Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2013, №1(111)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.85

УПАКОВКА КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ КОНТЕЙНЕР С УЧЕТОМ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ

А. А. Коваленко, А. В. Панкратов, Т. Е. Романова, П. И. Стецюк

Резюме. Рассматривается задача упаковки параллельных круговых цилиндров в цилиндрическом контейнере минимального радиуса с учетом ограничений, связанных с механическими характеристиками поведения системы (динамическое равновесие, моменты инерции, устойчивость). Строится математическая модель на основе метода phi-функций Стояна, предлагаются методы решения. Приводятся тестовые примеры.

Ключевые слова: упаковка кругов, ограничения механического поведения системы, математическая модель, phi-функции, приближенные методы.

Введение

Задачи размещения относятся к классу NP-сложных. 3D-задачи размещения имеют широкий спектр применения в нанотехнологиях, робототехнике, энергетике, машиностроении и т.д. Особый интерес представляют 3D-задачи упаковки, возникающие при проектировании кораблей, экранированных машин, платформ с буровой установкой, космических кораблей и спутников. Для решения задач используются, как правило, эвристические методы.

В основе предлагаемых алгоритмов: теоретический анализ, тестовая задача с оптимальными решениями, инженерное применение. Однако алгоритм теоретического анализа является достаточно трудоемким, алгоритм инженерного применения — еще более сложный для ряда случаев, поэтому чаще всего проводят оценку при помощи тестовой задачи. В статье [1] представлены семь тестовых задач с известными оптимальными решениями на основе оптимизационных задач компоновки упрощенного модуля спутника, предназначенных для оценки алгоритмов решения трехмерных задач упаковки с ограничениями поведения. В одной из последних монографий [2] рассматриваются результаты избранных инновационных исследований, которые охватывают широкий спектр проблем, возникающих в космической технике. В монографии обсуждаются классические и современные проблемы ракетно-космической техники — в том числе размещение грузов и оборудования.

В данной работе предлагается математическая модель, использующая метод phi-функций Стояна [3] и метод решения 3D-задачи оптимальной упаковки цилиндров в цилиндрическом контейнере с учетом ограничений поведения механической системы (динамическое равновесие, моменты инерции, устойчивость).

Постановка задачи

Пусть Ω – контейнер (контейнер спутника) (прямой круговой цилиндр переменного радиуса R и высоты $2H$), A_i, $i \in I_N = \{1, 2, ..., N\}$ – множество цилиндров радиуса $r_i < R$ и высоты $2h_i$, $h_i \leq H$. Далее объекты A_i помещаются внутрь контейнера Ω. Объекты – твердые однородные тела, массы которыхопределяются как $m_i = \rho \cdot V_i$, где V_i – объем, а ρ — плотность объекта A_i. Контейнер Ω с упакованными в нем объектами назовем (спутниковой) системой Ω^A.

Задача. Упаковать объекты $A_i, i = 1, 2, ..., N$, в контейнер Ω минимального радиуса с учетом ограничений, связанных с механическими характеристиками поведения системы Ω^A (равновесием, моментами инерции, устойчивостью).

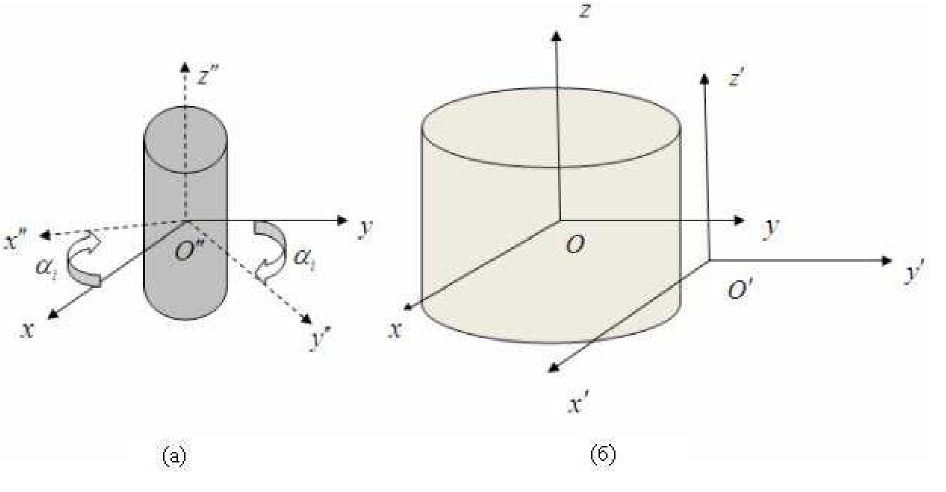

Рис. 1. Системы координат (а) объекта A_i, (б) контейнера Ω и системы Ω^A

Пусть: $Oxyz$ – неподвижная система координат, где O совпадает с центром масс контейнера Ω, z – ось симметрии контейнера Ω;

$O'x'y'z'$ – система координат системы Ω^A, где O' совпадает с центром масс системы Ω^A, z' – главная ось системы Ω^A;

$O''x''y''z''$ – собственная система координат объекта A_i, где O'' совпадает с центром масс объекта A_i, z'' – продольная ось симметрии объекта, параллельная оси z;

$u_i = (x_i, y_i, z_i)$ – параметры размещения (вектор трансляции) объекта A_i, $i \in \{1, 2, ..., N\}$, относительно $Oxyz$;

(x_e, y_e, z_e) – заданный центр масс системы Ω^A, совпадающий с центром симметрии O контейнера Ω. Не теряя общности, полагаем (x_e, y_e, z_e)=$(0, 0, 0)$.

Таким образом, вектор u переменных включает: радиус R (радиус основания контейнера Ω) и параметры размещения u_i, т.е. $u = (R, u_1, u_2, ..., u_N)$.

Математическая модель

Центр масс (x_c, y_c, z_c) множества $\{A_i, i \in I_N\}$ определяется следующими соотношениями:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}, \quad y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}, \quad z_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}. \tag{1}$$

Моменты инерции $J_x(u), J_y(u), J_z(u)$ системы Ω^A относительно осей Ox, Oy, Oz неподвижной системы координат определяются как

$$J_x(u) = \sum_{i=1}^{N}(J''_{xi}\cos^2\alpha_i + J''_{yi}\sin^2\alpha_i) + \sum_{i=1}^{N} m_i(y_i^2 + z_i^2) - (y_c^2 + z_c^2)\sum_{i=1}^{N} m_i,$$

$$J_y(u) = \sum_{i=1}^{N}(J''_{yi}\cos^2\alpha_i + J''_{xi}\sin^2\alpha_i) + \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i^2 + z_i^2) - (x_c^2 + z_c^2)\sum_{i=1}^{N} m_i, \tag{2}$$

$$J_z(u) = \sum_{i=1}^{N} J''_{zi} + \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i^2 + y_i^2) - (x_c^2 + y_c^2)\sum_{i=1}^{N} m_i,$$

где α_i – угол поворота объекта A_i вокруг своей центральной оси $O''z''$, J''_{xi}, J''_{yi}, J''_{zi} – моменты инерции объекта A_i относительно осей $O''x''$, $O''y''$, $O''z''$ системы координат $O''x''y''z''$. Поскольку A_i, $i \in \{1, 2, ..., N\}$ – объекты цилиндрической формы, то J''_{xi},J''_{yi},J''_{zi} описываются так:

$$J''_{xi} = J''_{yi} = \frac{1}{12} m_i(3r_i^2 + 4h_i^2), J''_{zi} = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \tag{3}$$

а соотношения (2) примут вид

$$J_x(u) = \sum_{i=1}^{N} J''_{xi} + \sum_{i=1}^{N} m_i(y_i^2 + z_i^2) - (y_c^2 + z_c^2)\sum_{i=1}^{N} m_i,$$

$$J_y(u) = \sum_{i=1}^{N} J''_{yi} + \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i^2 + z_i^2) - (x_c^2 + z_c^2)\sum_{i=1}^{N} m_i, \tag{4}$$

$$J_z(u) = \sum_{i=1}^{N} J''_{zi} + \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i^2 + y_i^2) - (x_c^2 + y_c^2)\sum_{i=1}^{N} m_i.$$

Углы отклонения $\varphi_x(u), \varphi_y(u), \varphi_z(u)$ главной оси инерции системы Ω^A от осей Ox, Oy, Oz неподвижной системы координат определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_x(u) &= \frac{1}{2} arctg\left(\frac{2J_{xy}(u)}{J_y(u) - J_x(u)}\right), \\ \varphi_y(u) &= \frac{1}{2} arctg\left(\frac{2J_{yz}(u)}{J_z(u) - J_y(u)}\right), \\ \varphi_z(u) &= \frac{1}{2} arctg\left(\frac{2J_{xz}(u)}{J_z(u) - J_x(u)}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где $J_{xy}(u), J_{yz}(u), J_{xz}(u)$ — центробежные моменты инерции системы Ω^A относительно системы координат $Oxyz$, которые определяются так:

$$\begin{aligned} J_{xy}(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(J''_{xi} + m_i(y_i^2 + z_i^2) - J''_{yi} - m_i(x_i^2 + z_i^2))\sin 2\alpha_i + \\ + \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i - x_c y_c \sum_{i=1}^{N} m_i, \\ J_{yz}(u) = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i - y_c z_c \sum_{i=1}^{N} m_i, \\ J_{xz}(u) = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i - x_c y_c \sum_{i=1}^{N} m_i. \end{aligned} \tag{6}$$

Поскольку $J''_{xi} = J''_{yi}$, то соотношения (6) примут вид

$$\begin{aligned} J_{xy}(u) &= \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i - x_c y_c \sum_{i=1}^{N} m_i, \\ J_{yz}(u) &= \sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i - y_c z_c \sum_{i=1}^{N} m_i, \\ J_{xz}(u) &= \sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i - x_c y_c \sum_{i=1}^{N} m_i. \end{aligned} \tag{7}$$

Математическую модель поставленной задачи можно представить в виде

$$F(u^*) = \min_{u \in W \subset R^{3N+1}} R, \quad u = (u_1, u_2, ..., u_N, R), \tag{8}$$

$$W = \{u \in R^{3N+1}: \begin{array}{l} \Upsilon(u) \geq 0,\ G_1(u) \geq 0,\ G_2(u) \geq 0, \\ G_3(u) \geq 0,\ R \geq r_i, i = 1, ..., N\}, \end{array} \tag{9}$$

где $\Upsilon(u) \geq 0$ – ограничение на размещение объектов $A_i, i = 1, ..., N$, в контейнере Ω:

$\Upsilon(u) = \min\{\Phi_{ij}^{CC}, i > j = 1, ..., N-1, \Phi_i^{\Omega^* C}, i = 1, ..., N\}$,

Φ_{ij}^{CC} – phi-функция цилиндров A_i и A_j,

$$\begin{aligned}\Phi_{ij}^{CC} = \;& \max\{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - (r_i + r_j)^2, z - (h_i + h_j), \\ & -z - (h_i + h_j)\}, i > j = 1, ..., N-1,\end{aligned} \tag{10}$$

$\Phi_i^{\Omega^* C}$ – phi-функция цилиндра A_i и объекта Ω^*, $\Omega^* = R^3 \backslash int\Omega$,

$$\Phi_i^{\Omega^* C} = \min\{-x_i^2 - y_i^2 + (R - r_i)^2,\ -z + (H - h_i),\ z + (H - h_i)\}, i = 1, ..., N; \tag{11}$$

$G_1(u) \geq 0$ – ограничение устойчивости,

$$\begin{gathered} G_1(u) = \min\{g_1(u), g_2(u), g_3(u)\}, \\ g_1(u) = \min\{-(x_e - x_c) + \Delta x_c, (x_e - x_c) + \Delta x_c\}, \\ g_2(u) = \min\{-(y_e - y_c) + \Delta y_c, (y_e - y_c) + \Delta y_c\}, \\ g_3(u) = \min\{-(z_e - z_c) + \Delta z_c, (z_e - z_c) + \Delta z_c\}, \end{gathered} \tag{12}$$

где $(\Delta x_c, \Delta y_c, \Delta z_c)$ – допустимые отклонения от центра масс системы Ω^A;

$G_2(u) \geq 0$ — ограничение моментов инерции,

$$\begin{gathered} G_2(u) = \min\{g_4(u), g_5(u), g_6(u)\}, \\ g_4(u) = \min\{-J_x(u) + \Delta J_x, J_x(u) + \Delta J_x\}, \\ g_5(u) = \min\{-J_y(u) + \Delta J_y, J_y(u) + \Delta J_y\}, \\ g_6(u) = \min\{-J_z(u) + \Delta J_z, J_z(u) + \Delta J_z\}, \end{gathered} \tag{13}$$

где $(\Delta J_x, \Delta J_y, \Delta J_z)$ – допустимые отклонения от моментов инерции системы Ω^A;

$G_3(u) \geq 0$ – ограничение равновесия,

$$\begin{gathered} G_3(u) = \min\{g_7(u), g_8(u), g_9(u)\}, \\ g_7(u) = \min\{-\varphi_x(u) + \Delta\varphi_x, \varphi_x(u) + \Delta\varphi_x\}, \\ g_8(u) = \min(-\varphi_y(u) + \Delta\varphi_y, \varphi_y(u) + \Delta\varphi_y\}, \\ g_9(u) = \min\{-\varphi_z(u) + \Delta\varphi_z, \varphi_z(u) + \Delta\varphi_z\}, \end{gathered} \tag{14}$$

где $(\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z)$ – допустимые погрешности угла наклона главной оси системы Ω^A от осей координат Ox, Oy, Oz.

Ограничения $G_1(u) \geq 0$, $G_2(u) \geq 0$, $G_3(u) \geq 0$ называются ограничениями поведения системы Ω^A [2].

Если положить $H = h_i$ (такая задача рассматривается в статье [1]), то соотношения (10) и (11) можно упростить следующим образом:

$$\Phi_{ij}^{CC} = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - (r_i + r_j)^2, i > j = 1, ..., N-1, \tag{15}$$

$$\Phi_i^{C^* C} = -x_i^2 - y_i^2 + (R - r_i)^2, i = 1, ..., N, \tag{16}$$

где Φ_{ij}^{CC} – phi-функция C_i и C_j (C_i и C_j – основания цилиндров A_i и A_j); $\Phi_i^{C^* C}$ – phi-функция C_i и C^* (C – основание контейнера Ω).

Тогда задача (8)–(9) является задачей нелинейного программирования с линейной функцией цели. Область допустимых решений описывается системой неравенств вида

$$\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-(r_1+r_2)^2\geq 0,\\
\ldots\\
(x_N-x_{N-1})^2+(y_N-y_{N-1})^2-(r_N+r_{N-1})^2\geq 0,
\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\text{Число неравенств: } \frac{1}{2}N(N-1)}\\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
-x_1{}^2-y_1{}^2+(R-r_1)^2\geq 0,\\
\ldots\\
-x_N{}^2-y_N{}^2+(R-r_N)^2\geq 0,
\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\text{Число неравенств: } N}\\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
(x_e-x_c)+\Delta x_c\geq 0,\\
(y_e-y_c)\ +\Delta y_c\geq 0,\\
(z_e-z_c)\ +\Delta z_c\geq 0,\\
-(x_e-x_c)\ +\Delta x_c\geq 0,\\
-(y_e-y_c)\ +\Delta y_c\geq 0,\\
-(z_e-z_c)\ +\Delta z_c\geq 0,
\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\textit{Число неравенств}\text{: } 6}\\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
J_x(u)+\Delta J_x\geq 0,\\
J_y(u)+\Delta J_y\geq 0,\\
J_z(u)+\Delta J_z\geq 0,\\
-J_x(u)+\Delta J_x\geq 0,\\
-J_y(u)+\Delta J_y\geq 0,\\
-J_z(u)+\Delta J_z\geq 0,
\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\textit{Число неравенств}\text{: } 6}\\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
-\varphi_x(u)+\Delta\varphi_x\geq 0,\\
\varphi_x(u)+\Delta\varphi_x\geq 0,\\
-\varphi_y(u)+\Delta\varphi_y\geq 0,\\
\varphi_y(u)+\Delta\varphi_y\geq 0,\\
-\varphi_z(u)+\Delta\varphi_z\geq 0,\\
\varphi_z(u)+\Delta\varphi_z\geq 0.
\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\textit{Число неравенств}\text{: } 6}
\end{array}\right.$$

Методы решения

Метод 1. С помощью негладких штрафов задача (8)–(9) сводится к задаче минимизации негладкой функции вида

$$\begin{aligned} f(u)= \quad & R+P_1\sum_{k=1}^{N}\max\{0,-\Phi_k\}+P_2\sum_{k=n+1}^{n+18}\max\{0,-g_k\}+\\ & +P_3\max\{0,-R+\max_{i=1,\ldots,N} r_i\}, \end{aligned} \tag{17}$$

где $n=\frac{N(N+1)}{2}$, P_k — штрафные коэффициенты, $k=1,2,3$, Φ_k — phi-функции вида (15), (16), $k=1,2...,N$, g_k — функции вида (12), (13), (14),

$k = n+1, ..., n+18$. Для заданного набора стартовых точек осуществляется поиск локальных минимумов функции $f(u)$. При решении задачи $\min f(u)$ используется эффективный алгоритм минимизации негладких выпуклых функций — $r(\alpha)$-алгоритм Шора [4]. Величина шага адаптивно настраивается с помощью ряда параметров [5]. Наилучший из локальных минимумов функции (17), для которого штрафная часть в функции $f(u)$ равна нулю, принимается за решение задачи (8)–(9). Стартовые точки генерируются случайным образом.

Метод 2. Для решения задач нелинейной оптимизации используется IPOPT [6]. Стартовые точки генерируются случайным образом.

Рассмотрим реализации математических моделей (8)–(9) и (17) на тестовых примерах.

Пусть $N = 5$, $H = 1$, $h_i = 1$, $i = 1, ..., 5$, $r_1 = 0.1$, $r_2 = 0.2$, r_3=0.3, $r_4 = 0.5$, $r_5 = 0.8$, $m_1 = 0.0785$, $m_2 = 0.314$, $m_3 = 0.7065$, $m_4 = 1.9625$, $m_5 = 5.024$ (при $\rho = 2,5$), $(x_e, y_e, z_e) = (0, 0, 0)$, $(\Delta x_c, \Delta y_c, \Delta z_c) = (0.0001, 0.0001, 0.0001)$, $(\Delta J_x, \Delta J_y, \Delta J_z) = (5, 5, 5)$.

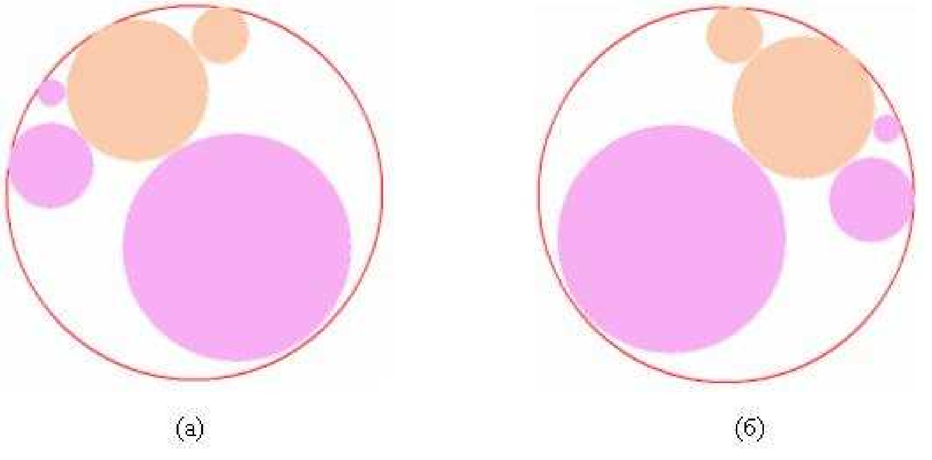

Рис. 2. Размещение объектов с учетом ограничения равновесия $G_1(u) \geq 0$, соответствующее точке локального минимума u^*: (а) методом 1, (б) методом 2

Наилучшее решение с учетом ограничений равновесия, найденное r-алгоритмом Шора (рис. 2 а):

u^*=(1.316129, -0.996358, 0.697289, 0.000000, 0.187239, 1.100245, 0.000000, -0.998733, 0.187146, 0.000000, -0.396235, 0.713487, 0.000000, 0.299239, -0.384839, 0.000000), $F(u^*) = R^*$=1.316129.

Наилучшее решение с учетом ограничений равновесия, найденное программой IPOPT (рис. 2 б):

u^*=(1.316108, 1.124725, 0.462506, 0.000000, 0.058511, 1.114573, 0.000000, 1.015461, -0.036266, 0.000000, 0.542956, 0.609287, 0.000000, -0.376283, -0.309951, 0.000000), $F(u^*) = R^*$=1.316108.

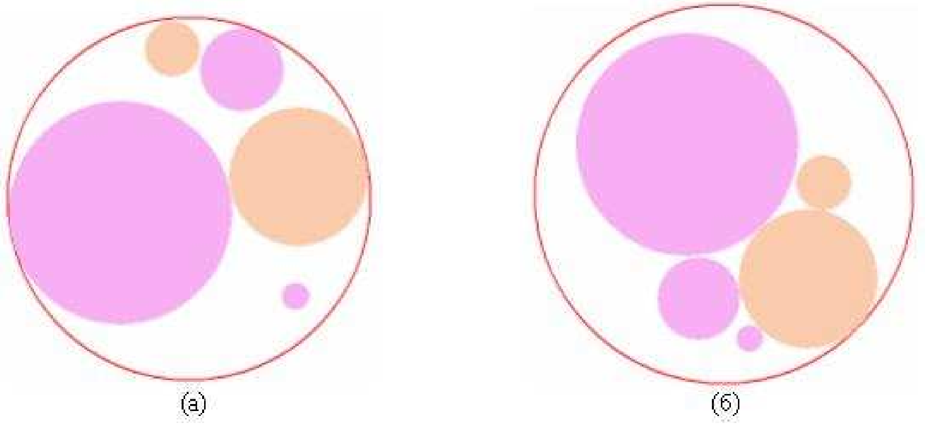

Рис. 3. Размещение объектов, соответствующее точке локального минимума u^*: (а) без учета ограничений поведения, (б) с учетом ограничений поведения

Заметим, что оптимальное решение задачи (8)–(9) без учета ограничений поведения получено в точке u^*=(1.3000000, 0.7626976, -0.6994965, 0.000000, -0.1182920, 1.0736409, 0.000000, 0.3772566, 0.9238060, 0.000000, 0.7842687, 0.1578690, 0.000000, -0.4901677, -0.0986691, 0.000000), $F(u^*) = R^*$=1.3000000 (рис.3а), точка u^* является точкой глобального минимума.

Наилучшее решение с учетом ограничений равновесия и моментов инерции получено в точке u^*=(1.362501, 0.187796, -1.036294, 0.000000, 0.721202, 0.081223, 0.000000, -0.177798, -0.749687, 0.000000, 0.609890, -0.609871, 0.000000, -0.261406, 0.354932, 0.000000), $F(u^*) = R^*$=1.362501 (рис. 3 б).

Работа выполнена при поддержке Научно Технологического Центра в Украине и НАН Украины (проект № 5710).

Литература

1. Fasano G., Pinter J.D., eds. Modeling and Optimization in Space Engineering. Springer Optimization and Its Applications. – Springer. – New York. – 2012. – 404 p.
2. Chao Che, Yi-shou Wang, Hong-fei Teng. Test problems for quasi-satellite packing: Cylinders packing with behavior constraints and all the optimal solutions known. – Optimization Online. – 2008. – 11 p. `http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2008/09/2093.html`.
3. Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2010. – V. 43, № 5. – P. 535–553.
4. Сергиенко И.В., Стецюк П.И. О трех научных идеях Н.З. Шора // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 1. – С. 4–22.

5. Шор Н.З., Стецюк П.И. Использование модификации r-алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций// Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 4. – С. 28–49.
6. Wachter A., Biegler L.T. On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. – Math. Programming. – 2006. – V. 106, № 1. – P. 25–57.

Институт проблем машиностроения им. А.Н.Подгорного НАН Украины, ул. Дм.Пожарского, 2/10, 61046, Харьков, Украина.

Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, пр. Академика Глушкова, 40, Киев-187, 03680, Украина.

Поступила 09.06.2012