ЖУРНАЛ НАНО- ТА ЕЛЕКТРОННОЇ ФІЗИКИ
Том **5** № 3, 03035(5cc) (2013)

JOURNAL OF NANO- AND ELECTRONIC PHYSICS
Vol. **5** No 3, 03035(5pp) (2013)

Обобщенное уравнение Фоккера-Планка для модифицированного уравнения Ландау-Лифшица с белым шумом Пуассона

С.И. Денисов, Е.А. Бондарь

Сумский государственный университет, ул. Римского-Корсакова, 2, 40007 Сумы, Украина

(Получено 04.02.2013; опубликована online 17.10.2013)

Исходя из модифицированного стохастического уравнения Ландау-Лифшица для магнитного момента наночастицы, взаимодействующего с белым шумом Пуассона, выведено обобщенное уравнение Фоккера-Планка. При получении этого уравнения используется интерпретация Ито стохастических уравнений и принимается во внимание тот факт, что магнитный момент под влиянием данного шума может мгновенно изменять свое направление. Анализ стационарного решения обобщенного уравнения Фоккера-Планка показал, что распределение свободного магнитного момента в случайном магнитном поле, имеющем характер белого шума Пуассона, не является равномерным. Эта особенность стационарного распределения проистекает вследствие использования интерпретации Ито стохастического уравнения Ландау-Лифшица.

Ключевые слова: Стохастическое уравнение Ландау-Лифшица, Белый шум Пуассона, Исчисление Ито, Плотность вероятности, Обобщенное уравнение Фоккера-Планка.

PACS numbers: 75.78. – n, 05.10.Cg, 05.40.Ca

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы особый интерес у специалистов, занимающихся исследованием наноматериалов и их физических свойств, вызывают магнитные наночастицы. Такой интерес обусловлен как широким их использованием во многих областях науки и техники, так и перспективами их потенциальных применений [1-3]. Например, магнитные наночастицы оксидов железа используют в технологиях разделения отходов, целенаправленной доставке лекарств, гипотермической обработке раковых клеток и т.д. С другой стороны, изучение магнитных свойств наноматериалов позволяет значительно расширить область их применения и эффективно использовать в средствах магнитной записи информации, сенсорах на эффекте гигантского магнетосопротивления, магнитных затворах, феррожидкостях и др.

Вследствие внешних и внутренних флуктуаций, которые являются неотъемлемой частью реальных систем, динамика магнитного момента наночастицы является случайной. Во многих случаях для описания поведения магнитного момента может быть использовано стохастическое уравнение Ландау-Лифшица, в котором влияние флуктуаций учитывается посредством включения в эффективное магнитное поле дополнительного слагаемого с заданными статистическими свойствами. Обычно при изучении роли тепловых флуктуаций это слагаемое аппроксимируется зависящим от времени случайным вектором, компонентами которого являются независимые гауссовские белые шумы. В этом приближении динамика магнитного момента является марковской, а плотность вероятности какого-либо направления магнитного момента удовлетворяет дифференциальному уравнению Фоккера-Планка [4-6]. В частности, в рамках данного подхода изучены особенности магнитной релаксации в двухмерных ансамблях ферромагнитных наночастиц с магнитодипольным взаимодействием [7,8], свойства индуцированной намагниченности систем не взаимодействующих и взаимодействующих наночастиц в циркулярно-поляризованном магнитном поле [9-11], и зависимость среднего времени между последовательными переориентациями магнитного момента от характеристик этого поля [12].

Благодаря центральной предельной теореме [13] приближение гауссовского белого шума является вполне обоснованным, если соответствующий случайный процесс, порождающий этот шум, можно интерпретировать как результат большого числа случайных факторов, ни один из которых не является доминирующим. В противном случае при моделировании случайной динамики магнитного момента может быть использован подходящий для описания конкретной ситуации негауссовский белый шум. Из всего многообразия таких шумов особый интерес представляют белые шумы Леви и Пуассона. Поскольку первый порождается устойчивым процессом Леви, его важность проистекает из обобщенной центральной предельной теоремы, согласно которой только устойчивые распределения имеют область притяжения [14]. С другой стороны, белый шум Пуассона, представляющий собой случайную последовательность дельта-импульсов, распределенных по закону Пуассона, является удобной моделью для описания динамики систем, включая динамику магнитных моментов наночастиц, подверженных сильным, но кратковременным воздействиям.

Цель данной работы – получить уравнение для плотности вероятности магнитного момента однодоменной наночастицы, находящейся в случайном магнитном поле, компоненты которого имеют характеристики белого шума Пуассона. Поскольку динамика магнитного момента оказывается довольно сложной, для решения этой проблемы мы использовали модифицированное уравнение Ландау-Лифшица.

2. МОДЕЛЬ И ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы рассматриваем простейшую модель однодоменной ферромагнитной наночастицы, которая характеризуется магнитным моментом $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t)$ с $m = |\mathbf{m}| = \text{const}$. В этом случае случайная динамика вектора $\mathbf{m}$ может быть описана стохастическим уравнением Ландау-Лифшица

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = -\gamma\mathbf{m} \times (\mathbf{H}_{\text{eff}} + \mathbf{h}) - \frac{\alpha\gamma}{m}\mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{H}_{\text{eff}}), \qquad (1)$$

где $\gamma(>0)$ – гиромагнитное отношение, $\alpha(>0)$ – параметр затухания, знак $\times$ обозначает векторное произведение, $\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\partial W/\partial\mathbf{m}$ – эффективное магнитное поле, которое действует на магнитный момент, W – магнитная энергия наночастицы, и $\mathbf{h} = \mathbf{h}(t)$ – случайное магнитное поле. Вводя безразмерные время $\tau = \gamma H_0 t$ и энергию $E = W/mH_0$ (H_0 – характерное магнитное поле, в качестве которого можно выбрать поле анизотропии), уравнение (1) в сферических координатах сводится к системе двух уравнений

$$\dot{\theta} = f_1 + \psi_1, \quad \dot{\varphi} = f_2 + \frac{1}{\sin\theta}\psi_2 \qquad (2)$$

для полярного $\theta = \theta(t)$ и азимутального $\varphi = \varphi(t)$ углов вектора $\mathbf{m}$. Здесь точка над θ и φ обозначает дифференцирование по безразмерному времени,

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(\theta,\varphi,\tau) = -\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)E, \\ f_2 &= f_2(\theta,\varphi,\tau) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\alpha}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)E, \end{aligned} \qquad (3)$$

а величины $\psi_{1,2} = \psi_{1,2}(\theta,\varphi,\tau)$ выражаются через безразмерные компоненты $g_\kappa = h_\kappa(\tau)/H_0 (\kappa = x,y,z)$ случайного магнитного поля $\mathbf{h}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\sin\varphi\, g_x + \cos\varphi\, g_y, \\ \psi_2 &= \sin\theta\, g_z - \cos\theta\,(\cos\varphi\, g_x + \sin\varphi\, g_y). \end{aligned} \qquad (4)$$

В дальнейшем мы будем аппроксимировать компоненты g_κ белыми шумами с заданными статистическими характеристиками. Поскольку, согласно (4), эти шумы являются мультипликативными, система стохастических уравнений (2) должна быть тщательно определена. Для этой цели мы перепишем (2) в дифференциальной форме и воспользуемся интерпретацией Ито [15] (см. также [5,6]) этой системы. В результате получаем

$$d\theta = f_1 d\tau + d\eta_1, \quad d\varphi = f_2 d\tau + \frac{1}{\sin\theta}d\eta_2, \qquad (5)$$

где

$$\begin{aligned} d\eta_1 &= -\sin\varphi\, d\zeta_x + \cos\varphi\, d\zeta_y, \\ d\eta_2 &= \sin\theta\, d\zeta_z - \cos\theta\,(\cos\varphi\, d\zeta_x + \sin\varphi\, d\zeta_y) \end{aligned} \qquad (6)$$

и $d\zeta_\kappa = d\zeta_\kappa(\tau) = \int_\tau^{\tau+d\tau} d\tau' g_\kappa(\tau')$ с $\tau = kd\tau$ ($k = 0.1, \dots$). Относительно случайных функций $d\zeta_\kappa(\tau)$ предполагается, что при разных κ и/или k они независимы, одинаково распределены и имеют нулевые средние значения. Это означает, что должны выполняться условия $\langle d\zeta_\kappa(\tau)\rangle = 0$, $\langle d\zeta_\kappa(\tau)d\zeta_{\kappa'}(\tau')\rangle = 0$ ($\kappa \neq \kappa'$ и/или $\tau \neq \tau'$) и $\langle[d\zeta_x(\tau)]^2\rangle = \langle[d\zeta_y(\tau)]^2\rangle = \langle[d\zeta_z(\tau)]^2\rangle$, где угловые скобки обозначают усреднение по реализациям случайных функций $d\zeta_\kappa(\tau)$.

Используя эти средние и формулы (6), можно показать, что $\langle d\eta_p(\tau)\rangle = 0 (p = 1,2)$, $\langle d\eta_p(\tau)d\eta_{p'}(\tau')\rangle = 0$ ($p \neq p'$ и/или $\tau \neq \tau'$) и $\langle[d\eta_p(\tau)]^2\rangle = \langle[d\zeta_x(\tau)]^2\rangle$. Таким образом, случайные функции $d\zeta_\kappa(\tau)$ и $d\eta_p(\tau)$ имеют нулевые средние значения и одинаковые корреляционные функции. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть модифицированную систему уравнений (5), в которой приращения $d\eta_p$ порождаются белыми шумами $\xi_p(\tau)$, имеющими те же статистические характеристики, что и $g_\kappa(\tau)$. Другими словами, мы представляем $d\eta_p$ в виде

$$d\eta_p = \int_\tau^{\tau+d\tau} d\tau' \xi_p(\tau') \qquad (7)$$

и полагаем, что независимые шумы $\xi_1(\tau)$ и $\xi_2(\tau)$ имеют те же свойства, что $g_x(\tau)$. Во избежание недоразумений сразу отметим, что в статистическом смысле система уравнений (5) с $d\eta_p$ из (6) не эквивалентна этой же системе с $d\eta_p$ из (7). Причина очевидна – в первом случае приращения $d\eta_p$ зависят от углов θ и φ, тогда как во втором случае такой зависимости нет. Тем не менее, изучение статистических свойств магнитного момента в рамках модифицированного уравнения Ландау-Лифшица вполне оправданно, поскольку, с одной стороны, влияние негауссовских белых шумов на динамику $\mathbf{m}$ ранее не рассматривалось, а с другой – модифицированное уравнение проще исходного.

В данной работе изучается важный с точки зрения приложений случай, когда белый шум $\xi(\tau)$ (для упрощения обозначений мы опускаем индекс p) является пуассоновским, т.е.,

$$\xi(\tau) = \sum_{i=1}^{n(\tau)} z_i \delta(\tau - \tau_i). \qquad (8)$$

Здесь z_i – независимые случайные величины, распределенные на интервале $(-\infty, +\infty)$ с некоторой плотностью вероятности $q(z)$ и имеющие нулевые средние значения, $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака, τ_i – моменты появления дельта-импульсов и $n(\tau)$ – считающий пуассоновский процесс, характеризующийся вероятностью $P(n(\tau) = n) = (\nu\tau)^n e^{-\nu\tau}/n!$ (параметр ν обозначает интенсивность процесса) того, что произошло $n(\tau) \geq 0$ дельта-импульсов в интервале $(0,\tau]$. Используя (7) и (8), можно показать [16], что плотность вероятности $p(\mu; d\tau) = \langle\delta(\mu - d\eta)\rangle$ того, что за время $d\tau$ произойдет скачок, величина которого $d\eta = \int_\tau^{\tau+d\tau} d\tau' \xi(\tau')$ равна μ, дается выражением

$$p(\mu; d\tau) = (1 - \nu d\tau)\delta(\mu) + \nu d\tau q(\mu). \qquad (9)$$

Поскольку вероятность $1 - \int_{-z_0}^{z_0} dz q(z)$ значений z с $|z| > z_0$ (z_0 – произвольный положительный параметр) в общем случае отлична от нуля, направление вектора $\mathbf{m}$ в моменты появления дельта-импульсов изменяется скачкообразно. Важно подчеркнуть, что это изменение может происходить путем многократного вращения магнитного момента. Действительно, так как $d\eta_p \in (-\infty, \infty)$ и, следовательно, $d\theta, d\varphi \in (-\infty, \infty)$, а $\theta(\tau) \in [0,\pi]$ и $\varphi(\tau) \in [0,2\pi)$, из условия $\mathbf{m}(\theta(\tau + d\tau), \varphi(\tau + d\tau)) = \mathbf{m}(\theta(\tau) + d\theta, \varphi(\tau) + d\varphi)$ можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \theta(\tau + d\tau) &= \theta(\tau) + d\theta - 2\pi n, \\ \varphi(\tau + d\tau) &= \varphi(\tau) + d\varphi - 2\pi m \end{aligned} \qquad (10)$$

и

$$\begin{aligned} \theta(\tau + d\tau) &= -\theta(\tau) - d\theta - 2\pi n, \\ \varphi(\tau + d\tau) &= \varphi(\tau) + d\varphi - 2\pi m - \pi. \end{aligned} \qquad (11)$$

Здесь, n и m – целые числа, которые при заданных $d\theta$ и $d\varphi$ определяют число и направление оборотов вектора $\mathbf{m}$ в соответствующих плоскостях.

Таким образом, система уравнений (5) с белым шумом Пуассона теперь полностью определена, и мы в состоянии найти отвечающее ей обобщенное уравнение Фоккера-Планка.

3. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА

Определяем плотность вероятности $P = P(\theta, \varphi, \tau)$ того, что $\theta(\tau) = \theta$ и $\varphi(\tau) = \varphi$, стандартным образом

$$P = \langle \delta\big(\theta - \theta(\tau)\big)\delta\big(\varphi - \varphi(\tau)\big)\rangle, \qquad (12)$$

где угловые скобки можно интерпретировать как усреднение по реализациям случайных функций $\theta(\tau)$ и $\varphi(\tau)$. Используя соотношения (10) и (11), плотность вероятности в момент времени $\tau + d\tau$, $\tilde{P} = P(\theta, \varphi, \tau + d\tau)$, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\tilde{P} = \textstyle\sum_{n,m}\langle[\delta(\theta - \theta(\tau) - d\theta + 2\pi n)\delta(\varphi - \varphi(\tau)\\ - d\varphi + 2\pi m) + \delta(\theta + \theta(\tau) + d\theta + 2\pi n)\\ \times\delta(\varphi - \varphi(\tau) - d\varphi + 2\pi m + \pi)]\rangle.\end{aligned} \qquad (13)$$

Важно отметить, что усреднение в (13) производится по реализациям случайных функций $\theta(\tau + d\tau)$ и $\varphi(\tau + d\tau)$. Принимая во внимание независимость случайных величин $d\eta_p$ от $\theta(\tau)$ и $\varphi(\tau)$, это усреднение удобно осуществить в два этапа. На первом следует провести усреднение по значениям случайных величин $d\eta_p$, а затем результат усреднить по реализациям $\theta(\tau)$ и $\varphi(\tau)$. С учетом уравнений (5) это дает

$$\begin{aligned}\tilde{P} = \textstyle\sum_{n,m}\int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi'\, P(\theta', \varphi', \tau) \iint_{-\infty}^{\infty} d\mu_1 d\mu_2\\ \times p(\mu_1; d\tau)p(\mu_2; d\tau)[\delta(\theta - \theta' - f_1' d\tau - \mu_1 + 2\pi n)\\ \times\delta(\varphi - \varphi' - f_2' d\tau - \mu_2/\sin\theta' + 2\pi m)\\ +\delta(\theta + \theta' + f_1' d\tau + \mu_1 + 2\pi n)\\ \times\delta(\varphi - \varphi' - f_2' d\tau - \mu_2/\sin\theta' + 2\pi m + \pi)],\end{aligned} \qquad (14)$$

где $f'_{1,2} = f_{1,2}(\theta', \varphi', \tau)$.

Теперь, используя (13) и (14), найдем производную $\partial P/\partial\tau = \lim_{d\tau\to 0}(\tilde{P} - P)/d\tau$. Для этого в (14) достаточно учесть лишь линейные по $d\tau$ слагаемые. Записав в этом приближении

$$\begin{aligned}p(\mu_1; d\tau)p(\mu_2; d\tau) = (1 - 2\nu d\tau)\delta(\mu_1)\delta(\mu_2)\\ +\nu d\tau\delta(\mu_1)q(\mu_2) + \nu d\tau q(\mu_1)\delta(\mu_2)\end{aligned} \qquad (15)$$

и воспользовавшись свойствами дельта-функции, после ряда преобразований получаем искомое обобщенное уравнение Фоккера-Планка

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}P = -\frac{\partial}{\partial\theta}f_1 P - \frac{\partial}{\partial\varphi}f_2 P - 2\nu P\\ +\nu\sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi' P(\theta, \varphi', \tau) \textstyle\sum_m q(\sin\theta[\varphi - \varphi' + 2\pi m])\\ +\nu \int_0^{\pi} d\theta' P(\theta', \varphi, \tau) \textstyle\sum_n q(\theta - \theta' + 2\pi n)\\ +\nu \int_0^{\pi} d\theta' [P(\theta', \varphi + \pi, \tau)|_{\varphi<\pi} + P(\theta', \varphi - \pi, \tau)|_{\varphi>\pi}]\\ \times \textstyle\sum_n q(-\theta - \theta' + 2\pi n).\end{aligned} \qquad (16)$$

Это уравнение, в отличие от обыкновенного уравнения Фоккера-Планка, является интегро-дифференциальным, что обусловлено скачкообразным характером изменения направления вектора магнитного момента под действием шума Пуассона. Как обычно, решение уравнения (16) должно быть нормировано, $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, P(\theta, \varphi, \tau) = 1$, и удовлетворять некоторому начальному условию $P(\theta, \varphi, 0) = P_0(\theta, \varphi)$.

4. АНАЛИЗ ОБОЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

Рассмотрим некоторые свойства решений обобщенного уравнения Фоккера-Планка (16). Прежде всего отметим, что плотность вероятности $P(\theta, \varphi, \tau)$ является неотрицательной функцией. Это следует непосредственно из определения (12) и свойств дельта-функции. Из этого же определения следует и условие нормировки $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, P(\theta, \varphi, \tau) = 1$. Однако, чтобы дополнительно проверить корректность уравнения (16), целесообразно также показать, что это уравнение сохраняет нормировку. С этой целью проинтегрируем обе части уравнения (16) по всем допустимым значениям углов θ и φ. Тогда, меняя порядок следования операций дифференцирования и интегрирования и учитывая условие нормировки, легко видеть, что левая часть равна нулю. Аналогично, преобразуя правую часть с учетом того факта, что функции P и $f_{1,2}$ периодичны по переменной φ с периодом 2π, нетрудно убедиться, что если

$$\int_0^{2\pi} d\varphi[(f_1 P)|_{\theta=\pi} - (f_1 P)|_{\theta=0}] = 0, \qquad (17)$$

тогда проинтегрированное уравнение (16) принимает вид $0 = 0$. Таким образом, уравнение (16) при выполнении условия (17) сохраняет нормировку P.

Рассмотрим теперь простейший случай свободного магнитного момента, взаимодействующего лишь с пуассоновским шумом. В этом случае $f_1 = f_2 = 0$, и стационарное решение уравнения (16), $P_{\mathrm{st}} = \lim_{\tau\to\infty} P(\theta, \varphi, \tau)$, можно искать в виде $P_{\mathrm{st}} = F(\theta)$. Согласно (16), функция $F(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}2F(\theta) = \sin\theta\, F(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi' \textstyle\sum_m q(\sin\theta\\ \times[\varphi - \varphi' + 2\pi m]) + \int_0^{\pi} d\theta' F(\theta')\\ \times \textstyle\sum_n [q(\theta - \theta' + 2\pi n) + q(-\theta - \theta' + 2\pi n)],\end{aligned} \qquad (18)$$

которое с учетом соотношения

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \textstyle\sum_m q(\sin\theta\,[\varphi - \varphi' + 2\pi m]) = \frac{1}{\sin\theta} \qquad (19)$$

сводится к виду

$$\begin{aligned}F(\theta) = \int_0^{\pi} d\theta' F(\theta') \textstyle\sum_n [q(\theta - \theta' + 2\pi n)\\ +q(-\theta - \theta' + 2\pi n)].\end{aligned} \qquad (20)$$

Используя соотношение

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_n \int_0^{\pi} d\theta [q(\theta - \theta' + 2\pi n) + q(-\theta - \theta' + 2\pi n)]\\ = \int_{-\infty}^{\infty} dx q(x) = 1,\end{aligned} \qquad (21)$$

легко проверить, что интегральное уравнение (20) совместимо с условием нормировки $\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, F(\theta) = 1$

стационарной плотности вероятности $F(\theta)$. Интересно также отметить, что решение уравнения (20) не описывает равномерное распределение магнитного момента, как можно было бы ожидать из физических соображений. Действительно, в случае равномерного распределения имело бы место представление $F(\theta) = \sin\theta/4\pi$. Однако эта функция не является решением уравнения (20), поскольку при $\theta = 0$ его левая часть равна нулю, а правая – нет. Тот факт, что плотность вероятности $F(\theta) = \sin\theta/4\pi$, отвечающая равномерному распределению магнитного момента, не является решением стационарного уравнения (20), проистекает от использования интерпретации Ито исходной системы стохастических уравнений (2). Отметим в этой связи, что аналогичная ситуация – несовпадение стационарных решений уравнения Фоккера-Планка при различных интерпретациях уравнения Ланжевена с мультипликативным шумом – имеет место и в простейшем случае гауссовского белого шума [5].

5. ВЫВОДЫ

В рамках модифицированного уравнения Ландау-Лифшица впервые рассмотрена стохастическая динамика магнитного момента наночастицы, индуцированная белым шумом Пуассона. Используя интерпретацию Ито стохастических уравнений и скачкообразное изменение направления магнитного момента, мы вывели обобщенное уравнение Фоккера-Планка для плотности вероятности его ориентации. Анализ этого уравнения, основной особенностью которого является его интегральный характер, показал, что изменение плотности вероятности происходит с сохранением ее нормировки. Установлено также, что вследствие использования интерпретации Ито уравнения Ландау-Лифшица, стационарное распределение свободного магнитного момента не является равномерным.

Generalized Fokker-Planck Equation for the Modified Landau-Lifshitz Equation with Poisson White Noise

S.I. Denisov, O.O. Bondar

Sumy State University, 2, Rimsky Korsakov Str., 40007 Sumy, Ukraine

Using the modified stochastic Landau-Lifshitz equation driven by Poisson white noise, we derive the generalized Fokker-Planck equation for the probability density function of the nanoparticle magnetic moment. In our calculations we employ the Ito interpretation of stochastic equations and take into account the fact that the magnetic moment direction can be changed by this noise instantaneously. The analysis of the stationary solution of the generalized Fokker-Planck equation shows that the distribution of the free magnetic moment in Poisson white noise is not uniform. This feature of the stationary distribution arises from using the Ito interpretation of the stochastic Landau-Lifshitz equation.

Keywords: Stochastic Landau-Lifshitz equation, Poisson white noise, Probability density function, Generalized Fokker-Planck equation.

Узагальнене рівняння Фоккера-Планка для модифікованого рівняння Ландау-Ліфшиця з білим шумом Пуассона

С.І. Денисов, О.О. Бондар

Сумський державний університет, вул. Римського-Корсакова, 2, 40007, Суми, Україна

Виходячи з модифікованого стохастичного рівняння руху Ландау-Лівшиця для магнітного моменту наночастинки, що взаємодіє з білий шум Пуассона, виведено узагальнене рівняння Фоккера-Планка. При отриманні цього рівняння використано інтерпретацію Іто стохастичних рівнянь та прийнято до уваги той факт, що магнітний момент під впливом даного шуму може миттєво змінювати свій напрям. Аналіз стаціонарного рішення узагальненого рівняння Фоккера-Планка показав, що розподіл вільного магнітного моменту у випадковому магнітному полі, що має характер білого шуму Пуассона, не є рівномірним. Ця особливість стаціонарного розподілу виникає внаслідок використання інтерпретації Іто стохастичного рівняння Ландау-Ліфшиця.

Ключові слова: Стохастичне рівняння Ландау-Ліфшиця, Білий шум Пуассона, Щільність ймовірності, Узагальнене рівняння Фоккера-Планка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.L. Dormann, D. Fiorani, E. Tronc, *Adv. Chem. Phys.* **98**, 283 (1997).
2. C.A. Ross, *Annu. Rev. Mater. Res.* **31**, 203 (2001).
3. Q.A. Pankhurst, J. Connolly, S.K. Jones, J. Dobson, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **36**, R167 (2003).
4. W.F. Brown Jr., *Phys. Rev.* **130**, 1677 (1963).
5. H. Risken, *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications* (Berlin: Springer-Verlag: 1989).
6. W.T. Coffey, Yu.P. Kalmykov, J.T. Waldron, *The Langevin Equation* (Singapore: WorldScientific: 2004).
7. S.I. Denisov, K.N. Trohidou, *Phys. Rev. B* **64**, 184433 (2001).
8. S.I. Denisov, T.V. Lyutyy, K.N. Trohidou, *Phys. Rev. B* **67**, 014411 (2003).
9. S.I. Denisov, T.V. Lyutyy, P. Hänggi, K.N. Trohidou, *Phys. Rev. B* **74**, 104406 (2006).
10. S.I. Denisov, T.V. Lyutyy, P. Hänggi, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 227202 (2006).
11. S.I. Denisov, K. Sakmann, P. Talkner, P. Hänggi, *Europhys. Lett.* **76**, 1001 (2006).
12. S.I. Denisov, A.Yu. Polyakov, T.V. Lyutyy, *Phys. Rev. B* **84**, 174410 (2011).
13. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2 (New York: Wiley: 1971).
14. G. Samorodnitsky, M.S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Processes*: *Stochastic Models with Infinite Variance* (New York: Chapman and Hall: 1994).
15. K. Ito, *Nagoya Math. J.* **1**, 35 (1950).
16. S.I. Denisov, W. Horsthemke, P. Hänggi, *Eur. Phys. J. B* **68**, 567 (2009).