Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2012, №4(110) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.983.22

# УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ (ЗА РОБОТАМИ НАУКОВОЇ ШКОЛИ Ю. І. ПЕТУНІНА)

Д. А. Номіровський

Резюме. В статті описано історію результатів, отриманих науковою школою Ю. І. Петуніна в галузі узагальненого розв'язання операторних рівнянь: задачі, що приводять до поняття узагальненого розв'язку, концепція узагальненого розв'язку, загальна схема побудови та приклади, що встановлюють зв'язок узагальненого розв'язку з класичними означеннями розв'язку.

## 1. Задачі, що приводять до поняття узагальненого розв'язку операторного рівняння

Нехай $\mathcal{L}\colon E \to F$ — ін'єктивний оператор, що діє з множини $E$ в множину $F$. Розглянемо рівняння $\mathcal{L}u = f$, де $u \in E$, $f \in F$. Зрозуміло, що розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$ буде існувати, лише коли права частина $f$ належить області значень $R(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$. З умови ін'єктивності оператора $\mathcal{L}$ випливає єдиність розв'язку рівняння $\mathcal{L}u = f$. Зауважимо, що випадок, коли оператор $\mathcal{L}$ не має оберненого, шляхом факторизації простору $E$, теоретично, можна звести до випадку ін'єктивного оператора.

Проблема побудови узагальнених розв'язків операторних рівнянь пов'язана, насамперед, із задачею введення "природного" поняття узагальненого розв'язку рівняння $\mathcal{L}u = f$ для всіх $f \in F$, зокрема, для правих частин $f \in F \setminus R(\mathcal{L})$.

Необхідність розв'язання цієї проблеми часто обумовлюється надзвичайною складністю опису функціонального набору множини $R(\mathcal{L})$ навіть для найпростіших операторів $\mathcal{L}$, а отже, надмірною складністю критеріїв розв'язності рівняння $\mathcal{L}u = f$, чи, взагалі, відсутністю таких критеріїв. Наприклад, вже у найпростішому випадку — при дослідженні класичної розв'язності звичайного диференціального рівняння $u'(t) = f(t)$ при $0 < t < 1$ з умовою $u(0) = 0$ — виникає проблема встановлення збіжності інтегралу (можливо невласного)

$$\int_0^1 f(t)\,dt.$$

Проте ефективних критеріїв збіжності невласних інтегралів не існує.

Іншим прикладом необхідності введення узагальнених розв'язків може бути задача керування системою, що допускає зовнішні впливи сингулярного характеру

$$\mathcal{L}u = f(h), \tag{1}$$
$$J(h) = \Phi(u(h), h) \underset{h}{\to} \min, \qquad h \in U, \tag{2}$$

де $h$ — керування із допустимої множини $U$, $\mathcal{L} : E \to F$ — деякий оператор, що описує функціонування системи, $J$ — функціонал якості.

Для коректного визначення задачі необхідно гарантувати розв'язність рівняння (1) для кожного допустимого керування $h \in U$, тобто потрібно забезпечити включення $f(U) \subset R(\mathcal{L})$. Але опис області значень відображень $f$ і $\mathcal{L}$, як було зазначено вище, є дуже складною задачею, тому перевірити умову $f(U) \subset R(\mathcal{L})$ буває вкрай важко. Крім цього, часто це включення взагалі не має місця, хоча фізична інтерпретація рівняння є природною, важливою для застосувань і потребує аналізу.

Таким чином, виникає проблема побудови теорії узагальненої розв'язності рівняння (1) для довільного $f$ із множини $f(U)$, а краще навіть для всіх $f \in F$. Тоді рівняння (1) буде мати розв'язок $u(h)$ (в узагальненому сенсі) для довільного керування $h \in U$, і саме цей узагальнений розв'язок буде виступати аргументом функціоналу $\Phi$ в оптимізаційній задачі (2). Також зрозуміло, що для доведення будь-яких змістовних тверджень відносно задачі мінімізації (2) необхідно знати характерні риси узагальнених розв'язків рівняння (1).

Додатковим аргументом за розгляд узагальненої постановки оптимізаційної задачі (1), (2) є те, що система може знаходитися під зовнішніми впливами сингулярного характеру (відображення $f$). Сингулярність керуючого відображення $f$ означає, що значеннями $f(h)$ є елементи з простору узагальнених функцій (саме так можна адекватно описувати важливі задачі імпульсного, точкового, імпульсно-точкового, рухомого керування та інші). Природна ж множина значень оператора $\mathcal{L}$ традиційно не містить узагальнених функцій. Отже, ми знов приходимо до необхідності розробки теорії узагальненої розв'язності рівняння (1).

Особливо важливою проблема побудови узагальнених розв'язків стає у випадку лінійного оператора $\mathcal{L}$ (часто диференціального чи інтегрального), що діє в лінійних топологічних просторах, зокрема, нормованих або гільбертових. У таких випадках вимога введення "природного" узагальнення означає збереження основних властивостей оператора $\mathcal{L}$ (лінійність, неперервність, ін'єктивність тощо) при його розширенні на клас узагальнених розв'язків, що суттєво відрізняє запропоновану проблему від різноманітних означень наближених розв'язків, псевдорозв'язків, квазірозв'язків тощо [1, 2].

Для лінійних диференціальних та інтегральних операторів описані задачі є досить типовими і досліджуються вже давно. Наприклад, введення до розгляду узагальненої похідної С.Л. Соболєва розв'язує цю проблему для класичного оператора диференціювання $\frac{d}{dt} : C^1([0,1]) \to L_2(0,1)$. Для різних типів рівнянь математичної фізики теореми узагальненої розв'язності (у просторі $L_2$ та інших) досліджувалися в багатьох роботах, наприклад, в [3, 4]. Для некласичних рівнянь математичної фізики питання узагальненої розв'язності розглядалися, наприклад, в роботах [5, 6]. Слід зауважити, що у вказаних роботах для побудови теорії узагальненої розв'язності рівнянь головним інструментом виступали апріорні нерівності, зокрема, апріорні нерівності в негативних нормах, при цьому узагальнений розв'язок належав деяким гільбертовим просторам (типу соболєвських).

Для лінійних інтегральних операторів проблема побудови узагальненого розв'язку пов'язана, насамперед, з операторами Фредгольма та Вольтерра першого роду. У якості прикладів ситуацій, що вимагають введення узагальнених розв'язків, для рівняння Фредгольма наведемо задачу пошуку найкращих лінійних оцінок математичного сподівання випадкових процесів [7], а для рівняння Вольтерра — задачу Віксела [8].

Ю.І. Петунін надавав особливого значення розробці теорії узагальнених розв'язків операторних рівнянь, а також подібній теорії узагальнених екстремальних елементів. Більш того, був переконаний, що ця теорія є істотною частиною двадцятої проблеми Гільберта [9, 10]. Справді, у доповіді Гільберта на міжнародному математичному конгресі 1900 року є і такі слова: "чи не має розв'язок кожна регулярна варіаційна задача, якщо тільки на граничні умови накласти певні припущення, наприклад, неперервність або кускову диференційовність до певного порядку функцій, що визначають умови на межі, і якщо, за потреби, самому розв'язку надати узагальнене тлумачення." [11, 12]. Як би там не було, Д. Гільберт ставить питання про природне розширення класичного поняття розв'язку, яке споріднене з задачами щодо узагальненого розв'язку операторних рівнянь.

## 2. Узагальнений розв'язок операторного рівняння із замкненим оператором

У роботах Ю.І. Петуніна [13, 14] вперше введено конструкцію узагальненого розв'язку операторного рівняння в банаховому просторі для випадку замкненого оператора $\mathcal{L} \colon E \to F$ у загальному випадку. При такому підході узагальнений розв'язок є елементом певного локально опуклого лінійного топологічного простору навіть у випадку, коли простори $E$ та $F$ є нормованими.

Нехай $E, F$ — банахові простори і $\mathcal{L}$ — замкнений, лінійний, ін'єктивний оператор, що діє з простору $E$ в простір $F$. Припускається, що область визначення $D(\mathcal{L})$ і область значень $R(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ є всюди щільними множинами в просторах $E$ та $F$ відповідно. Поряд з рівнянням $\mathcal{L}u = f$ будемо розглядати спряжене рівняння

$$\mathcal{L}^*\varphi = l, \tag{3}$$

де $\mathcal{L}^* \colon F^* \to E^*$ — спряжений оператор.

Крім зазначеного вище, припускається, що множина $D(\mathcal{L}^*)$ є тотальною в $F^*$, а множина $R(\mathcal{L}^*)$ є тотальною в $E^*$ відносно двоїстості $(F^*, F)$ і двоїстості $(E^*, E)$ відповідно.

Позначимо через $\bar{E}$ поповнення простору $E$ за топологією $\sigma(E, R(\mathcal{L}^*))$. Оскільки множини $E$ і $R(\mathcal{L}^*)$ знаходяться у двоїстості, то $\bar{E}$ буде локально опуклим лінійним топологічним простором.

Розглянемо довільний лінійний функціонал $\varphi \in D(\mathcal{L}^*)$. Тоді з рівності $\mathcal{L}u = f$ випливає, що

$$\varphi(\mathcal{L}u) = \varphi(f),$$

тобто, якщо позначити функціонал $\mathcal{L}^*\varphi$ через $l$, то

$$l(u) = \mathcal{L}^*\varphi(u) = \varphi(f).$$

Зважаючи на теорему С. Банаха про слабко неперервний лінійний функціонал, функціонал $l = \mathcal{L}^*\varphi$ допускає єдине неперервне розширення на весь простір $\bar{E}$. Розширення функціоналу $l \in R(\mathcal{L}^*)$ позначатимемо $\bar{l}$.

**Означення 1.** Узагальненим розв'язком рівняння $\mathcal{L}u = f$ будемо називати такий елемент $u \in \bar{E}$, який задовольняє співвідношення

$$\bar{l}(u) = \varphi(f), \qquad \forall \varphi \in D(\mathcal{L}^*).$$

Зрозуміло, що таке $u \in \bar{E}$ є природним узагальненням класичного слабкого розв'язку диференціального рівняння.

**Означення 2.** Узагальненим розв'язком рівняння $\mathcal{L}u = f$ будемо називати такий елемент $u \in \bar{E}$, для якого існує послідовність $u_n \in E$ (яку за Ю.І. Петуніним називають майже розв'язком), що задовольняє співвідношення

$$u_n \to u \ \text{ в топології } \bar{E}, \qquad \|\mathcal{L}u_n - f\|_F \to 0, \qquad n \to \infty.$$

В роботах [13, 14] доведено таку теорему.

**Теорема 1.** *Для будь-якої правої частини $f \in F$ існує і єдиний узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$ у сенсі означень 1 і 2.*

У якості можливого застосування побудованої конструкції в роботах [13, 14] з'ясовано питання про існування узагальненого розв'язку для випадку нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (оператора Гільберта-Шмідта, матриця із розрідженими рядками). Доведено, що узагальнений розв'язок обов'язково належить метричному простору $s$ із стандартною метрикою.

## 3. Загальна схема побудови узагальненого розв'язку

В роботах [9, 10, 15] концепція узагальненого розв'язку Ю.І. Петуніна отримала розвиток.

Нехай $E, F$ — лінійні простори, $E', F'$ — відповідні алгебраїчно спряжені простори. Нехай $E^*, F^*$ — такі лінійні простори, що $(E, E^*)$, $(F, F^*)$ утворюють дуальні пари. Зрозуміло, що $E^* \subset E'$, $F^* \subset F'$.

Розглянемо лінійний, ін'єктивний оператор $\mathcal{L} : E \to F$, визначений на всьому просторі $E$, і алгебраїчно спряжений оператор $\mathcal{L}' : F' \to E'$.

Припустимо, що оператор $\mathcal{L}$ є слабко неперервним (тобто неперервним у слабких топологіях $\sigma(E, E^*)$, $\sigma(F, F^*)$). За цих умов звуження оператора $\mathcal{L}'$ на простір $F^*$ буде задавати оператор $\mathcal{L}^* : F^* \to E^* \subset E'$, де $\varphi \in D(\mathcal{L}^*) = F^*$. Крім цього, припускаємо, що область значень $R(\mathcal{L}) \subset F$ оператора $\mathcal{L}$ є тотальною множиною у двоїстості $(F, F^*)$.

Введемо поняття узагальненого розв'язку для лінійного рівняння

$$\mathcal{L}u = f. \tag{4}$$

Розглянемо $\mathcal{U} = \{\alpha\}$ — сукупність непорожніх центрально симетричних підмножин простору $F^*$, що задовольняють умови:

1. Об'єднання довільних двох множин з $\mathcal{U}$ міститься у деякій множині з $\mathcal{U}$.
2. Добуток довільної множини $\alpha \in \mathcal{U}$ на довільне дійсне $\lambda > 0$ є множина з $\mathcal{U}$.
3. Кожна множина $\alpha$ з $\mathcal{U}$ обмежена в $F^*$ у сенсі топології $\sigma(F^*, R(\mathcal{L}))$.
4. Множина $\mathbf{N} = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{U}} \alpha$ є тотальною у двоїстості $(F^*, R(\mathcal{L}))$.

Тоді кожна з множин $\mathcal{L}^*(\alpha)$ обмежена в просторі $E^*$ відносно топології $\sigma(E^*, E)$. Крім цього, $\mathbf{M} = \mathcal{L}^*(\mathbf{N})$ — тотальна множина в двоїстості $(E^*, E)$.

На лінійній множині $E$ розглянемо топологію $\mathcal{T}_E$ рівномірної збіжності, яка задається системою околів нуля

$$o_\alpha = \{u \in E \mid |(\mathcal{L}^*\varphi)(u)| \leqslant 1, \varphi \in \alpha\}, \qquad \alpha \in \mathcal{U}.$$

Множину $E$ з цією топологією будемо позначати $E_\mathcal{T}$. Тоді $E_\mathcal{T}$ утворює віддільний локально опуклий лінійний топологічний простір. Позначимо через $\bar{E}_\mathcal{T}$ поповнення $E_\mathcal{T}$ за топологією $\mathcal{T}_E$ (точніше, за відповідною рівномірною структурою).

Аналогічно на множині $R(\mathcal{L})$ розглянемо топологію $\mathcal{T}_F$, яка задається системою околів нуля

$$O_\alpha = \{f \in R(\mathcal{L}) \mid |\varphi(f)| \leqslant 1, \varphi \in \alpha\}, \qquad \alpha \in \mathcal{U}.$$

Множина $R(\mathcal{L})$ з цією топологією (позначаємо $R_\mathcal{T}$) перетворюється у віддільний локально опуклий лінійний топологічний простір. Через $\bar{R}_\mathcal{T}$ позначимо поповнення $R_\mathcal{T}$.

Зрозуміло, що оператор $\mathcal{L}$ здійснює ізоморфізм між $E_\mathcal{T}$ і $R_\mathcal{T}$ (тобто ізоморфізм між лінійними локально опуклими топологічними просторами). Отже, оператор $\mathcal{L} : E_\mathcal{T} \to R_\mathcal{T}$ є неперервним.

Розширимо оператор $\mathcal{L}$ на весь простір $\bar{E}_\mathcal{T}$ таким чином. Нехай $\mathcal{E}$ — мінімальний фільтр Коші простору $E_\mathcal{T}$. Зважаючи на згаданий вище ізоморфізм, $\mathcal{F} = \mathcal{L}(\mathcal{E})$ — мінімальний фільтр Коші у просторі $R_\mathcal{T}$. Розширений таким чином оператор $\mathcal{L}$, який позначатимемо $\bar{\mathcal{L}}$, є лінійним неперервним ін'єктивним оператором, що встановлює ізоморфізм між просторами $\bar{E}_\mathcal{T}$ та $\bar{R}_\mathcal{T}$.

Якщо додатково вимагати виконання умови:

5. Кожна з множин $\alpha \in \mathcal{U}$ обмежена у просторі $F^*$ відносно топології $\sigma(F^*, F)$ і $\mathbf{N}$ — тотальна підмножина $F^*$ у двоїстості $(F^*, F)$,

то топологія $\mathcal{T}_F$ природним чином продовжується на весь простір $F$, і тоді є сенс порівнювати елементи з $F$ та $\bar{R}_{\mathcal{T}}$. Збережемо за цією топологією (яка визначена вже на всьому лінійному просторі $F$) попереднє позначення $\mathcal{T}_F$. Простір $F$ з топологією $\mathcal{T}_F$ будемо позначати $F_{\mathcal{T}}$, а відповідне поповнення — $\bar{F}_{\mathcal{T}}$. Зрозуміло, що $\bar{R}_{\mathcal{T}}$ — замкнена лінійна підмножина в $\bar{F}_{\mathcal{T}}$ (яка, можливо, збігається з $\bar{F}_{\mathcal{T}}$).

**Означення 3.** Узагальненим розв'язком рівняння $\mathcal{L}u = f$ будемо називати такий елемент $u \in \bar{E}_{\mathcal{T}}$, що $\bar{\mathcal{L}}u = f$.

Таке означення узагальненого розв'язку узгоджується з поняттям класичного розв'язку. Класичний розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$ є і узагальненим розв'язком. Якщо $u$ — узагальнений розв'язок і $f \in R(\mathcal{L})$ (або $u \in E$), то $u$ — класичний розв'язок.

Має місце

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови 1.-5., тоді для довільного елемента $f \in F \cap \bar{R}_{\mathcal{T}}$ існує єдиний узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$ у сенсі означення 3.*

Відзначимо, що довільний функціонал $l \in \mathbf{M}$ допускає продовження за неперервністю на весь простір $\bar{E}_{\mathcal{T}}$. Розширення $l$ на $\bar{E}_{\mathcal{T}}$ будемо позначати $\bar{l}$, а множину всіх розширених функціоналів $\bar{l}$, де $l \in \mathbf{M}$, через $[\mathbf{M}]$. Отже, $\mathbf{M} \subset (E_{\mathcal{T}})^*$, $[\mathbf{M}] \subset (\bar{E}_{\mathcal{T}})^*$, де $(E_{\mathcal{T}})^*, (\bar{E}_{\mathcal{T}})^*$ — простори, спряжені до $E_{\mathcal{T}}, \bar{E}_{\mathcal{T}}$ відповідно. Аналогічно, функціонали $\varphi \in \mathbf{N}$ допускають розширення на $\bar{F}_{\mathcal{T}}$, тобто $\mathbf{N} \subset (F_{\mathcal{T}})^*$. Розширені функціонали позначимо $\bar{\varphi}$, а множину всіх розширених функціоналів — $[\mathbf{N}]$.

**Означення 4.** Узагальненим розв'язком рівняння $\mathcal{L}u = f$ будемо називати такий елемент $u \in \bar{E}_{\mathcal{T}}$, що для всіх $l \in \mathbf{M}$ виконується рівність

$$\bar{l}(u) = \bar{\varphi}(f), \qquad \mathcal{L}^*\varphi = l.$$

**Теорема 3.** *Нехай сукупність множин $\mathcal{U}$ задовольняє умови 1.-5. Тоді для довільної правої частини $f \in F \cap \bar{R}_{\mathcal{T}}$ існує узагальнений розв'язок $u \in \bar{E}_{\mathcal{T}}$ рівняння $\mathcal{L}u = f$ у сенсі означення 4.*

У роботах [9, 10, 16] досліджено питання єдиності узагальненого розв'язку.

**Лема 1.** *Узагальнений розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$ у сенсі означення 4 єдиний тоді і лише тоді, коли множина* $[\mathbf{M}]$ *є тотальною у двоїстості* $((\bar{E}_{\mathcal{T}})^*, \bar{E}_{\mathcal{T}})$.

Існує проста достатня умова, що гарантує тотальність множини $[\mathbf{M}]$. А саме, якщо $\mathcal{L}^*(\alpha)$ — компактні множини в $\mathbf{M} = \mathcal{L}^*(\mathbf{N})$ відносно топології $\sigma(\mathbf{M}, E)$ при кожному $\alpha \in \mathcal{U}$, то, зважаючи на теорему Маккі-Аренса, топологія $\mathcal{T}_E$ узгоджується з двоїстістю $(E, \mathbf{M})$. Це означає, що $(E_{\mathcal{T}})^* = \mathbf{M}$, звідки $(\bar{E}_{\mathcal{T}})^* = [\mathbf{M}]$. Отже, $[\mathbf{M}]$ — тотальна множина в двоїстості $((\bar{E}_{\mathcal{T}})^*, \bar{E}_{\mathcal{T}})$, тобто узагальнений розв'язок у сенсі означення 4 єдиний.

У задальному випадку єдиність розв'язку пов'язана з класичною умовою $\pi$).

**Теорема 4.** *Нехай для множини $E$ і топологій $\mathcal{T}_E$ та $\sigma(E, \mathbf{M})$ виконується умова $\pi$). Тоді узагальнений розв'язок единий.*

## 4. Приклади узагальнених розв'язків

У застосуваннях узагальнених розв'язків важливо знати зв'язок топологій просторів $\bar{E}_{\mathcal{T}}$ та $\bar{F}_{\mathcal{T}}$ з природними топологіями просторів $E$ та $F$. Розглянемо найбільш типові ситуації та наведемо приклади конкретних структур $\mathcal{U}$, які призводять до топологічних просторів $\bar{E}_{\mathcal{T}}, \bar{F}_{\mathcal{T}}$.

Далі будемо вважати, що $E, F$ — банахові простори і $\mathcal{L}\colon E \to F$ — ін'єктивний лінійний неперервний оператор (як відомо, такий оператор слабко неперервний), $D(\mathcal{L}) = E$, $R(\mathcal{L})$ — щільна в $F$ множина, $E^*$ та $F^*$ — спряжені простори.

**1. Класична розв'язність.**

Нехай множина $R(\mathcal{L}^*)$ має ненульову характеристику [17]. Покладемо

$$\mathcal{U} = \{\alpha_\lambda \,|\, \alpha_\lambda = (\mathcal{L}^*)^{-1}(S_\lambda(E^*) \cap R(\mathcal{L}^*)), \lambda \in \mathbb{R}_+\},$$

де $S_\lambda(E^*)$ — замкнена куля радіуса $\lambda$ простору $E^*$ з центром в початку координат. Тоді топологія $\mathcal{T}_E$ визначається системою напівнорм

$$p_\lambda(u) = \sup_{l \in S_\lambda(E^*) \cap R(\mathcal{L}^*)} |l(u)| = \sup_{l \in \overline{S_\lambda(E^*) \cap R(\mathcal{L}^*)}} |l(u)|, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

де $\overline{S_\lambda(E^*) \cap R(\mathcal{L}^*)}$ — замикання множини $S_\lambda(E^*) \cap R(\mathcal{L}^*)$ в топології $\sigma(E^*, E)$.

Оскільки множина $R(\mathcal{L}^*)$ тотальна у двоїстості $(E^*, E)$, то вона є щільною в $E^*$ в слабкій топології $\sigma(E^*, E)$, а оскільки $R(\mathcal{L}^*)$ має ненульову характеристику, то $\overline{S_\lambda(E^*) \cap R(\mathcal{L}^*)}$ містить деяку кулю $S_{t\lambda}(E^*)$ меншого радіуса $(0 < t < 1)$. Тоді

$$\sup_{l \in S_{t\lambda}(E^*)} |l(u)| \leqslant p_\lambda(u) \leqslant \sup_{l \in S_\lambda(E^*)} |l(u)|.$$

Зважаючи на теорему Хана-Банаха, маємо, що топологія $\mathcal{T}_E$ еквівалентна нормі $\|u\|_E$, а простір $\bar{E}_{\mathcal{T}}$ збігається з банаховим простором $E$. Оскільки оператор $\mathcal{L}$ здійснює ізоморфізм між $E_{\mathcal{T}}$ та $R_{\mathcal{T}}$, а простір $E_{\mathcal{T}} = E$ повний, то $R_{\mathcal{T}}$ також повний, тобто $\bar{R}_{\mathcal{T}} = R(\mathcal{L})$.

Отже, при такому виборі структури $\mathcal{U}$ узагальнена розв'язність збігається з класичною. Таким чином, класична розв'язність лінійних операторних рівнянь описується в термінах структури $\mathcal{U}$.

**2. Узагальнена сильна розв'язність.**

Нехай $\mathcal{U} = \{\alpha \mid \alpha = S_\lambda(F^*), \lambda \in \mathbb{R}\}$. Тоді з теореми Хана-Банаха випливає, що топологія $\mathcal{T}_E$ задається нормою

$$\|u\|_1 = \sup_{l \in \mathcal{L}^*(S_1(F^*))} |l(u)| = \sup_{\varphi \in S_1(F^*)} |\varphi(\mathcal{L}u)| = \sup_{\varphi \in F^*} \frac{|\varphi(\mathcal{L}u)|}{\|\varphi\|_{F^*}} = \|\mathcal{L}u\|_F,$$

а топологія $\mathcal{T}_F$ — нормою $\|f\|_F$. Отже, $\bar{E}_{\mathcal{T}}$ — поповнення $E$ за нормою $\|u\|_1 = \|\mathcal{L}u\|_F$. Простір $F = \bar{F}_{\mathcal{T}}$ є повним та $\bar{R}_{\mathcal{T}} = F$.

**3. Узагальнена слабка розв'язність.** Нехай $\mathcal{U} = \{\alpha\}$ — сукупність множин, яка складається з усіх скінченних центрально симетричних підмножин $F^*$. Тоді топологія $\mathcal{T}_E$ задається системою околів нуля

$$o_\alpha = \{u \in E \mid |(\mathcal{L}^*\varphi_i)(u)| \leqslant 1\}, \qquad \alpha = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \subset F^*.$$

Отже, в даній ситуації топологія $\mathcal{T}_E$ збігається з топологією $\sigma(E, R(\mathcal{L}^*))$, тому простір $\bar{E}_\mathcal{T}$ збігається з простором $\bar{E}$ роботи [13], а означення 4 відповідає означенню слабкого розв'язку.

**4. Апріорні нерівності** Нехай $M$ — довільна врівноважена опукла обмежена в $F^*$ (за нормою) множина, яка є тотальною у двоїстості $(F^*, F)$. Якщо $\mathcal{U} = \{\lambda M \mid \lambda \in \mathbb{R}_+\}$, топологія $\mathcal{T}_E$ задається нормою

$$\|u\|_M = \sup_{l \in \mathcal{L}^*(M)} |l(u)|,$$

для якої має місце оцінка

$$\|u\|_M = \sup_{\varphi \in M} |(\mathcal{L}^*\varphi)(u)| \leqslant \sup_{\varphi \in S_c(F^*)} |\varphi(\mathcal{L}u)| = c\|\mathcal{L}u\|_F.$$

Оцінки такого типу називають апріорними. Вони є основою надзвичайно поширеного методу якісного дослідження операторних рівнянь.

## Висновки

У більшості цитованих робіт школи Ю. І. Петуніна доведення основної теореми про існування узагальненого розв'язку базується на класичній ідеї С. Г. Крейна дослідження зв'язків між розв'язністю прямого рівняння та спряженого рівняння. Отже, концепцію узагальненого розв'язку операторного рівняння Ю. І. Петуніна можна розглядати як певне розвинення класичних результатів С. Г. Крейна [18].

Водночас, теорія узагальнених розв'язків Ю. І. Петуніна не обмежується лише ідеями, описаними в даній статті. Так, у роботі [19] введено поняття і досліджено властивості узагальненого розв'язку для операторів, що діють у метричних просторах. Зв'язок між запропонованим підходом до узагальнених розв'язків і послабленими апріорними оцінками було розвинуто в роботі [20]. У статтях [21, 22, 23] досліджено властивості узагальнених екстремальних елементів. Подальше розвинення абстрактної теорії узагальнених розв'язків операторних рівнянь проведено в роботі [24]. Більшість цих результатів було підсумовано у монографіях [9, 10].

## Література


1. Лаврентьев М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский — М.: Наука, 1980. — 285 с.
2. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин — М.: Наука, 1974. — 224 с.
3. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский — К.: Наукова думка, 1965. — 800 с.
4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская — М.: Наука, 1973. — 408 с.

5. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами / С. И. Ляшко — К.: Наукова думка, 1998. — 472 с.
6. Lyashko S. I. Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters / S. I. Lyashko — Boston / Dordrecht / London: Kluwer Academic Publishers, 2002. — 466 p.
7. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы / У. Гренандер — М.: Ин. Лит., 1961. — 167 с.
8. Mair B. A. Some Comments on Wicksell's Problem / B. A. Mair, F. H. Ruymgaart, T. Urrabazo // Journal of Statistical Planning and Inference. — 2000. — V. 87. — P. 31–42.
9. Ляшко С. И. Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений / С. И. Ляшко, Д. А. Номировский, Ю. И. Петунин, В. В. Семенов — М.: ООО . Д. Вильямс, 2009. — 192 с.
10. Klyushin D. A. Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements / D. A. Klyusin, S. I. Lyashko, D. A. Nomirovskii, Yu. I. Petunin, V. V. Semenov — New York / Dordrecht / London: Springer, 2012. — 202 p.
11. Проблемы Гильберта / Под ред. П. С. Александрова — М.: Мир, 1996. — 352 с.
12. Hilbert D. Mathematical problems / D. Hilbert // Bulletin of Amer. Math. Soc. — 1902. — V. 8. — P. 437–479.
13. Петунин Ю. И. Об одной концепции обобщенного решения операторных уравнений в банаховом пространстве / Ю. И. Петунин // Український математичний журнал. — 1996. — Т. 48, № 9. — С. 1286–1290.
14. Петунин Ю. И. Новая концепция обобщенного решения операторных уравнений в банаховом пространстве / Ю. И. Петунин, М. Ю. Савкина // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 1997. — № 1 (81). — С. 93–99.
15. Номировский Д. А. Об обобщенной разрешимости линейных систем / Д. А. Номировский // Доповіді НАН України. — 2004. — № 10. — С. 26–33.
16. Номіровський Д. А. До питання єдиності узагальнених розв'язків операторних рівнянь / Д. А. Номіровський // Вісник Київського університету. Сер.фіз.-мат. науки. — 2004. — № 4. — С. 223–227.
17. Петунин Ю. И. Теория характеристик подпространств и её приложения / Ю. И. Петунин, А. Н. Пличко — К.: Вища школа, 1980. — 216 с.
18. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн — М.: Наука, 1971. — 104 с.
19. Клюшин Д. А. Концепция обобщенного решения нелинейных операторных уравнений в метрических пространствах / Д. А. Клюшин, Ю. И. Петунин // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2002. — №1 (87). — С. 11–23.
20. Анікушин А. В. Узагальнені розв'язки для лінійних операторів з послабленими апріорними нерівностями / А. В. Анікушик, Д. А. Номіровський // Український математичний журнал. — 2010. — Т. 62, № 3. — С. 1011–1021.
21. Номировский Д. А. Обобщенные экстремальные элементы в банаховом пространстве / Д. А. Номировский, Ю. И. Петунин, М. Ю. Савкина // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2003. — В. 89. — С. 71–79.
22. Семенов В. В. Узагальнені екстремальні елементи опуклих функціоналів / В. В. Семенов // Вісник КНУ. Серія: фіз-мат. науки. — 2007. — № 3. — С. 189–193.

23. Рисай Є. М. $F^*$-розширення некоерцитивних екстремальних задач / Є. М. Рисай, В. В. Семенов // Вісник КНУ. Серія: фіз.-мат. науки. — 2009. — № 3. — С. 174–179.
24. Маліцький Ю. В. До теорії узагальнених розв'язків операторних рівнянь / Ю. В. Маліцький, В. В. Семенов // III Міжнародна конференція "Обчислювальна та прикладна математика" (присвячена пам'яті академіка НАНУ Івана Івановича Ляшка), Україна, Київ, 11–12 вересня 2009 року, Матеріали конференції, Київ, 2009. — С. 52.

Факультет кібернетики, Київський національный університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 29.11.12