УДК 515.2:004.9

ГЕОМЕТРИЧНЕ КОНСТРУЮВАННЯ ТРИВИМІРНИХ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ СИРЕНДИПОВОЇ СІМ'Ї

Манойленко О.С.
Херсонська філія Національного університету кораблебудування

В роботі розглянуто можливість застосування в курсі дисциплін математичного моделювання і чисельних методів методики геометричного моделювання тривимірних скінчених елементів сирендипової сім'ї на кубі. Ця методика може бути застосована для розв'язання температурної задачі. В роботі показана методика геометричного моделювання тривимірних скінчених елементів сирендипової сім'ї на кубі. Розглядаються три альтернативні моделі стаціонарного температурного поля в кубі: статистична, аналітична і сіткова.

Ключові слова: *геометричне моделювання, скінчені елементи, базисні функції;*

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями.

В курсі дисципліни Чисельні методи, або в курсі Математичного моделювання традиційно склалася ситуація, коли студенти для розв'язування задачі використовують тільки одну з моделей. Впровадження нових моделей і методів сприяє формуванню критичності мислення і дає можливість показати зв'язок між окремими темами геометрії, алгебри, математичного аналізу. Проблема модифікації базисів скінчено-елементних апроксимацій виникла практично одночасно з появою метода скінчених елементів (МСЕ). Застосування матричного (алгебраїчного) підходу до моделювання скінченних елементів (СЕ) є досить трудомістким і засвоєння цього методу вимагає багато зусиль. На противагу, геометричний підхід до моделювання СЕ є більш легким, і наочним. Для побудови базисних функцій використовуються різні комбінації площин та поверхонь в тривимірному просторі і комбінації кривих та прямих у двовимірному варіанті. Такі комбінації дають можливість розв'язування актуальної задачі оптимізації базисних функцій з метою покращення інтерполяційних і обчислювальних властивостей моделей. Зокрема, увагу привертає гранична задача відновлення функції всередині СЕ, наприклад, побудова стаціонарного температурного поля на скінченому елементі. Розв'язок відшукується усередненням граничних значень, а коефіцієнти такого усереднення за допомогою методу Монте-Карло. Класична схема цього методу вимагає постановки відповідного числа експериментів (випадкових іспитів), що реалізуються за допомогою організації випадкових блукань по СЕ. В [1,2] розглянута та обґрунтована можливість замість багатокрокових зигзагоподібних блукань з апостеріорними перехідними ймовірностями використовувати однокрокові блукання з апріорними перехідними ймовірностями і прямолінійними маршрутами.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Усі етапи розвитку обчислювальної математики пов'язані з ідеєю дискретизації. Особливе місце серед дискретних методів посідають методи чисельного розв'язування диференціальних рівнянь із частинними похідними: метод скінчених різниць (МСР), метод скінчених елементів (МСЕ), метод Монте-Карло, який використовує сіткову дискретизацію для маршрутизації випадкових блукань броунівських частинок. Перелічені методи мають не тільки спільну процедуру дискретизації, але і геометрично-імовірнісний характер побудови обчислювальних формул. Тривимірні елементи представляють собою безпосереднє узагальнення на тривимірний випадок плоских елементів. Елемент у формі куба є аналогом плоского елемента у формі квадрата. Перші змістовні результати, пов'язані з моделюванням і використанням чотирикутних СЕ, були отримані в 1966 р. (Ergatoudis J.). Спроби виключити внутрішні вузли лагранжевої інтерполяції привели до появи [3,4] корисних, але що погано піддаються формалізації, СЕ сирендипової сім'ї. Недоліки алгебраїчної процедури стають очевидними, особливо, при розгляданні елементів вищих порядків. У МСЕ стали проникати геометричні прийоми побудови інтерполяційних базисів [5].

Виклад основного матеріалу дослідження.

При побудові базису в методі скінчених елементів традиційно використовується апарат лінійної алгебри, який приводить до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь відносно параметрів, що визначають інтерполяційний поліном. Задача побудови базису, наприклад, для 20-ти вузлового скінченого елемента сирендипової сім'ї вимагає побудови і розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь 20 порядку. Розв'язання цієї системи приводить тільки до єдиного розв'язку і можливості отримати єдину систему базисних функцій [6,7]. Новий підхід до моделювання сирендипових скінчених елементів та конструювання базисних функцій грунтується на геометричних уявленнях і дає можливість отримання нових альтернативних моделей на тому ж самому скінченому елементі. Використання геометричного підходу до побудови базисних функцій є актуальним для тривимірних елементів.

Подальші дослідження показали, що базисні функції дискретного елемента можуть бути перехідними імовірностями у схемі випадкових блукань. Ці ж базисні функції відіграють роль вагових коефіцієнтів у процедурах монте-карлівських усереднень. Виявляється, що для визначення перехідних імовірностей не обов'язково накопичувати статистичну інформацію. Можна скористатися простим і надійним способом, що спирається на геометричне моделювання. Геометричний підхід є досить універсальним. Він однаково ефективний на одновимірних, двовимірних та тривимірних моделях різноманітної форми.

Базисні функції для кубу з 20-ма вузлами (рис.1) мають наступний вигляд:

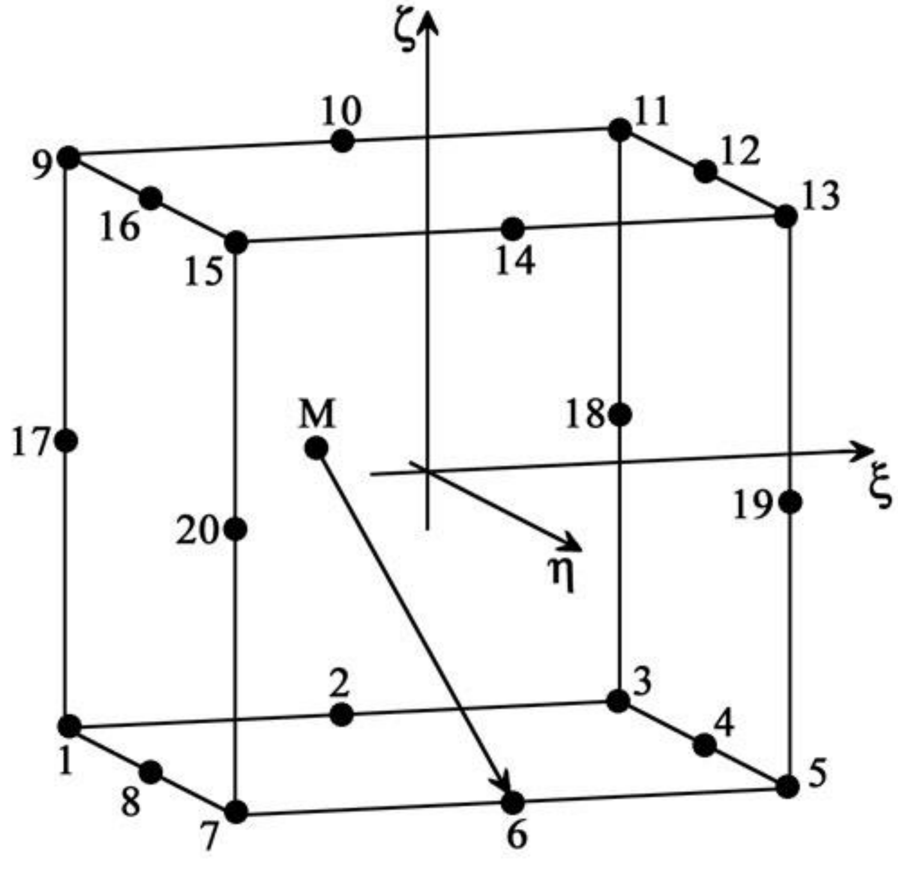

Рис.1. Тривимірний скінчений елемент із 20-ма вузлами

$$N_i = -\frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)(-\xi_i\xi - \eta_i\eta - \zeta_i\zeta + 2)$$
$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1, i = 1,3,5,7,9,11,13,15.$$
$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \tag{1}$$
$$\eta_i, \zeta_i = \pm 1, i = 2,6,10,14.$$

Щоб отримати базисні функції для вузлів 4,8,12,16, треба у формулі (1) зробити перестановку ξ та η. Щоб отримати базисні функції для вузлів 17,18,19,20, треба у формулі (1) зробити перестановку ξ та ζ.

Дані функції задовольняють умовам:

- базисна функція дорівнює одиниці в однойменному вузлі і обертається в нуль в інших вузлах;
- $\sum_{i=1}^{20} N_i = 1,$ де $N_i -$базисна функція, що відповідає вузлу i на елементі $(i = \overline{1,20}).$

У науковій літературі зустрічаються базисні функції сирендипових елементів з 20-ма вузлами [3]. Побудовані формули за допомогою геометричного моделювання у точності співпадають із формулами, побудованими у літературі більш трудомістким алгебраїчним підходом.

Температурні задачі приваблювали вчених протягом багатьох років. Останнім часом температурні задачі почали розв'язувати за допомогою методів дискретних елементів. Значні результати були отримані С. Патанкаром, Сполдінгом, В.Г. Шабровим, К. Флетчером. Побудуємо температурне поле всередині куба з 20-ма вузлами, якщо в цих вузлах температура відома. Статистичний експеримент полягає у спостереженні за блукаючою частинкою і фіксації факту її прибуття у вузол i ($i = \overline{1,20}$). Для маршрутизації блукань частинки зручно скористатися решіткою з комірками у формі кубів. За результатами n випробувань обчислюються відносні частоти поглинань частинок вузлом i.

Температура у внутрішньому вузлі M кубу знаходиться за формулою:

$$T(M_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{20} T_i n_i \,, \tag{2}$$

де n – загальна кількість частинок, випущених з внутрішнього вузла M_k;
T_i – температура у граничному вузлі i;
n_i – кількість частинок, що фінішували у вузлі i.

Особливості методу Монте-Карло полягають, по-перше, у простоті структури обчислювального алгоритму. Як правило, складається програма для здійснення одного випадкового дослідження, яке повторюється багато разів. Кожне дослідження не залежить від інших, а результати усіх досліджень осереднюються. Тому метод Монте-Карло називають також методом статистичних досліджень. Друга особливість цього методу полягає у застосуванні його при розв'язанні тих задач, у яких результат потрібен із невеликою точністю. Для зменшення похибки у 10 разів треба збільшити об'єм роботи у 100 разів. Зрозуміло, що отримати результат високої точності таким шляхом важко.

Спочатку метод Монте-Карло використовувався для розв'язання задач нейтронної фізики, де традиційні чисельні методи виявилися мало придатними. Далі його вплив поширився на широке коло задач статистичної фізики. Метод Монте-Карло використовується у задачах теорії масового обслуговування, задачах теорії ігор та математичної економіки, задачах теорії передачі повідомлень при наявності перешкод та у ряді інших задач.

Останнім часом метод Монте-Карло використовується у теорії переносу випромінювання, кубатурних та інтерполяційних процесах, розв’язанні інтегральних рівнянь і систем алгебраїчних рівнянь, для розв’язання нелінійних рівнянь Больцмана, у задачах лінійного програмування.

Удосконалення правил випадкових блукань дає можливість виконати конкретний перехід від дискретної схеми блукань до неперервної схеми блукань. Нові правила полягають у тому, що частинка стартує із довільної точки M і з ймовірністю N_i переходить у вузол i ($i = \overline{1,20}$), де N_i – базисні функції скінченого елементу. Один з 20-ти маршрутів показаний на (рис. 1).

У ролі перехідних імовірностей виступають базисні функції, а скінченно-елементна апроксимація набуває форми середнього винагородження за вихід блукаючої частинки у вузол. Таке трактування випадкових блукань дає цілий ряд переваг у порівнянні із традиційними підходами. Спрощена схема випадкових блукань припускає заміну апостеріорних перехідних ймовірностей апріорними. Тепер температура у будь-якій точці всередині скінченого елементу визначається як математичне сподівання вузлових значень температур у граничних вузлах:

$$T(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{20} T_i N_i(\xi,\eta,\zeta), \tag{3}$$

де T_i – температура у вузлі i;
N_i – базисні функції.

Задамо температуру у граничних вузлах:

$$T_1 = T_9 = T_{17} = 5^0 C,\ T_2 = T_{10} = 10^0 C,\ T_3 = T_{11} = T_{18} = 15^0 C,$$
$$T_4 = T_{12} = 25^0 C,\ T_5 = T_{13} = T_{19} = 35^0 C,\ T_6 = T_{14} = 40^0 C,$$
$$T_7 = T_{15} = T_{20} = 45^0 C,\ \ T_8 = T_{16} = 25^0 C.$$

Таблиця 1.

Значення температури $T(\xi,\eta,\zeta)$ в контрольних точках кубу

Координати точки	За методом сіток	За формулою (2)	За формулою (3)
(-0,5;-0,5;-0,5)	16,35	16,29	16,24
(0;0;0)	25,39	25,04	25,00
(0,5;0;0)	25,44	25,03	25,00

Для переконливості, результати, отримані за формулами (2) і (3), порівнюються з розв’язком кінцево-різницевим методом задачі Діріхлє для рівняння Лапласа (яким, як відомо, описується стаціонарна температура). Для цього була нанесена сітка з 27 внутрішніми вузлами і розв’язувалась система лінійних алгебраїчних рівнянь методом послідовного виключення невідомих (методом Гаусса). Для отримання вектору правих частин значення температури на гранях були задані за допомогою усереднення заданих граничних умов.

Висновки даного дослідження та перспективи подальших розвідок у даному напрямі.

Отже, у тривимірних задачах виразно виявляються переваги геометричного моделювання порівняно з алгебраїчним. Геометричні моделі відкривають нові можливості для використання принципу зваженого усереднення параметрів у задачах відновлення функцій. Задачі відновлення функцій мають важливе значення для науки та практики. Вони виникають у різних прикладних областях: при розв'язанні задач автоматизації вимірювань, в автоматизованих системах управління технологічними процесами, при плануванні машинних експериментів з моделями систем. В останні роки задачі відновлення функцій відіграють провідну роль у розвитку дискретних методів та реалізації на ПЕОМ. Поліноміальна апроксимація розв'язку температурної задачі значно скорочує і спрощує обчислення, а також виключає необхідність покриття СЕ сіткою. В удосконалених схемах випадкових блукань, на відміну від звичайного методу Монте-Карло, де використовуються апостеріорні імовірності, застосовуються апріорні перехідні імовірності. У прискореному алгоритмі броунівська частинка досягає границі за один крок. Застосування нових схем випадкових блукань значно зменшує обсяг обчислювальної роботи, витрати машиного часу. За допомогою комп'ютерних програм і проведених експериментів доведена гіпотеза, що значення перехідних імовірностей, отриманих за допомогою випадкових блукань броунівської частинки по вузлах нанесеної сітки співпадають з результатами швидкого обчислення за формулами, побудованими автором. Це дозволило удосконалити методику досліджень з точки зору якісних показників.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Манойленко О.С., Колесникова Н.В. Хомченко А.Н. Деякі узагальнення схеми випадкових блукань у мультиплексах // Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. – Т.6. – Донецк: ИПММ, 2001. – С. 75-79.
2. Манойленко О.С., Колесникова Н.В. Математична модель випадкових блукань у мультиплексі // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. – №2(9), 2001. – С. 21–27.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541с.
4. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304с.
5. Wachspress E.L. A rational finite element basis. – Academic Press. – New York, 1975. – 216p.
6. Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. Геометрическое моделирование трехмерных сирендиповых КЭ // Прикл. геом. и инж. графика. – Мелитополь: ТГАТА. – 1997. – Вып. 4. – Т. 1. – С. 40–42.
7. Гучек П.И., Литвиненко Е.И., Буба М.С., Хомченко А.Н. Моделирование конечных элементов сирендипова семейства для исследования температурных полей // Проблеми пожежної безпеки. – К.: МВС України. – 1995. – С. 75–77.
8. Манойленко О.С. Моделювання скінчених елементів сирендипової сім'ї для дослідження температурних полів // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К. – 2001. – Вип. 69. – С. 182–196.