Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2013, №1(111)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ДВА МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ ФЕЙЄРІВСЬКОГО ОПЕРАТОРА

В. В. Семенов[1]

Резюме. В роботі досліджено збіжність двох методів знаходження нерухомих точок фейєрівських (квазінерозтягуючих) операторів. Перший метод є новою та привабливою в обчислювальному плані модифікацією гібридного методу Такахасі-Такеучі-Куботи. Другий — варіант класичного методу Гальперна-Сузукі. Доведено теореми про сильну збіжність методів.

(Присвячується пам'яті Івана Івановича Ляшка)

1. Вступ та допоміжні факти

Фейєрівські оператори та породжені ними ітераційні процеси [1–19] мають велике значення в оптимізаційній алгоритмиці. Книга [3] — одне з найкращих джерел по ітераційним алгоритмам з фейєрівською властивістю для розв'язання рівнянь, нерівностей та задач оптимізації.

Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина.

Означення 1. Оператор $T : C \to H$ називають фейєрівським (квазінерозтягуючим), якщо $F(T) = \{x \in C : \ x = Tx\} \neq \emptyset$ та

$$\|Tx - z\| \leq \|x - z\| \ \ \forall z \in F(T) \ \forall x \in C.$$

Основний приклад фейєрівського оператора — нерозгягуючий оператор $T : C \to H$ ($\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \ \forall x, y \in C$) з непорожньою множиною нерухомих точок $F(T)$.

Зауваження 1. Множнина $F(T)$ опукла та замкнена [3, 7].

Для фейєрівського оператора T має місце

$$\|x - z\|^2 \geq \|Tx - z\|^2 = \|Tx - x + x - z\|^2 =$$
$$= \|Tx - x\|^2 + 2(Tx - x, x - z) + \|x - z\|^2 \ \ \forall z \in F(T) \ \forall x \in C.$$

Звідки

$$(x - Tx, x - z) \geq \frac{1}{2} \|x - Tx\|^2 \ \ \forall z \in F(T) \ \forall x \in C. \quad (1)$$

Сильну збіжність в просторі H позначимо через $\to$, а слабку — $\rightharpoonup$.

---

[1]Робота виконана за фінансової допомоги Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект GP/F44/042).

Означення 2. Оператор $F : C \to H$ називають замкненим в точці $y \in H$, якщо
$$x_n \to x, \quad Fx_n \to y \;\Rightarrow\; Fx = y.$$

Означення 3. Оператор $F : C \to H$ називають демізамкненим в точці $y \in H$, якщо
$$x_n \rightharpoonup x, \quad Fx_n \to y \;\Rightarrow\; Fx = y.$$

Відомо, що для нерозтягуючих операторів $T : C \to H$ оператори $I - T$ (I — тотожний оператор) демізамкнені в точці 0 [7, 20].

У даній роботі ми розглянемо два методи розв'язання задачі
$$\text{знайти } \; x \in F(T), \tag{2}$$
де $T : C \to H$ — фейєрівський оператор. Перший метод є модифікацією гібридного методу Такахасі-Такеучі-Куботи [21]. Другий — варіант класичного методу Гальперна-Сузукі [22–28].

Позначимо через P_C оператор метричного проектування гільбертового простору H на замкнену опуклу множину $C \subseteq H$.

Лема 1 ([7])**.** *Нехай C — замкнена опукла підмножина гільбертового простору H, $x \in H$, $y \in C$. Наступні умови рівносильні:*

1) $y = P_C x$;
2) $(y - x, z - y) \geq 0 \quad \forall z \in C$.

Зауваження 2. Оператор P_C є нерозтягуючим [7].

Корисною є

Лема 2 ([25, 26])**.** *Нехай (ξ_n) — послідовність невід'ємних чисел, що задовольняє рекурентну нерівність $\xi_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)\xi_n + \alpha_n \beta_n + \gamma_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, де послідовності (α_n), (β_n) і (γ_n) мають властивості: 1) $\alpha_n \in [0, 1)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$; 2) $\limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 0$; 3) $\gamma_n \in [0, +\infty)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$. Тоді $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$.*

2. Модифікований гібридний метод

В роботі [21] для пошуку нерухомих точок нерозтягуючого оператора $T : C \to H$ запропоновано метод
$$\begin{cases} x_0 \in C_0 = C, \\ y_n = T x_n, \\ C_{n+1} = \{ z \in C_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\| \}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0. \end{cases} \tag{3}$$
В припущенні $F(T) \neq \emptyset$ доведена сильна збіжність послідовності (x_n) до нерухомої точки $z = P_{F(T)} x_0$. Майже без змін в основних міркуваннях обгунтування цього методу нереноситься на випадок замкнених фейєрівських операторів. Випадок багатозначних фейєрівських операторів розглянуто в роботі [12]. В роботі [13] на базі подібної схеми побудовано сильно збіжний екстрапроксимальний алгоритм для розв'язання задач рівноважного програмування.

Основний недолік ітерацій (3) — зростаюча складність опуклих множин C_n, на які проектується точка x_0. Бажаною є схема без зростання складності допоміжних множин. У цьому розділі ми пропонуємо можливий варіант такої схеми. Але ціною буде зростання кількості метричних проектувань на ітераційному кроці.

Приділимо спочатку увагу допоміжній задачі пошуку спільної нерухомої точки зліченної родини нерозтягуючих операторів[2].

Нехай $T_i : C \to C$ — зліченний набір нерозтягуючих операторів, що діють у замкненій опуклій підмножині C простору H, $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$. Розглядаємо задачу

$$\text{знайти} \;\; x \in F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i). \tag{4}$$

Для знаходження спільної нерухомої точки операторів T_i можна використати такий варіант схеми Гальперна.

Алгоритм 1. Задаємо $x_1 \in C$ і $a \in C$, генеруємо послідовність елементів $x_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_n,$$

де $\alpha_0 = 1$, (α_n) — спадна послідовність чисел з $(0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\alpha_n \to 0$.

Сильна збіжність цієї схеми доводиться стандартними міркуваннями [26, 27]. Наведемо їх для замкненості статті.

(Факт 1). *Послідовність* (x_n) *обмежена.* Дійсно, для $p \in F$ маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq \alpha_n \|a - p\| + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) \|T_i x_n - p\| \leq \\ &\leq \alpha_n \|a - p\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| \leq \max\left\{\|a - p\|, \|x_n - p\|\right\}. \end{aligned}$$

Звідки індукцією отримуємо

$$\|x_n - p\| \leq \left\{\|x_1 - p\|, \|a - p\|\right\}, \;\; n \geq 1.$$

(Факт 2). *Для послідовності* (x_n) *виконується* $\|x_{n+1} - x_n\| \to 0$. Маємо

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= (\alpha_n - \alpha_{n-1}) a + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_{n-1} = \\ &= (\alpha_n - \alpha_{n-1}) a + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(T_i x_n - T_i x_{n-1}) + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) T_n x_{n-1}. \end{aligned}$$

Звідки

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq (1 - \alpha_n) \|x_n - x_{n-1}\| + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \|a - T_n x_{n-1}\|.$$

[2]Запропонована нижче схема апроксимації розв'язку задачі (2) буде проінтерпретована як варіант схеми Гальперна для задачі пошуку спільної нерухомої точки певної зліченної родини нерозтягуючих операторів

З леми 2 про числові послідовності випливає бажане.

(Факт 3). *Для всіх i має місце* $\|x_n - T_i x_n\| \to 0$. Маємо

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(x_n - T_i x_n) = \alpha_n (a - x_n) + x_n - x_{n+1}.$$

Для довільного $p \in F$ розглянемо рівність

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(x_n - T_i x_n, x_n - p) =$$
$$= \alpha_n (a - x_n, x_n - p) + (x_n - x_{n+1}, x_n - p).$$

Оскільки

$$\|x_n - p\|^2 \geq \|T_i x_n - p\|^2 = \|T_i x_n - x_n\|^2 + \|x_n - p\|^2 + 2(T_i x_n - x_n, x_n - p),$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) \|T_i x_n - x_n\|^2 \leq 2\alpha_n (a - x_n, x_n - p) + 2(x_n - x_{n+1}, x_n - p).$$

Для фіксованого i при $n > i$ маємо

$$\|T_i x_n - x_n\|^2 \leq \frac{M\left(\alpha_n + \|x_n - x_{n+1}\|\right)}{(\alpha_{i-1} - \alpha_i)}.$$

Звідки

$$\|x_n - T_i x_n\| \to 0.$$

Доведемо, що

$$\limsup_{n\to\infty} (P_F a - x_n, P_F a - a) \leq 0. \tag{5}$$

Виділимо з (x_n) підпослідовність (x_{n_k}) таку, що

$$\limsup_{n\to\infty} (P_F a - x_n, P_F a - a) = \lim_{k\to\infty} (P_F a - x_{n_k}, P_F a - a).$$

Можна вважати, що $x_{n_k} \rightharpoonup \tilde{x}$. З принципу демізамкненості випливає включення $\tilde{x} \in F$. Тому одержуємо

$$\lim_{k\to\infty} (P_F a - x_{n_k}, P_F a - a) = (P_F a - \tilde{x}, P_F a - a) \leq 0,$$

чим і доводимо (5).

Покажемо тепер, що $x_n \to z = P_F a$. Маємо

$$\|x_{n+1} - z\|^2 = \left\| \alpha_n a + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i) T_i x_n - z \right\|^2 =$$
$$= \left\| \alpha_n (a - z) + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(T_i x_n - z) \right\|^2 \leq$$
$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(T_i x_n - z) \right\|^2 + 2\alpha_n (a - z, x_{n+1} - z) \leq$$
$$\leq (1 - \alpha_n) \|x_n - z\|^2 + 2\alpha_n (a - z, x_{n+1} - z). \tag{6}$$

Застосувавши до одержаної рекурентної нерівності (6) лему 2 про числові послідовності, робимо висновок, що $\|x_n - z\| \to 0$. Отже, має місце

Теорема 1. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T_i : C \to C$ — нерозтягуючі оператори, $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$, $a \in C$. Тоді згенерована алгоритмом 1 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $P_F a$.*

Тепер повернемость до задачі (2). Для її розв'язання пропонуємо

Алгоритм 2 (модифікований гібридний метод)**.** Для $a \in C$, $x_1 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in H$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = Tx_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\ \begin{cases} z_{n,1} = P_{C_1} x_n, \\ z_{n,2} = P_{C_2} x_n, \\ \dots\dots\dots \\ z_{n,n} = P_{C_n} x_n, \end{cases} \\ x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) z_{n,k}, \end{cases}$$

де $\alpha_0 = 1$, (α_n) — спадна послідовність чисел з $(0,1)$ та $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\alpha_n \to 0$.

Нехай $C = H$. Розпишемо у явному вигляді обчислювальні формули алгоритму 2

$$\begin{cases} y_n = Tx_n, \\ \begin{cases} z_{n,1} = \begin{cases} x_n - \frac{\max\left\{0, (x_1 - y_1, x_n) - \left(\|x_1\|^2 - \|y_1\|^2\right)/2\right\}}{\|x_1 - y_1\|^2}(x_1 - y_1), & x_1 - y_1 \neq 0, \\ x_n, & \text{інакше}, \end{cases} \\ z_{n,2} = \begin{cases} x_n - \frac{\max\left\{0, (x_2 - y_2, x_n) - \left(\|x_2\|^2 - \|y_2\|^2\right)/2\right\}}{\|x_2 - y_2\|^2}(x_2 - y_2), & x_2 - y_2 \neq 0, \\ x_n, & \text{інакше}, \end{cases} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{n,n} = \begin{cases} x_n - \frac{\max\left\{0, (x_n - y_n, x_n) - \left(\|x_n\|^2 - \|y_n\|^2\right)/2\right\}}{\|x_n - y_n\|^2}(x_n - y_n), & x_n - y_n \neq 0, \\ x_n, & \text{інакше}, \end{cases} \end{cases} \\ x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) z_{n,k}. \end{cases}$$

Має місце

Теорема 2. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \to H$ — фейєрівський оператор, оператор $I - T$ замкнений в 0, $a \in C$. Тоді породжена алгоритмом 2 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $P_{F(T)} a$.*

Доведення. Множини C_n — опуклі та замкнені. Покажемо, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце вкладення $F(T) \subseteq C_n$. Для $p \in F(T)$ маємо

$$\|y_n - p\| = \|Tx_n - p\| \leq \|x_n - p\|.$$

Отже, $p \in C_n$. Звідки випливає $F(T) \subseteq C_n$.

Алгоритм 2 можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) P_{C_k} x_n.$$

За теоремою 1, маємо $x_n \to z = P_F a$, де $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(P_{C_n}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Покажемо, що $z \in F(T)$, чим і доведемо теорему. Оскільки $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, то

$$\|x_n - z\| \geq \|y_n - z\| = \|Tx_n - z\|.$$

Після граничного переходу, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - z\| = 0.$$

Звідки, маємо $z = Tz$. □

Зауваження 3. Теорема 2 буде справедливою і для варіанту модифікованого гібридного методу з $y_n = \lambda_n x_n + (1-\lambda_n)Tx_n$ $(0 \leq \lambda_n \leq \overline{\lambda} < 1)$.

3. Метод Гальперна-Сузукі

Для розв'язання задачі (2) можна використати

Алгоритм 3 (метод Гальперна-Сузукі)**.** Обираємо $a \in H$, $x_1 \in C$, генеруємо послідовність елементів (x_n) за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = P_C \left(\alpha_n a + (1-\alpha_n) T_{\lambda_n} x_n \right),$$

де $\alpha_n \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $T_{\lambda_n} = \lambda_n I + (1-\lambda_n)T$, $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \subseteq (0,1)$.

Зауваження 4. Дослідження збіжності алгоритму 3 у класі нерозтягуючих операторів має довгу історію. Принципові результати отримано в роботах Б. Гальперна [22], П.-Л. Ліонса [23], Р. Віттмана [24], Х. К. Ксу [25, 26, 27] та Т. Сузукі [28].

Наша мета — доведення сильної збіжності алгоритму 3 для фейєрівських операторів $T : C \to H$ з демізамкненим в 0 оператором $I - T$.

Має місце

Лема 3. *Послідовність* (x_n) *обмежена.*

Доведення. Для $p \in F(T)$ маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &\leq \|\alpha_n a + (1-\alpha_n) T_{\lambda_n} x_n - p\| \leq \\ &\leq \alpha_n \|a - p\| + (1-\alpha_n) \|T_{\lambda_n} x_n - p\| \leq \\ &\leq \alpha_n \|a - p\| + (1-\alpha_n) \|x_n - p\| \leq \max\{\|a-p\|, \|x_n - p\|\}. \end{aligned}$$

Звідки індукцією отримуємо

$$\|x_n - p\| \leq \max\{\|x_1 - p\|, \|a - p\|\}, \quad n \geq 1.$$

Таким чином, послідовність (x_n) обмежена. □

Доведення збіжності алгоритму 3 грунтується на такій лемі.

Лема 4. *Для $z = P_{F(T)}a$ та послідовності (x_n) виконується нерівність*

$$\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \alpha_n \|x_n - z\|^2 + \\ + (1-\alpha_n)\lambda_n(1-\lambda_n) \|x_n - Tx_n\|^2 \leq 2\alpha_n (a - z, y_n - z) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

де $y_n = \alpha_n a + (1-\alpha_n)T_{\lambda_n}x_n$.

Доведення. Має місце нерівність

$$\|x_{n+1} - z\|^2 = \|P_C (\alpha_n a + (1-\alpha_n)T_{\lambda_n}x_n) - z\|^2 \leq \\ \leq \|\alpha_n (a - z) + (1-\alpha_n)(T_{\lambda_n}x_n - z)\|^2 \leq \\ \leq (1-\alpha_n)^2 \|T_{\lambda_n}x_n - z\|^2 + 2\alpha_n (a - z, y_n - z) \leq \\ \leq (1-\alpha_n) \|T_{\lambda_n}x_n - z\|^2 + 2\alpha_n (a - z, y_n - z), \quad (8)$$

де $y_n = \alpha_n a + (1-\alpha_n)T_{\lambda_n}x_n$. Маємо

$$\|T_{\lambda_n}x_n - z\|^2 = \|\lambda_n x_n + (1-\lambda_n)Tx_n - z\|^2 = \\ = \|x_n - z + (1-\lambda_n)(Tx_n - x_n)\|^2 = \\ = \|x_n - z\|^2 - 2(1-\lambda_n)(x_n - z, x_n - Tx_n) + (1-\lambda_n)^2 \|Tx_n - x_n\|^2.$$

З (1) випливає

$$\|T_{\lambda_n}x_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \lambda_n(1-\lambda_n) \|Tx_n - x_n\|^2.$$

Урахувавши це в (8), отримаємо

$$\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \alpha_n \|x_n - z\|^2 + \\ + (1-\alpha_n)\lambda_n(1-\lambda_n) \|x_n - Tx_n\|^2 \leq 2\alpha_n (a - z, y_n - z),$$

що і треба було довести. □

Має місце

Теорема 3. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \to H$ — фейєрівський оператор, оператор $I - T$ — демізамкнений в 0, $a \in H$. Тоді згенерована алгоритмом 3 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $z = P_{F(T)}a$.*

Доведення. З леми 3 випливає існування такого числа $M > 0$, що

$$|(a - z, y_n - z)| \leq M$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді з леми 4 одержуємо оцінку

$$\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \alpha_n \|x_n - z\|^2 + \\ + (1-\alpha_n)\lambda_n(1-\lambda_n) \|x_n - Tx_n\|^2 \leq 2\alpha_n M. \quad (9)$$

Використаємо прийом з роботи [29]. Розглянемо числову послідовність $(\|x_n - \bar{x}\|)$. Можливі два варіанти:

(a) існує номер $\bar{n} \in \mathbb{N}$ такий, що

$$\|x_{n+1} - z\| \leq \|x_n - z\| \quad \forall\, n \geq \bar{n};$$

(b) існує зростаюча послідовність номерів (n_k) така, що

$$\|x_{n_k+1} - z\| > \|x_{n_k} - z\| \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо варіант (a). У цьому випадку існує $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| \in \mathbb{R}$. Оскільки $\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 \to 0$ та $\alpha_n \to 0$, маємо

$$\|x_n - Tx_n\| \to 0.$$

Отже, слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині $F(T)$.

Доведемо, що

$$\limsup_{n\to\infty} (a - z, y_n - z) \le 0. \tag{10}$$

Маємо

$$(a - z, y_n - z) = \underbrace{\alpha_n (a - z, a) + (1 - \alpha_n)(1 - \lambda_n)(a - z, Tx_n - x_n)}_{\to 0} + \\ + (1 - \alpha_n)(a - z, x_n - z).$$

Виділимо з (x_n) підпослідовність (x_{n_k}), таку, що

$$\limsup_{n\to\infty} (a - z, x_n - z) = \lim_{k\to\infty} (a - z, x_{n_k} - z).$$

Можна вважати, що $x_{n_k} \rightharpoonup \tilde{x} \in F(T)$. Тому одержуємо

$$\lim_{k\to\infty} (a - z, y_{n_k} - z) = (a - z, \tilde{x} - z) = (a - P_{F(T)} a, \tilde{x} - P_{F(T)} a) \le 0,$$

чим і доводимо (10).

З (10) та нерівності

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \le (1 - \alpha_n) \|x_n - z\|^2 + 2\alpha_n (a - z, y_n - z)$$

робимо висновок, що $\|x_n - z\| \to 0$.

Розглянемо варіант (b). У цьому випадку можна розглянути послідовність номерів

$$\pi_n = \max \{ n_1 \le k \le n : \ \|x_{k+1} - z\| > \|x_k - z\| \}.$$

Послідовність (π_n) має властивості:

(i) $\pi_n \nearrow +\infty$;
(ii) $\|x_{\pi_n+1} - z\| \ge \|x_{\pi_n} - z\|$ для всіх $n \ge n_1$;
(iii) $\|x_{\pi_n+1} - z\| \ge \|x_n - z\|$ для всіх $n \ge n_1$.

З (9) та (ii) випливає

$$\alpha_{\pi_n} \|x_{\pi_n} - z\|^2 + (1 - \alpha_{\pi_n}) \lambda_{\pi_n} (1 - \lambda_{\pi_n}) \|x_{\pi_n} - Tx_{\pi_n}\|^2 \le \\ \le 2\alpha_{\pi_n} (a - z, y_{\pi_n} - z) \le 2\alpha_{\pi_n} M.$$

Звідси

$$\|x_{\pi_n} - Tx_{\pi_n}\| \to 0.$$

Отже, слабкі часткові границі послідовності (x_{π_n}) належать множині $F(T)$ та має місце нерівність

$$\limsup_{n\to\infty} (a - z, y_{\pi_n} - z) \le 0.$$

Маємо

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_{\pi_n} - z\|^2 \le 2 \limsup_{n\to\infty} (a - z, y_{\pi_n} - z) \le 0.$$

Отже, $\lim_{n\to\infty} \|x_{\pi_n} - z\| = 0$. Оскільки

$$\|x_{\pi_n+1} - x_{\pi_n}\| \le \alpha_{\pi_n} \|a - x_{\pi_n}\| + (1 - \alpha_{\pi_n})(1 - \lambda_{\pi_n}) \|Tx_{\pi_n} - x_{\pi_n}\| \to 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{\pi_n+1} - z\| = 0.$$

Враховуючи нерівності (iii), отримуємо, що $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| = 0$. □

Зауваження 5. Для схеми з похибками

$$y_{n+1} = P_C (\alpha_n a + (1 - \alpha_n) T_{\lambda_n} y_n + e_n)$$

має місце аналогічне теоремі 3 твердження за умови $(\|e_n\|) \in \ell_1$.

4. Заключні зауваження

Модифікований гібридний метод легко адаптувати для задачі пошуку спільної нерухомої точки скінченної родини фейєрівських операторів

$$\{T_1, T_2, ..., T_p\}, \quad T_i : C \to H.$$

Алгоритм 4. Для $a \in C$, $x_1 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in H$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_{n,i} = T_i x_n, \\ C_{n,i} = \{z \in C : \|y_{n,i} - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ \begin{cases} z_{n,1} = \left(\frac{1}{p} P_{C_{1,1}} + \frac{1}{p} P_{C_{1,2}} + ... + \frac{1}{p} P_{C_{1,p}}\right) x_n, \\ z_{n,2} = \left(\frac{1}{p} P_{C_{2,1}} + \frac{1}{p} P_{C_{2,2}} + ... + \frac{1}{p} P_{C_{2,p}}\right) x_n, \\ .... \\ z_{n,n} = \left(\frac{1}{p} P_{C_{n,1}} + \frac{1}{p} P_{C_{n,2}} + ... + \frac{1}{p} P_{C_{n,p}}\right) x_n, \end{cases} \\ x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{k=1}^n (\alpha_{k-1} - \alpha_k) z_{n,k}. \end{cases}$$

Алгоритм 5. Для $a \in C$, $x_1 \in C$ генеруємо послідовність елементів $x_n \in H$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = \left(\frac{1}{p} T_1 + \frac{1}{p} T_2 + ... + \frac{1}{p} T_p\right) x_n, \\ C_n = \{z \in C : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\}, \\ \begin{cases} z_{n,1} = P_{C_1} x_n, \\ z_{n,2} = P_{C_2} x_n, \\ .... \\ z_{n,n} = P_{C_n} x_n, \end{cases} \\ x_{n+1} = \alpha_n a + \sum_{k=1}^n (\alpha_{k-1} - \alpha_k) z_{n,k}. \end{cases}$$

Теорема, аналогічна теоремі 3, має місце для схеми в'язкої апроксимації

$$y_{n+1} = P_C (\alpha_n S y_n + (1 - \alpha_n)(\lambda_n y_n + (1 - \lambda_n) T y_n)),$$

де $S : C \to C$ — стискаючий оператор ($\alpha_n \in (0,1)$, $(\alpha_n) \in c_0 \backslash \ell_1$, $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \subseteq (0,1)$). За умов теореми 3, послідовність (y_n) сильно збігається до єдиного розв'язку варіаційної нерівності

$$z \in F(T) : \ (z - Sz, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in F(T).$$

Автор щиро вдячний Ю. В. Маліцькому за конструктивні зауваження.

Література

1. Еремин И. И. Методы фейеровских приближений в выпуклом программировании / И. И. Еремин // Матем. заметки. — 1968. — 3:2. — С. 217–234.
2. Еремин И. И. Нестационарные процессы математического программирования / И. И. Еремин, В. Д. Мазуров. — Москва: Наука, 1979. — 228 с.
3. Васин В. В. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения) / В. В. Васин, И. И. Еремин. — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
4. Еремин И. И. Фейеровские процессы в теории и практике: обзор последних результатов / И. И. Еремин, Л. Д. Попов // Известия вузов. Математика. — 2009. — № 1. — С. 44–65.
5. Petryshyn W. V. Strong and Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations for Quasi-Nonexpansive Mappings / W. V. Petryshyn, T. E. Williamson // J. Math. Anal. Appl. — 1973. — 43. — P. 459–497.
6. Nakajo K. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups / K. Nakajo, W. Takahashi // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — 279. — P. 372—379.
7. Bauschke H. H. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces / H. H. Bauschke, P. L. Combettes. — Springer, 2011. — 408 + xvi p.
8. Семенов В. В. О методе параллельной проксимальной декомпозиции для решения задач выпуклой оптимизации / В. В. Семенов // Проблемы управления и информатики, 2010. — № 2. — С. 42–46.
9. Семенов В. В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами / В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 1 (100). — С. 121–129.
10. Войтова Т. А. Метод решения двухэтапных операторных включений / Т. А. Войтова, В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3 (102). — С. 34–39.
11. Маліцький Ю. В. Нові теореми сильної збіжності проксимального методу для задачі рівноважного програмування / Ю. В. Маліцький, В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3 (102). — С. 79–88.
12. Семенов В. В. Сильно збіжний алгоритм пошуку нерухомої точки багатозначного фейєрівського оператора / В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 4 (103). — С. 89-93.
13. Войтова Т. А. Сильно збіжний модифікований варіант методу Корпелевич для задач рівноважного програмування / Т. А. Войтова, С. В. Денисов, В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — № 1 (104). — С. 10–23.
14. Денисов С. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність / С. В. Денисов, В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — № 3 (106). — С. 27-32.

15. Войтова Т. А. Методи регуляризації та декомпозиції варіаційних задач / Т. А. Войтова, Ю. В. Маліцький, В. В. Семенов // Праці міжнародної молодіжної математичної школи "Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXVII)— Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. — С. 30–31.
16. Lyashko S. I. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems / S. I. Lyashko, V. V. Semenov, T. A. Voitova // Cybernetics and Systems Analysis. — 2011. — N. 4. — P. 631–639.
17. Апостол Р. Я. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей / Р. Я. Апостол, А. А. Гриненко, В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — № 1 (107). — С. 3–14.
18. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами / В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — № 2 (108). — С. 53–58.
19. Войтова Т. А. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації / Т. А. Войтова, С. В. Денисов, В. В. Семенов // Доповіді НАН України. — 2012. — № 2. — С. 56–62.
20. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings / Z. Opial // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — 73. — P. 591-597.
21. Takahashi W. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces / W. Takahashi, Y. Takeuchi, R. Kubota // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 341. — P. 276—286.
22. Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps / B. Halpern // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — 73. — P. 957–961.
23. Lions P.-L. Approximation de points fixes de contractions / P.-L. Lions // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B **284** (1977), A1357-–A1359.
24. Wittmann R. Approximation of fixed points of nonexpansive mappings / R. Wittmann // Arch. Math. — 1992. — 58. — P. 486–491.
25. Xu H. K. Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings / H. K. Xu // Bull. Austral. Math. Soc. — 2002. — 65 — P. 109–113.
26. Xu H. K. Iterative algorithms for nonlinear operators / H. K. Xu // J. London Math. Soc. — 2002. — 2. — P. 240-256.
27. Xu H. K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings / H. K. Xu // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — 298. — P. 279–291.
28. Suzuki T. A sufficient and necessary condition for Halpern-type strong convergence to fixed points of nonexpansive mappings / T. Suzuki // Proc. of the AMS. — 2007, v. 135. — n. 1. — P. 99–106.
29. Mainge P.-E. Strong Convergence of Projected Subgradient Methods for Nonsmooth and Nonstrictly Convex Minimization / P.-E. Mainge // Set-Valued Analysis. — 2008. — V. 16. — P. 899–912.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 22.02.2012