні ψ_1, ψ_2, запишемо гамільтоніан:

$$H = \psi_1 uY + \psi_2(1-u)Y \quad (7),$$

і спряжену систему

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial K} = -\psi_1 u\frac{\partial Y}{\partial K} - -\psi_2(1-u)\frac{\partial Y}{\partial K}, \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial L} = -\psi_1 u\frac{\partial Y}{\partial L} - -\psi_2(1-u)\frac{\partial Y}{\partial L}, \end{aligned} \quad (8),$$

а також умови трансверсальності до многовиду (6):

$$\psi_1(T) = 1, \quad \psi_2(T) = 0 \quad (9).$$

Гамільтоніан (7) є лінійною функцією $u, \quad 0 \le u \le 1$, тому для оптимального керування $u(t)$ будемо мати:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & при \quad \varphi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t) < 0, \\ 1 & при \quad \varphi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t) > 0. \end{cases}$$

Випадок $\varphi = 0, \quad \psi_1(t) = \psi_2(t)$ є особливим. Для функції $\varphi(t)$ в особливому випадку є два варіанти: 1) $\varphi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t) \equiv 0$ на деякому проміжку часу; 2) $\varphi(t) = 0$ лише в деякий момент часу $\hat{t}$.

Розглянемо варіант 1. Оскільки $\psi_1(t) \equiv \psi_2(t)$ на деякому проміжку, то $\dot{\psi}_1(t) \equiv \dot{\psi}_2(t)$ на цьому проміжку. З системи (8) отримуємо рівняння:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial Y}{\partial K} \quad (10).$$

Враховуючи вираз (3) для Y і нерівності $g'(K) > 0, h'(L) > 0$, що випливають з умов неокласичності виробничої функції (3), рівняння (10) можна замінити рівносильним рівнянням:

$$\frac{h(L)}{h'(L)} = \frac{g(K)}{g'(K)} \quad або \quad \tilde{h}(L) = \tilde{g}(K) \quad (11).$$

Рівняння (11) представляє деяку криву l в фазовій площині (K,L). З умов на функції $g(K)$ та $h(L)$ випливає монотонність обох частин рівняння (11), звідки, в свою чергу, випливає, що рівняння (11) визначає L як зростаючу функцію аргумента K при всіх $K>0$: $L = \rho(K)$, причому $\lim\limits_{K \to \infty} \rho(K) = \infty$.

Отже, якщо для оптимальної траєкторії $(K(t),L(t))$ виконується тотожність $\varphi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t) \equiv 0$ на деякому проміжку часу, то ця траєкторія проходить по особливій кривій l, що визначається рівнянням (10) або рівносильним йому рівнянням (11).

З умов на функції $g(K), g'(K), h(L), h'(L)$ при $K \to \infty$ та $L \to \infty$ легко показати, що для функції двох змінних

$$G(K,L) = \frac{h(L)}{h'(L)} - \frac{g(K)}{g'(K)} = \tilde{h}(L) - \tilde{g}(K)$$

виконуються такі нерівності:

а) $G(K,L) > 0$ вище кривої l (при великих L та "помірних" K);

б) $G(K,L) < 0$ нижче кривої l (при великих K та "помірних" L).

Враховуючи умови $u(t) \geq 0$, $1-u(t) \geq 0$, $\frac{\partial Y}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial Y}{\partial L} > 0$, $\psi_1(T) = 1$, $\psi_2(T) = 0$ з системи рівнянь (8) випливає, що при $t < T$ буде:

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2 = (\psi_1 u + \psi_2(1-u))\left(\frac{\partial Y}{\partial L} - \frac{\partial Y}{\partial K}\right),$$

тобто

$$sign\,\dot{\varphi} = sign\left(\frac{\partial Y}{\partial L} - -\frac{\partial Y}{\partial K}\right).$$

Отже, вище кривої l маємо $\dot{\varphi} < 0$, а нижче неї $\dot{\varphi} > 0$. Звідси випливає, що вище особливої кривої l на екстремальних траєкторіях $u \equiv 1$.

На термінальному многовиді $K = \bar{K}$ виконується $\varphi = 1$. Тоді завдяки неперервності функції $\varphi = \psi_1 - \psi_2$ в деякому околі многовиду також буде $\varphi > 0$, а отже, $u_{опт} \equiv 1$.

При $u \equiv 1$ система (4), (8) набуває вигляду:

$$\dot{K} = Y = g(K)h(L), \quad \dot{L} = 0, \qquad (12),$$

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_1 \frac{\partial Y}{\partial K} = -\psi_1 g'(K)h(L),$$
$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1 \frac{\partial Y}{\partial L} = -\psi_1 g(K)h(L). \qquad (13).$$

Звідси маємо $\frac{dK}{g(K)} = h(L)dt = -\frac{d\psi_1}{g'(K)\psi_1}$

або $\frac{dg(K)}{g(K)} = -\frac{d\psi_1}{\psi_1}$.

Враховуючи, що $K(T) = \bar{K}$, $\psi_1(T) = 1$, одержуємо

$$\psi_1(t) = \frac{g(\bar{K})}{g(K)}.$$

Враховуючи, що $\psi_2(T) = 0$, $L(t) = L(T)$, з (13) одержуємо

$$\psi_2(t) = g(\bar{K})h'(L(t))\int_t^T h(L(\tau))d\tau.$$

Отже,

$$\varphi = g(\bar{K})\left[\frac{1}{g(K)} - h'(L(T))\int_t^T h(L(\tau))d\tau\right]$$

Оскільки $\varphi(T) = 1$, то при зменшенні t ще деякий час $\varphi(t)$ залишається додатним, а момент $\hat{t}$, коли $\varphi(\hat{t}) = 0$, найближчий до T є найбільш коренем рівняння:

$$\int_t^T h(L(\tau))d\tau = \frac{1}{g(K)h'(L(T))} \qquad (14).$$

Знайдемо рівняння, яке описує у фазовому просторі множину точок екстремальних траєкторій в момент $\hat{t}$. Для цього з (12) одержуємо:

$$\int_t^T h(L(\tau))d\tau = \frac{\int_K^{\bar{K}} \frac{dx}{g(x)}}{h(L)},$$

а з врахуванням (14) отримаємо рівняння шуканої множини (деякої кривої s в фазовій площині (K, L)) у такому вигляді:

$$\frac{h(L)}{h'(L)} = g(K)\int_K^{\bar{K}} \frac{dx}{g(x)} \quad або \quad \tilde{h}(L) = g(K)\int_K^{\bar{K}} \frac{dx}{g(x)} \qquad (15).$$

З рівнянь (11) та (15) випливає, що:

$$s \cap l = \{(0,0); (K_p, L_p)\},$$

де K_p — єдиний корінь рівняння:

$$\int_K^{\bar{K}} \frac{dx}{g(x)} = \frac{1}{g'(K)} \qquad (16),$$

а L_p визначається з (15) при $K = K_p$. Диференціюючи співвідношення (15) за змінною K, отримаємо:

$$L'_K = \frac{\frac{h(L)g'(K)}{h'(L)g(K)} - 1}{\left(\frac{h(L)}{h'(L)}\right)'}.$$

Аналіз цього виразу приводить до висновку, що точка (K_p, L_p) є вершиною кривої S.

Отже, якщо початкова точка (K_0, L_0) лежить вище кривої l, то при $L_0 > L_p$ рівняння (15) не має розв'язків і для екстремальних траєкторій $u \equiv 1$, бо $\varphi > 0$. У випадку $L_0 \leq L_p$ екстремаль обов'язково перетинає особливу криву і тоді скрізь над особливою кривою $u = 1$.

Побудуємо тепер з кривих l та s ще одну криву Λ (узагальнену криву перемикання) за таким правилом: при $0 \leq K \leq K_p$ буде $\Lambda = l$, а при $K_p \leq K \leq \bar{K}$ буде $\Lambda = s$. Рівняння кривої Λ можна записати у вигляді $U(K, L) = 0$, де

$$U(K,L) = \begin{cases} \tilde{h}(L) - \tilde{g}(K), & 0 \leq K \leq K_p, \\ \tilde{h}(L) - g(K)\int_K^{\bar{K}} \frac{dx}{g(x)}, & K_p \leq K \leq \bar{K}. \end{cases}$$

При цьому K_p є коренем рівняння (16). Таким чином, маємо наступне: вище кривої Λ буде $u \equiv 1$, нижче кривої Λ буде $u \equiv 0$. На особливій кривій $l, 0 \leq K \leq K_p$, для оптимального керування u можемо знайти такий вираз:

$$u^* = \frac{\tilde{h}'(L)}{\tilde{h}'(L) + \tilde{g}'(K)} \qquad (17).$$

Справді, з (11) знаходимо диференціальне рівняння кривої l, а саме:

$$\frac{dL}{dK} = \frac{\tilde{g}'(K)}{\tilde{h}'(L)},$$

а з системи (4) маємо:

$$\frac{dL}{dK} = \frac{1-u}{u}.$$

Отже, маємо:

$$u(K,L) = \begin{cases} 1, & коли \quad (K,L) \ вище \ \Lambda, \\ 0, & коли \quad (K,L) \ нижче \ \Lambda, \\ u^*, & коли \quad (K,L) \in \Lambda \cap l. \end{cases}$$

На $s \cap l$ можна покласти $u \equiv 1$. Очевидно, екстремальна траєкторія єдина для будь-якої початкової точки (K_0, L_0). Одночасно вона буде і оптимальною.

Типова поведінка оптимальних траєкторій така: якщо $K_0 \ll \bar{K}$, то спочатку траєкторія виходить на особливу криву і рухається по ній. Після зустрічі з кривою перемикання траєкторія сходить з особливої кривої. Отже, рівняння магістралі має вигляд $\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial Y}{\partial Q}$, а еко-

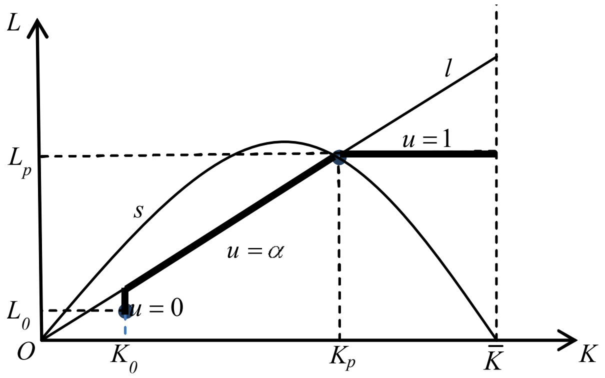

Рис. 1. Оптимальні траєкторії

номічне тлумачення отриманого розв'язку є таким: лише на кривій l норма ефективності нагромадження дорівнює нормі ефективності капіталовкладень в інтелект.

Приклад. Проілюструємо отримані результати для випадку виробничої функції Кобба-Дугласа:

$$Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1 \qquad (18).$$

Тоді $g(K)=K^{\alpha}$, $h(L)=L^{1-\alpha}$, $g'(K)=\alpha K^{\alpha-1}$, $h'(L)=(1-\alpha)L^{-\alpha}$.

Рівняння (11), яке описує особливу криву l (магістраль): має вигляд (рис. 1):

$$L=\frac{1-\alpha}{\alpha}K \qquad (19).$$

Рівняння (15), яке описує криву перемикання S, має вигляд:

$$L=\bar{K}^{1-\alpha}K^{\alpha}-K \qquad (20).$$

Точка (K_p, L_p) перетину магістралі l та кривої перемикання S визначається з рівнянь (15) та (16):

$$K_p=\bar{K}\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad L_p=\bar{K}(1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \qquad (21).$$

Згідно з (17), на магістралі l, $0\le K\le K_p$, оптимальне керування $u^*=\alpha$.

ВИСНОВОК

Таким чином, в даній роботі поставлена і розв'язана важлива задача про оптимальний розподіл інвестицій у виробничий та в інтелектуальний капітали з метою найшвидшого досягнення заданого рівня основних фондів. Вважаємо актуальним продовжити подібні дослідження у більш складних випадках.

Література:

1. Acemoglu D. Introduction to Modern Economic Growth / D. Acemoglu. — Princeton and Oxford: Princeton University Press, 2009. — 990 p.
2. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Основи математичної економіки. — К.: Інформтехніка, 1995. — 320 с.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский Р.В., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1979. — 392 с.

Стаття надійшла до редакції 13.03.2012 р.