Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №1(111) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.91, 681.511, 519.713

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ НЕЧІТКИХ ГІБРИДНИХ АВТОМАТІВ

О. С. Бичков

Резюме. В роботі розглянуто дослідження стійкості формалізму моделювання невизначеної динаміки, що базується на теорії можливості та гібридних автоматах. Застосування гібридних автоматів дозволяє моделювати складну динаміку за допомогою певної кількості простих систем. Використання для моделювання нечіткого аналога стохастичного рівняння Іто вирішує проблему відсутності статистичних данних та дозволяє досліджувати саме нечітку траекторію. Для отримання достатніх умов стійкості пропонується використовувати мультикомпонентні функції Ляпунова.

Вступ

Методи теорії можливостей дозволяють оцінити рівень істини певної події по відношенню до інших подій на основі суб'єктивних думок експертів. Ці методи корисні для дослідження невизначених процесів або явищ, у разі, коли недостатність статистичної інформації не дозволяє застосовувати імовірнісні методи. Розв'язання таких задач як прогнозування розвитку соціально-економічного явища, моделювання складної динаміки польоту, часто вимагає використання диференціальних рівнянь, які містять деяку невизначеність. У таких областях, статистичні данні ненадійні або відсутні, тому доцільно використовувати теоретико-можливосні підходи [1]–[3].

У цьому контексті широко розповсюджені нечіткs диференціальні рівняння, що базуються на теорії нечітких множин Заде [4]–[7]. Ці рівняння часто розглядаються або як звичайні диференціальні рівняння з нечіткими параметрами, або як рівняння, що призначені для опису еволюції функцій приналежності. Ці підходи є корисними в багатьох випадках, але мають деякі недоліки. Диференціальні рівняння з нечіткими параметрами не дозволяють описувати динаміку зміни невизначенності. Рівняння, що описують еволюцію функції приналежності, не дають якісної характеристики фазової траекторії. Тому виникають певні питання стосовно змісту поняття стійкості розв'язку. Для дослідження стійкості таких рівнянь використовують метод функцій Ляпунова [8]–[11]. У приведених статтях, в якості стійкості, автори розглядають динаміку відхилення функції приналежності від тотожньо нульової функції.

У цій статті ми пропонуємо дослідження стійкості іншого формалізму моделювання невизначеної динаміки, що базується на теорії можливості та гібридних автоматах [12]–[14]. Застосування гібридних автоматів дозволяє моделювати складну динаміку за допомогою певної кількості простих систем. Використання для моделювання нечіткого аналога стохастичного рівняння Іто вирішує проблему відсутності статистичних данних та дозволяє досліджувати саме нечітку траєкторію, а не ставлення до неї експертів. Для отримання достатніх умов стійкості пропонується використовувати мультикомпонентні функції Ляпунова [13]–[14].

Основний результат

Введемо такі позначення. Нехай $\|\cdot\|$ — евклідова норма в просторі $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\nabla_f V(y_0) = V'(y_0)f(y_0)$, якщо $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ і $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ або $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times l}$.

Будемо досліджувати стійкість стаціонарного стану [17] узагальненого нечіткого гібридного автомату з нечітким перемиканням (УНГАНП) [17]. Зафіксуємо деякий УНГАНП $GHA = (Q, Y, PS, Inv, Jump, Orb)$ і стаціонарний стан $y_* \in St(GHA)$ (в припущенні, що $St(GHA) \neq \emptyset$).

Означення 1. Стаціонарний стан $y_* \in St(GHA)$ називається стійким з рівнем $\bar{\alpha}$, де $\bar{\alpha} : (0, +\infty) \to [0, 1)$ — функція, визначена в околі нуля, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що для всіх фазових орбіт $\chi = (\tau, \bar{q}, \bar{y}, x) \in Orb$, де $\bar{y} = (y^i)_{i\in\langle\tau\rangle}$ і $\tau = (I_i)_{i\in\langle\tau\rangle}$, таких, що $y^0(\tau_0) \in \mathrm{B}(y_*, \delta)$ і $P\{x\} > \bar{\alpha}(\varepsilon)$, виконується умова $y^i(t) \in \mathrm{B}(y_*, \varepsilon)$ для всіх $i \in \langle\tau\rangle$ і $t \in I_i$.

Для кожної частково визначеної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ позначимо $Infinv(f)$ частково визначену функцію $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що задана умовами:

$g(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} | f(x) \leq y\}$, якщо $y \in \mathbb{R}$ і множина $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \leq y\}$ непорожня і обмежена зверху.

$g(y)$ не визначено в іншому випадку.

Визначимо $HL(HA, y_*)$ як множину кортежів $(\bar{\alpha}, (V_q)_{q\in Q}, (\nu_q)_{q\in Q})$, в яких:

$\bar{\alpha} : (0, +\infty) \to [0, 1)$ — функція, визначена в околі нуля.

$(V_q)_{q\in Q}$ — індексована сім'я неперервних частково визначених функцій з Y в $\mathbb{R}_+$.

$(\nu_q)_{q\in Q}$ — індексована сім'я частково визначених функцій $v_q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, і виконуються такі умови, де $\psi = Infinv(\bar{\alpha})$:

L1) $\{y_*\} \cup Inv(q) \subseteq \operatorname{dom} V_q$ для всіх $q \in Q$, і якщо $(q_2, y_2) \in Jump(q_1, y_1, x)$ для деяких $q_1, q_2 \in Q$, $y_1, y_2 \in Y$ і $x \in X_+$, то $y_1 \in \operatorname{dom} V_{q_1}$ і $y_2 \in \operatorname{dom} V_{q_2}$;

L2) існує число $\upsilon > 0$, таке, що $[0,\upsilon) \cup \mathrm{Range}\psi \subseteq \operatorname{dom} v_q$, $v_q(0) = 0$ і $v_q(w) > 0$ при $w \in \operatorname{dom} v_q \backslash \{0\}$;

L3) $V_q(y_*) = 0$ для всіх $q \in Q$;

L4) якщо $V_q(y) \leq \nu_q(w)$ для деяких $y \in \operatorname{dom} V_q$ і $w \in \operatorname{dom} v_q$, то $\rho(y_*, y) \leq w$;

L5) якщо $q \in Q$, $x \in X_+$, $P\{x\} \in \operatorname{dom}\psi$, $\chi = (\tau, \bar{q}, \bar{y}, x) \in Orb$, $i \in \langle\tau\rangle$, $\bar{q}(i) = q$ і для деякого (скінченного) інтервалу $(t_1, t_2) \subset [\tau_i, \tau_i')$

виконується нерівність $V_q(y^i(t)) > \nu_q(\psi(P\{x\}))$ при $t \in (t_1, t_2)$, то функція $t \mapsto V_q(y^i(t))$ не зростає на інтервалі (t_1, t_2).

Зауважимо, що функція $t \mapsto V_q(y^i(t))$ визначена на інтервалі (τ_i, τ_i'), оскільки $y^i(t) \in Inv(\bar{q}(i))$ при $t \in (\tau_i, \tau_i')$.

Зміст елементів кортежів $(\bar{\alpha}, (V_q)_{q\in Q}, (\nu_q)_{q\in Q}) \in HL(GHA, y_*)$ такий: функції $(V_q)_{q\in Q}$ грають роль функцій Ляпунова, визначених окремо для кожного дискретного стану автомата GHA і адаптованих для встановлення стійкості стаціонарного стану y_* з рівнем $\bar{\alpha}$; функція ν_q знаходить лінію рівня функції V_q, яка міститься у кулі заданого радіусу (з центром в точці y_*).

Введемо такі позначення для всіх $q_1, q_2 \in Q, u \in (0, 1]$:

$$J(q_1, q_2, u) = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y \mid \exists x \in X_u : (q_2, y_2) \in Jump(q_1, y_1, x)\};$$

$$E = \{(q_1, q_2) \in Q \times Q \mid \exists x \in X_+ \exists (y_1, y_2) \in Y \times Y : (q_2, y_2) \in Jump(q_1, y_1, x)\}.$$

Означення 2. Орієнтованим графом, який лежить в основі GHA називається пара (Q, E) і позначається як $Gr(GHA)$.

Означення 3. Множиною часткових дискретних фазових орбіт GHA називається множина $PDPO(GHA) = \{(\bar{q}(0), \bar{q}(1), ..., \bar{q}(k)) \mid \exists k \geq 1, \exists \tau, \bar{q}, \bar{y}, x : (\tau, \bar{q}, \bar{y}, x) \in Orb \wedge k \leq \langle \tau \rangle\}$.

Змістовно, це є множина непорожних скінченних послідовностей дискретних станів, які може проходити автомат на деякій фазовій орбіті.

Означення 4. Нечітким гібридним автоматом з нечітким перемиканням (НГАНП) називається кортеж $HA = (Q, Y, PS, g, w, h, Inv, Init, Jump)$, в якому:

Q — скінченна множина дискретних станів;
$Y = \mathbb{R}^d$ — множина неперервних станів;
$PS = (X, 2^X, P)$ — простір можливостей з нормованою мірою можливості;
$w : \mathbb{R} \times X_+ \to \mathbb{R}^l$ — процес нечіткого блукання (ПНБ) [12],[13] на просторі PS;
$g : Q \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $h : Q \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times l}$ — частково визначені функції, за допомогою яких задається неперервна поведінка автомату під час перебування в дискретному стані; будемо позначати $g_q = y \mapsto g(q, y)$ і $h_q = y \mapsto h(q, y)$;
$Inv : Q \to Y \backslash \{\emptyset\}$ — відображення, яке задає множину незмінності дискретного стану;
$Init \subseteq Q \times Y$ — множина початкових станів;
$Jump : Q \times Y \times X \to 2^{Q\times Y}$ — відображення, яке задає умову переходу між дискретними станами;

і виконується умова $Inv(q) \subseteq Domg_q \cap Domh_q$ для всіх $q \in Q$.

Означення 5. Фазовою орбітою яка допускається НГАНП HA називається кортеж $\chi = (\tau, \bar{q}, \bar{y}, x)$, в якому $x \in X_+$, $\tau = (I_i)_{i=0}^N \in$ HT, $\bar{q} : \langle \tau \rangle \to Q$ —

відображення і $\bar{y} = (y^i)_{i\in\langle\tau\rangle}$ — індексована сім'я неперервних відображень $y^i : I_i \to Y$, таких, що:

1) $y^i(t) \in Inv(\bar{q}(i))$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau_i')$, якщо $i \in \langle\tau\rangle$ і крім того, $y^i(\tau_i') \in Inv(\bar{q}(i))$, якщо $i = N(\tau)$ і $\tau_i' \in U(\tau)$;

2) $(\bar{q}(i+1), y^{i+1}(\tau_{i+1})) \in Jump(\bar{q}(i), y^i(\tau_i'), x)$ для всіх $i \in \langle\tau\rangle \setminus \{N(\tau)\}$;

3) функція y^i локально абсолютно неперервна на I_i і задовольняє диференціальне рівняння за процесом нечіткого блукання [12],[13]

$$\dot{y}^i(t) = g(\bar{q}(i), y^i(t)) + h(\bar{q}(i), y^i(t))\dot{w}(t, x)$$

для майже всіх $t \in I_i$;

4) $(q(0), y^0(0)) \in Init$.

Зауважимо, що в пункті 3, функції $t' \mapsto g_{\bar{q}(i)}(y^i(t'))$ і $t' \mapsto h_{\bar{q}(i)}(y^i(t'))$ є визначеними на $I_i \backslash \{\tau_i'\}$, оскільки $y^i(t) \in Inv(\bar{q}(i))$ для всіх $t \in [\tau_i, \tau_i')$ за пунктом 1.

Позначимо: $Orb(HA)$ — множина фазових орбіт автомату HA, φ_w — функція розподілу процесу нечіткого блукання w, а Ξ — його коваріаційна матриця [12],[13], тобто додатно-визначена матриця, така, що перехідна можливість ПНБ має вигляд $P\{w(t) = y \,|\, w(t_0) = y_0\} = \varphi(\frac{||\Xi^{-1/2}(y-y_0)||^2}{(t-t_0)^2})$. Нехай λ_m — найменше власне число матриці $\Xi^{-1/2}$.

Поставимо у відповідність автомату HA автомат УНГАНП

$$GHA = (Q,\ Y, PS, Inv, Jump, Orb(HA)),$$

де Y — простір $(\mathbb{R}^d, \rho)$ з метрикою $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Зауважимо, що множина $Orb(HA)$ задовольняє умови означення множини фазових орбіт УНГАНП в силу умов означення фазової орбіти НГАНП, тому GHA дійсно є УНГАНП.

Автомат GHA є абстракцією автомату HA, тому визначені для нього поняття стаціонарного стану і стійкості з рівнем можна перенести на HA.

Означення 6. Стаціонарним станом НГАНП HA називається стаціонарний стан відповідного УНГАНП GHA.

Будемо позначати $St(HA)$ — множина стаціонарних станів HA.

Означення 7. Стаціонарний стан $y_* \in St(HA)$ називається стійким з рівнем $\bar{\alpha}$, де $\bar{\alpha} : (0, +\infty) \to [0, 1)$ — функція, визначена в околі нуля, якщо y_* є стійким з рівнем $\bar{\alpha}$ стаціонарним станом GHA.

Означення 8. Орієнтованим графом, що лежить в основі HA (позначається $Gr(HA)$) називається орієнтований граф, який лежить в основі GHA.

Розглянемо фіксований НГАНП $HA = (Q, Y, PS, g, w, h, Inv, Init, Jump)$ і відповідний йому УНГАПН GHA.

Позначимо $DF(\mathbb{R}^d)$ — клас усіх частково визначених неперервних функцій $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, які є неперервно диференційовними на внутрішності своєї області визначеності.

Визначимо $HLo(HA, y_*)$ (конкретизація $HL(GHA, y_*)$ для НГАНП) як множину кортежів $(\bar{\alpha}, (V_q)_{q\in Q}, (\nu_q)_{q\in Q})$, в яких:

$\bar{\alpha} : (0, +\infty) \to [0, 1)$ — функція, визначена в околі нуля;
$(V_q)_{q\in Q}$ — індексована сім'я функцій класу $DF(\mathbb{R}^d)$;
$(\nu_q)_{q\in Q}$ — індексована сім'я визначених функцій $v_q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, визначених *в околі нуля (включаючи нуль)*, і виконуються умови, в яких $\psi = Infinv(\bar{\alpha})$:

Lo1) $\{y_*\} \cup O_q \subseteq DomV_q$ для всіх $q \in Q$, де O_q — деяка відкрита на множені $Inv(q)$, і якщо $(q_2, y_2) \in Jump(q_1, y_1, x)$ для деяких $q_1, q_2 \in Q$, $y_1, y_2 \in Y$ і $x \in X_+$, то $y_1 \in DomV_{q_1}$ і $y_2 \in DomV_{q_2}$;

Lo2) $v_q(0) = 0$ і $v_q(w) > 0$ для всіх $w \in Domv_q \backslash \{0\}$;

Lo3) $V_q(y_*) = 0$ для всіх $q \in Q$;

Lo4) якщо $V_q(y) \le \nu_q(w)$ для деяких $y \in DomV_q$ і $w \in Domv_q$, то $\|y_* - y\| \le w$;

Lo5) для всіх елементів $q \in Q$, $x \in X_+$ і $y \in Inv(q)$ таких, що $P\{x\} \in Dom\psi$ і $V_q(y_1) > \nu_q(\psi(P\{x\}))$ визначена, виконується

$$\nabla_{g_q} V_q(y) \le -\frac{1}{\lambda_m}\sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})}\left\|\nabla_{h_q} V_q(y)\right\|.$$

Зміст кортежів $(\bar{\alpha}, (V_q)_{q\in Q}, (\nu_q)_{q\in Q}) \in HLo(HA, y_*)$ аналогічний змісту кортежів з множини $HL(GHA, y_*)$: функції $(V_q)_{q\in Q}$ грають роль функцій Ляпунова, визначених окремо для кожного дискретного стану HA і адаптованих для встановлення стійкості стаціонарного стану y_* з рівнем $\bar{\alpha}$. Функція ν_q задає лінію рівня функції V_q, яка міститься у кулі заданого радіусу.

Зауважимо, що значення $\nabla_{g_q} V_q(y)$,$\nabla_{h_q} V_q(y)$ визначені для всіх $y \in Inv(q)$, оскільки виконується умова Lo1 і $Inv(q) \subseteq Domg_q \cap Domh_q$.

Лема 1. *Для кожного* $x \in X_+$ *нерівність* $\|\dot{w}(t, x)\| \le \frac{1}{\lambda_m}\sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})}$ *виконується для майже всіх* $t \in \mathbb{R}_+$.

Доведення. Для всіх $t_1 \ne t_2$ і $C > 0$ виконується

$$P\{||w(t_1, x) - w(t_2, x)|| \ge C|t_1 - t_2|\} =$$
$$= \sup\{P\{w(t_1, x) - w(t_2, x) = a\} \mid ||a|| \ge C|t_1 - t_2|\} =$$
$$= \sup\left\{\varphi_w\left(||\frac{\Xi^{-1/2}a||^2}{(t_1 - t_2)^2}\right)\right\} \le \varphi_w\left(\frac{\lambda_m^2 C^2 (t_1 - t_2)^2}{(t_1 - t_2)^2}\right) = \varphi_w(\lambda_m^2 C^2).$$

Внаслідок довільності $C > 0$, для кожного $x \in X_+$ маємо

$$||w(t_1, x) - w(t_2, x)|| \le \frac{1}{\lambda_m}\sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})}|t_1 - t_2|.$$

За результатом [18, Лема 3], для кожного $x \in X_+$, траєкторія $t \mapsto w(t, x)$ є майже скрізь диференційовною. Звідси для майже всіх $t \in \mathbb{R}_+$ виконується

$$\|\dot{w}(t, x)\| \le \frac{1}{\lambda_m}\sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})}.$$

□

Далі будемо використовувати термінологію теорії формальних мов. Введемо такі позначення:

- A^* — множина слів в алфавіті A (тобто скінченних послідовностей елементів множини A), або замикання Кліні формальної мови A;
- A^+ — множина непорожніх слів в алфавіті A, або обмежене замикання Кліні формальної мови A;
- $|p|$ — довжина слова p;
- p_1p_2 або $p_1.p_2$ — конкатенація слів p_1 і p_2;
- $p_1 \triangleleft p_2$ — p_1 є (можливо, порожнім) підсловом p_2;
- $beg(p)$ — перша літера слова p, якщо слово p не порожнє;
- $end(p)$ — остання літера p, якщо слово p не порожнє;
- $beg(L) = \{beg(p)|p \in L\}$, де $L \subseteq A^+$;
- $end(L) = \{end(p)|p \in L\}$, де $L \subseteq A^+$;
- $pref(p)$ — множина (непорожніх) префіксів слова p;
- $SwL(L) = \{p \mid \exists u \in L : p \triangleleft u\}$ — множина підслів усіх слів множини $L \subseteq A^+$;
- $SwL_k(L) = \{p \mid |p| = k \wedge \exists u \in L : p \triangleleft u\}$ — множина підслів довжини k усіх слів $L \subseteq A^+$;
- $PCl(L) = \bigcup\limits_{p \in L} \precsim (p)$ — префіксне замикання множини $L \subseteq A^+$ (без порожнього слова);
- $PrL(L) = \{L_1 \in \Delta = \Delta \backslash \{\emptyset\} \mid L_1 = PCl(L)\}$ — множина непорожніх префікно-замкнених підмножин множини $L \subseteq A^*$.

Для дослідження стійкості стаціонарних станів з рівнем $\bar{\alpha}$ будемо використовувати такий результат.

Теорема 1. [17] *(Про стійкість стаціонарних станів УНГАНП).*

Припустимо, що для УНГАНП GHA і стаціонарного стану y_* існує кортеж $HL = (\bar{\alpha}, (V_q)_{q \in Q}, (\nu_q)_{q \in Q}) \in HL(GHA, y_*)$. Нехай $\psi = Infinv(\bar{\alpha})$.

Нехай $v_{\max} > 0$ — число і

$$((S_D, \cdot, \leq_{SD}, \Theta_D, \leq_\Theta, \bullet, \prec_{SD}), W, \lambda) = aes'(GHA, HL, v_{\max}),$$

де $aes'(GHA, HL, v_{max})$ — асоційована розширена s'-структура [17].

Нехай $W_* \in PrL(W)$ — множина, така, що $PDPO(GHA) \subseteq W_*$, де $PDPO(GHA)$ — множина часткових дискретних фазових орбіт GHA.

Припустимо, що A_i, B_i, C_i, $i = 1, 2, .., m$ — скінченні підмножини Q^*, такі, що $W_* \subseteq \bigcup_{i=1}^m A_i B_i^* C_i$; $E_0 = SwL_2\left(\bigcup_{i=1}^m (A_iC_i \cup A_iB_iC_i)\right)$ та виконуються умови:

для кожної пари елементів $q_1, q_2 \in Q$, таких, що $q_1q_2 \in E_0$ існує число $\delta_{q_1q_2} > 0$ і відображення $\vartheta_{q_1q_2} : [0, \delta_{q_1q_2}] \to \mathbb{R}_+$ таке, що $\vartheta_{q_1q_2}(0+) = \vartheta_{q_1q_2}(0) = 0$ і для всіх елементів $u \in D$ і пар $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$ виконуються нерівності

(a) *$V_{q_2}(y_2) \leq v_{q_2}(\psi(u))$, якщо $V_{q_1}(y_1) \leq v_{q_1}(\psi(u))$,*

(b) *$V_{q_2}(y_2) \leq \vartheta_{q_1q_2}(V_{q_1}(y_1))$, якщо $V_{q_1}(y_1) \in [0, \delta_{q_1q_2}]$ і $V_{q_1}(y_1) > v_{q_1}(\psi(u))$;*

$\lambda(p.beg(p)) \leq_{SD} \lambda(beg(p))$ для всіх $p \in \bigcup_{i=1}^m B_i$, таких, що $p.beg(p) \in W$.

Тоді стаціонарний стан y_* стійкий з рівнем $\bar{\alpha}$.

Доведемо ряд допоміжних лем.

Лема 2. *Нехай $D \subseteq \mathbb{R}^d$ — відкрита множина, (t_1, t_2), де $t_1 < t_2$ — (скінченний) інтервал $\mathbb{R}$. Нехай $V : D \to \mathbb{R}$ — неперервно диференційовна функція і $\bar{y} : (t_1, t_2) \to D$ — локально абсолютно неперервна функція. Тоді функція $t \mapsto V(\bar{y}(t))$ локально абсолютно неперервна на (t_1, t_2).*

Доведення. Оберемо довільне $t_0 \in (t_1, t_2)$. Оскільки функція $\bar{y}$ *локально* абсолютно неперервна, то існує число $\gamma_1 > 0$, таке, що для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta_0(\varepsilon) > 0$, таке, що для кожної індексованої сім'ї інтервалів $\left((t_1^{(i)}, t_2^{(i)})\right)_{i \in N}$ в $\mathbb{R}$, такої, що $\sum_{i \geq 1} t_2^{(i)} - t_1^{(i)} < \delta_0(\varepsilon)$ і

$$\bigcup_{i \geq 1} (t_1^{(i)}, t_2^{(i)}) \subseteq (t_0 - \gamma_1, t_0 + \gamma_1),$$

виконується нерівність

$$\sum_{i \geq 1} \left\| \bar{y}(t_2^{(i)}) - \bar{y}(t_1^{(i)}) \right\| \leq \varepsilon.$$

Нехай $\bar{O}$ — замкнена куля $\mathbb{R}^d$ з центром в точці $\bar{y}(t_0)$, така, що $\bar{O} \subseteq D$. Покладемо $\gamma \in (0, \gamma_1)$ — число, таке, що $\bar{y}(t) \in \bar{O}$ для всіх $t \in (t_0 - \gamma, t_0 + \gamma)$ (яке існує в силу неперервності функції $\bar{y}$). Покладемо M — число, таке, що

$$M > \max_{y \in \bar{O}} \left\| \frac{dV(y)}{dy} \right\|.$$

Цей максимум визначений, оскільки функція V неперервно диференційовна.

Оберемо довільне число $\varepsilon > 0$ і покладемо $\delta = \delta_0(\varepsilon / M) > 0$ (де $\delta_0(\varepsilon)$ вказано вище). Нехай $\left((t_1^{(i)}, t_2^{(i)})\right)_{i \in N}$ — індексована сім'я інтервалів в $\mathbb{R}$, така, що $\sum_{i \geq 1} t_2^{(i)} - t_1^{(i)} < \delta$ і крім того,

$$\bigcup_{i \geq 1} (t_1^{(i)}, t_2^{(i)}) \subseteq (t_0 - \gamma, t_0 + \gamma).$$

Тоді для кожного $i \geq 1$ відрізок $[\bar{y}(t_1^{(i)}), \bar{y}(t_2^{(i)})]$ в $\mathbb{R}^d$ включається в $\bar{O}$, тому

$$\left| V(\bar{y}(t_2^{(i)})) - V(\bar{y}(t_1^{(i)})) \right| \leq \left\| \bar{y}(t_2^{(i)}) - \bar{y}(t_1^{(i)}) \right\| \max_{y \in [\bar{y}(t_1^{(i)}), \bar{y}(t_2^{(i)})]} \left\| \frac{dV(y)}{dy} \right\| <$$

$$< M \left\| \bar{y}(t_2^{(i)}) - \bar{y}(t_1^{(i)}) \right\|.$$

Тоді

$$\sum_{i \geq 1} \left| V(\bar{y}(t_2^{(i)})) - V(\bar{y}(t_1^{(i)})) \right| < M \sum_{i \geq 1} \left\| \bar{y}(t_2^{(i)}) - \bar{y}(t_1^{(i)}) \right\| \leq \varepsilon.$$

В силу довільності вибору $t_0 \in (t_1, t_2)$ і числа $\varepsilon > 0$, функція $t \mapsto V(\bar{y}(t))$ є локально абсолютно неперервною на (t_1, t_2).

Лему доведено. $\square$

Лема 3. *$HLo(HA, y_*) \subseteq HL(GHA, y_*)$ для кожної точки $y_* \in St(HA)$.*

Доведення. Нехай $HL = (\bar{\alpha}, (V_q)_{q\in Q}, (\nu_q)_{q\in Q}) \in HLo(HA, y_*)$. Оскільки для HL виконуються умови Lo1 - Lo4, то для HL виконуються умови L1 - L4 і достатньо перевірити виконання умови L5.

Нехай $q \in Q$, $x \in X_+$, $P\{x\} \in Dom\psi$, $\chi = (\tau, \bar{q}, \bar{y}, x) \in Orb$, $i \in \langle\tau\rangle$, $\bar{q}(i) = q$ і для деякого непорожнього, скінченного інтервалу $(t_1, t_2) \subset [\tau_i, \tau_i')$ виконується нерівність $V_q(y^i(t)) > \nu_q(\psi(P\{x\}))$ при $t \in (t_1, t_2)$. Позначимо $f : (t_1, t_2) \to \mathbb{R}_+$ — функція, визначена рівністю $f(t) = V_q(y^i(t))$. Зауважимо, що оскільки $y^i(t) \in Inv(q)$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$, то функція f визначена на (t_1, t_2). Застосовуючи лему 2 до функції V_q на внутрішності своєї області визначення (яка включає $Inv(q)$) і функції y^i на (t_1, t_2), отримуємо, що функція f є локально абсолютно неперервною на (t_1, t_2).

Оскільки $y^i(t) \in Inv(q)$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$, то за умовою Lo5, для всіх $t \in (t_1, t_2)$ виконується нерівність

$$\nabla_{g_q} V_q(y^i(t)) \le -\frac{1}{\lambda_m}\sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})}\left\|\nabla_{h_q} V_q(y^i(t))\right\|.$$

За лемою 1, для майже всіх $t \in (t_1, t_2)$ виконується нерівність

$$\|\dot{w}(t, x)\| \le \frac{1}{\lambda_m}\sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})}.$$

Оскільки для майже всіх $t \in (t_1, t_2)$ виконується

$$\dot{y}^i(t) = g_q(y^i(t)) + h_q(y^i(t))\dot{w}(t, x),$$

тоді

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{dV_q(y^i(t))}{dy}\left(g_q(y^i(t)) + h_q(y^i(t))\dot{w}(t, x)\right) \le$$
$$\le \frac{dV_q(y^i(t))}{dy} g_q(y^i(t)) + \frac{1}{\lambda_m}\sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})}\left\|\frac{dV_q(y^i(t))}{dy} h_q(y^i(t))\right\| =$$
$$= \nabla_{g_q} V_q(y^i(t)) + \frac{1}{\lambda_m}\sqrt{\varphi_w^{-1}(P\{x\})}\left\|\nabla_{h_q} V_q(y^i(t))\right\| \le 0$$

для майже всіх $t \in (t_1, t_2)$.

Враховуючи, що функція f є локально абсолютно неперервною на (t_1, t_2), приходимо до висновку, що функція f незростає на інтервалі (t_1, t_2), тобто функція $t \mapsto V_q(y^i(t))$ не зростає на (t_1, t_2).

Таким чином, умова L5 виконується, а отже $HL \in HL(GHA, y_*)$. Тоді отримуємо включення $HLo(HA, y_*) \subseteq HL(GHA, y_*)$.

Лему доведено. □

Для довільного орієнтованого графу $G = (Q, E)$ позначимо

$$W(G) = Q \cup \{p \in Q^+ \backslash Q \mid p = q_1 q_2 ... q_n \wedge q_i \in Q \wedge \forall i \in \overline{2, n}\ (q_{i-1}, q_i) \in E\}.$$

тобто це є множина слів в алфавіті Q, які зображають маршрути в орієнтованому графі G як послідовності вузлів.

Нехай

$$W_{init}(HA) = W(Gr(HA)) \cap Init.Q^*,$$

тобто це є множина слів в алфавіті Q, які зображають маршрути в графі, які починаються в стані з множини $Init$.

Зауважимо, що

$W_{init}(HA) \in PrL(W(Gr(HA)))$ і $PDPO(GHA) \subseteq W_{init}(HA)$.

Теорема 2. *Припустимо, що для автомату HA і стаціонарного стану $y_* \in St(HA)$ існує кортеж $HL = (\bar{\alpha}, (V_q)_{q\in Q}, (\nu_q)_{q\in Q}) \in HLo(HA, y_*)$. Нехай $\psi = Infinv(\bar{\alpha})$. Нехай A_i, B_i, $i = 1, 2, ..., m$ — скінченні підмножини Q^*, такі, що $W_{init}(HA) \subseteq \bigcup_{i=1}^m A_i B_i^*$. Нехай $E_0 = SwL_2\left(\bigcup_{i=1}^m (A_i \cup A_i B_i)\right)$.*

Нехай $v_{\max} > 0$ — деяке число і

$$((S_D, \cdot, \leq_{SD}, \Theta_D, \leq_\Theta, \bullet, \prec_{SD}), W, \lambda) = aes'(GHA, HL, v_{\max}).$$

Припустимо, що виконуються умови:

1) для кожної пари елементів $q_1, q_2 \in Q$, таких, що $q_1 q_2 \in E_0$ існує число $\delta_{q_1q_2} > 0$ і відображення $\vartheta_{q_1q_2} : [0, \delta_{q_1q_2}] \to \mathbb{R}_+$ таке, що $\vartheta_{q_1q_2}(0+) = \vartheta_{q_1q_2}(0) = 0$ і для всіх елементів $u \in D$ і пар $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$ виконуються нерівності

$$V_{q_2}(y_2) \leq v_{q_2}(\psi(u)),\ \textit{якщо}\ V_{q_1}(y_1) \leq v_{q_1}(\psi(u)),$$
$$V_{q_2}(y_2) \leq \vartheta_{q_1q_2}(V_{q_1}(y_1)),\ \textit{якщо}\ V_{q_1}(y_1) \in [0, \delta_{q_1q_2}]\ \textit{і}\ V_{q_1}(y_1) > v_{q_1}(\psi(u));$$

2) $\lambda(p.beg(p)) \leq_{SD} \lambda(beg(p))$ для всіх $p \in \bigcup_{i=1}^m B_i$, таких, що $p.beg(p) \in W$;

Тоді стаціонарний стан y_* автомату HA стійкий з рівнем $\bar{\alpha}$.

Доведення. За лемою 3, $HL \in HL(GHA, y_*)$. Крім того, $PDPO(GHA) \subseteq W_{init}(HA)$ і $W_{init}(HA) \in PrL(W(Gr(HA)))$. Тому для доведення теореми достатньо використати теорему 1, поклавши $C_i = \{\varepsilon\}$ для $i = 1, 2, .., m$, де ε — порожнє слово і $W_* = W_{init}(HA)$.

Теорему доведено. □

Теорема 3. *Припустимо, що для НГАНП HA і стаціонарного стану $y_* \in St(HA)$ існує кортеж $HL = (\bar{\alpha}, (V_q)_{q\in Q}, (\nu_q)_{q\in Q}) \in HLo(HA, y_*)$, такий, що $V_q \in DF_0^\infty(\mathbb{R}^d, y_*)$ для всіх $q \in Q$. Нехай $\psi = Infinv(\bar{\alpha})$, і A_i, B_i — скінченні підмножини Q^* для $i = 1, 2, .., m$, такі, що*

$W_{init}(HA) \subseteq \bigcup_{i=1}^m A_i B_i^*$.

Нехай $E_0 = SwL_2\left(\bigcup_{i=1}^m (A_i \cup A_i B_i)\right)$, $v_{\max} > 0$ — деяке число і $((S_D, \cdot, \leq_{SD}, \Theta_D, \leq_\Theta, \bullet, \prec_{SD}), W, \lambda) = aes'(GHA, HL, v_{\max})$.

Припустимо, що виконуються умови:

1) для кожної пари елементів $q_1, q_2 \in Q$, такої, що $q_1 q_2 \in E_0$ і всіх $u \in D$ і $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$, таких, що $V_{q_1}(y_1) \leq v_{q_1}(\psi(u))$, виконується $V_{q_2}(y_2) \leq v_{q_2}(\psi(u))$;

2) $\lambda(p.beg(p)) \leq_{SD} \lambda(beg(p))$ для всіх $p \in \bigcup_{i=1}^m B_i$, таких, що $p.beg(p) \in W$.

Тоді стаціонарний стан y_* автомату HA стійкий з рівнем $\bar{\alpha}$.

Доведення. Застосуємо теорему 2, для чого достатньо довести виконання другої нерівності умови 1 з її формулювання, тобто, що для кожної пари елементів $q_1, q_2 \in Q$, таких, що $q_1 q_2 \in E_0$ існує число $\delta_{q_1q_2} > 0$ і відображення $\vartheta_{q_1q_2} : [0, \delta_{q_1q_2}] \to \mathbb{R}_+$ таке, що $\vartheta_{q_1q_2}(0+) = \vartheta_{q_1q_2}(0) = 0$ і для всіх елементів $u \in D$ і пар $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$, таких, що $V_{q_1}(y_1) \in [0, \delta_{q_1 q_2}]$ і $V_{q_1}(y_1) > v_{q_1}(\psi(u))$, виконується нерівність $V_{q_2}(y_2) \leq \vartheta_{q_1 q_2}(V_{q_1}(y_1))$.

Зафіксуємо пару $q_1, q_2 \in Q$, таку, що $q_1 q_2 \in E_0$ і покладемо $\delta_{q_1 q_2} = = \nu_{q_1}(1) > 0$. Визначимо відображення $\vartheta_{q_1 q_2} : [0, \delta_{q_1 q_2}] \to \mathbb{R}_+$ рівністю

$$\vartheta_{q_1 q_2}(v) = \sup\{V_{q_2}(y) | y \in DomV_{q_1} \cap DomV_{q_2} \wedge V_{q_1}(y) \leq v\}.$$

Зауважимо, що це значення визначено, бо $y_* \in DomV_{q_1} \cap DomV_{q_2}$ і скінченне, оскільки при $V_q(y) \leq \nu_q(1)(1)$ виконується $\|y_* - y\| \leq 1$, а функція $V_{q_2}(y)$ локально обмежена. Оскільки $V_{q_1}(y) > 0$ при $y \neq y_*$, то $\vartheta_{q_1 q_2}(0) = 0$. Оскільки $\vartheta_{q_1 q_2}$ монотонна, то значення $\vartheta_{q_1 q_2}(0+)$ визначено. Перевіримо, що $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) = 0$. Дійсно, $\inf\limits_{\varepsilon > 0} \vartheta_{q_1 q_2}(\nu_{q_1}(\varepsilon)) = 0$, оскільки функція V_{q_1} неперервна на своїй області визначення і $V_{q_1}(y_*) = 0$. Але якщо $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) \neq 0$, то $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) > 0$ і тоді $\inf\limits_{\varepsilon > 0} \vartheta_{q_1 q_2}(\nu_{q_1}(\varepsilon)) > 0$, бо $\nu_{q_1}(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon > 0$. Отже, $\vartheta_{q_1 q_2}(0+) = 0$. Якщо $(y_1, y_2) \in J(q_1, q_2, u)$ для деякого $u \in D$, то $y_1 = y_2$, бо автомат неімпульсний, і $y_1 \in DomV_{q_1} \cap DomV_{q_2}$. Тому $V_{q_2}(y_2) \leq \leq \vartheta_{q_1 q_2}(V_{q_1}(y_1))$ за визначенням $\vartheta_{q_1 q_2}$.

Отже за теоремою 2, стаціонарний стан y_* стійкий з рівнем $\bar{\alpha}$.

Теорему доведено. □

Висновки

Автором пропонуються достатні умови стійкості нечіткого гібридного автомату із нечітким перемиканням. Перемикання станів відбувається при досягненні фазовою траекторією поверхні перемикань. В локальних станах динаміка складної невизначеної системи описується нечітким аналогом стохастичного рівняння Іто. Це дозволяє вирішити проблему відсутності статистичних данних та досліджувати саме нечітку траекторію, а не ставлення до неї експертів. Дослідження проводиться за допомогою мультикомпонентних функцій Ляпунова.

Роботу виконано при підтримиці ДФФД проект № № Ф28.1/033.

Література

1. Cooman, G. Possibility theory. Part I: Measure- and integral-theoretic groundwork. Int. J. of General Syst. 25 (1997) 291–371.
2. Dubois D., Prade H. Possibility Theory. New York: Plenum, 1988.
3. Bychkov, A.S. About possibility theory and its application. Reports of National Academy of Sciences of Ukraine, 5 (2007) 7–12 (in Ukrainian).
4. Lakshmikantham, V., Mohapatra, R. Theory of fuzzy differential equations and inclusions. Taylor and Francis, London, (2003)
5. Buckley, J.J., Feuring Th. Fuzzy Differential Equations. Fuzzy Sets and Systems, 110 (2000) 43–54.
6. Buckley J.J., Qu Y., Solving fuzzy equations: a new solution concept, Fuzzy Sets and Systems 50 (1992) 1–14.
7. Friedmanan, Y., Sandler, U. A New Approach to Fuzzy Dynamics. Proc. of the 12th IAPR International Conference, Jerusalem, Israel (1994).

8. P. Diamond, Stability and periodicity in fuzzy differential equations, IEEE Trans. Fuzzy Systems, 8 (2000) 583-590.
9. Jae Ug Jeong Stability of a periodic solution for fuzzy differential equations // Journal of Applied Mathematics and Computing. — 2003. — V. 13, №1-2. — 217-222
10. Shiji Song, Cheng Wu, E.S. Lee Asymptotic equilibrium and stability of fuzzy differential equations // Computers & Mathematics with Applications, V.49, # 7-8, (2005), 1267-1277
11. Мартынюк А.А., Слынько В.И. Обусловиях огранченности движений механических систем, описываемых нечеткими дифференциальными уравнениями // прикладная механика. — 2005. — 41, №12. — с.93–99.
12. Bychkov, A.S. Modelling and studying fuzzy dynamical systems. Journal of Mathematical Sciences, 3 (2009) 466–479.
13. Бєлов Ю.А., Бичков О.С., Меркурьєв М.Г. Про один підхід до моделювання нечіткої динаміки // Доповіді НАН України. — 2006. — №10. — С. 14–19
14. Бичков О.С. Побудова інтегралу за процесом нечіткого блукання // Вісник Київського університету, Сер. фіз. і мат. — 2005. — №4 — С. 19–24.
15. Martynyuk A.A., Stability of motion. The role of multicomponent Liapunov's functions // London: Cambridge Scientific publ., 2007.— 322 p.
16. Бычков А.С., Меркурьев М.Г. Достаточные условия устойчивости стационарного состояния линейных гибридных автоматов // Управляющие системы и машины. — 2007. - №2. — С. 18–23.
17. Бичков О.С. Продостатні умови стійкості гібридних автоматів з нечітким перемиканням // Доповіді НАН України. — 2011. — №4. — С. 7–14.
18. Бичков О.С., Іванов Є.В. Чисельне розв'язання нечіткого диференціального рівняння // Математичні машини і системи. — 2009. — №1. — С. 31–39.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 02.07.2012