Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №2(112) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 519.852:519.876

АНАЛІЗ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ МЕТОДОМ ДОПУСТИМИХ БАЗИСНИХ МАТРИЦЬ

В. І. Кудін

Резюме. Запропоновано метод аналізу та оптимізації лінійної системи — метод допустимих базисних матриць (МДБМ). Метод (зокрема, розв'язання задачі лінійного програмування) грунтується на концепції базисних матриць. В роботі наведено всі необхідні теоретичні обгрунтування для побудови алгоритмічних схем. Встановлено умови єдиності та неєдиності оптимальних розв'язків. Метод призначений для розв'язання задач великої розмірності, ідентифікації пасивних обмежень моделі в ході ітераційного процесу.

Вступ

Загальна теорія двоїстості Дж. Неймана [1] знайшла своє підтвердження в сімплекс-методах, що були розроблені рядом авторів [1–5] як для прямої (канонічної), так і для двоїстої задач. Для подальших застосувань стало важливим не лише "здатність" методу знаходити оптимальні розв'язки, але й проводити аналіз властивостей системи на різних стадіях обчислень. В даній роботі розглядається метод допустимих базисних матриць (МДБМ) для проведення аналізу лінійних систем, зокрема, задач лінійного програмування.

В основі методу лежить ідея базисної матриці. В базисну матрицю, в ході ітераційного процесу, вводяться і виводяться нормалі обмежень моделі. Цей метод поєднує в собі переваги симплекс-методів, аналізує властивості компонент моделі на стадії дооптимізації, оптимізації та постоптимізації, може бути поширеним для аналізу лінійних моделей з нелінійними компонентами — слабонелінійних. Запропонований МДБМ не лише знаходить оптимальний розв'язок, але й дозволяє ідентифікувати пасивні та неактивні обмеження моделі (лінійні нерівності) в ході ітераційного аналізу, встановлювати існування, єдиність та неєдиність оптимальних розв'язків.

Основні положення методу допустимих базисних матриць

Основою запропонованого методу є ідея порядкової базисної матриці. Базисні матриці в ході ітерацій послідовно змінюються вводом-виводом із неї рядків-нормалей обмежень. Збіжність до оптимального розв'язку "іде" за допустимими базисними вершинами багатогранної множини.

Розглянемо задачу лінійного програмування вигляду

$$\max Bu, \tag{1}$$

$$A^T u \leq C^T, \tag{2}$$

де $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$, $C = (c_1, c_2, .., c_n)$, $u = (u_1, u_2, .., u_m)^T$, $a_j = (a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jm})$, $j = \overline{1, n}$ — рядки матриці A^T, T — знак транспонування. Будемо вважати, що $n > m$, а множина допустимих розв'язків задачі обмежена. Модель (1)–(2) досліджується в просторі E^m.

Означення 1. Підматрицю $A_б$ матриці A^T, складену із m лінійно незалежних рядків, будемо називати допустимою базисною, а розв'язок u_0 системи рівнянь $A_б u = C^0$, де $C^0 = (c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m})^T \subset C^T-$ (підвектор), що задовольняє (2), допустимим базисним.

Базисний розв'язок u_0 будемо вважати виродженим, якщо він є розв'язком перевизначеної системи лінійних рівнянь (перетин більш ніж m гіперплощин у вершині u_0).

Означення 2. Дві базисні матриці, в яких відмінний один, наприклад, k-й рядок, будемо називати суміжними.

Нехай e_{ri} — елементи матриці $A_б^{-1}$, оберненої до $A_б$; $u_0 = (u_{01}, u_{02}, ..., u_{0m})^T$ — базисний розв'язок; $\alpha_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, ..., \alpha_{rm})$ — вектор розкладення нормалі обмеження $a_r u_0 \leq c_r$ за рядками базисної матриці $A_б$, тобто $a_r = \alpha_r A_б$; $\alpha_0 = (\alpha_{01}, \alpha_{02}, ..., \alpha_{0m})$ — вектор розкладення вектору-градієнту цільової функції (1) за рядками базисної матриці $A_б$, який визначається, як розв'язок системи рівнянь $B = \alpha_0 A_б$; $\Delta_r = a_r u_0 - c_r$ — нев'язка r-го обмеження (1) у вершині u_0; J_b, J_H ($J = J_b \bigcup J_H$) — множини індексів, відповідно базисних і небазисних обмежень (2). Введені величини (елементи методу) в новій базисній матриці $\overline{A}_б$, яка утворюється заміною рядка a_k на a_l, що не входить в базисну матрицю $A_б$, будемо позначати рискою зверху, тобто $\overline{\alpha}_r$, $\overline{\Delta}_k$, $\overline{e}_{ri}$, $\overline{\alpha}_0$.

Теорема 1. *Між коефіцієнтами розвинення нормалей обмежень (2), цільової функції (1) за рядками базисної матриці, елементами обернених матриць, базисними розв'язками, нев'язками обмежень (2), значеннями цільової функції в двох суміжних базисних матрицях мають місце такі співвідношення:*

$$\overline{\alpha}_{rk} = \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}, \overline{\alpha}_{ri} = \alpha_{ri} - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \alpha_{li}, \ r = \overline{0, n}; \ i = \overline{1, m}; \ i \neq k; \tag{3}$$

$$\overline{e}_{rk} = \frac{e_{rk}}{\alpha_{lk}}, \overline{e}_{ri} = e_{ri} - \frac{e_{rk}}{e_{lk}} \alpha_{li}, \ r = \overline{1, m}; \ i = \overline{1, m}; \ i \neq k; \tag{4}$$

$$\overline{u}_{0j} = u_{0j} - \frac{e_{jk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \ j = \overline{1, m}; \tag{5}$$

$$\overline{\Delta}_k = -\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}}, \overline{\Delta}_r = \Delta_r - \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \ r = \overline{1, n}; \ r \neq k; \tag{6}$$

$$B\overline{u}_0 = Bu_0 - \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{lk}} \Delta_l, \tag{7}$$

причому умовою опорності базисної матриці при вводі вектору нормалі a_l обмеження $a_l u \leq c_l$ k-м рядком базисної матриці $A_б$ є виконання умови $\alpha_{lk} \neq 0$, умовою допустимості опорного базисного розв'язку є — $\alpha_{lk} < 0$, *зростання цільової функції* — $\alpha_{0k} < 0$, *спадання цільової функції* — $\alpha_{0k} > 0$ *та незмінності значень цільової функції* — $\alpha_{0k} = 0$.

Доведення наведено в [3].

Нехай u_0 — допустимий базисний розв'язок задачі, тобто існує базисна матриця $A_б$ така, що $A_б u_0 = c^0$ і $\Delta_r \le 0$, $r = \overline{1,m}$.

Теорема 2. *Для того, щоб* $B\overline{u}_0 > Bu_0$ *і новий розв'язок* $\overline{u}_0$ *зберігався допустимим базисним для задачі (1), (2), необхідно і достатньо, щоб існували такі номери* k *та* l, *для яких* $\alpha_{0k} < 0$, $\alpha_{lk} < 0$ *і* $\frac{\Delta_r}{\Delta_l} \ge \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}$, $r = \overline{1,n}$.

Означення 3. Допустимий базисний розв'язок u_0 оптимальний, якщо $Bu_0 \ge Bu$ для всіх u, що задовольняють (2).

Наслідок 1. *Для того, щоб* $B\overline{u}_0 < Bu_0$, *а новий розв'язок* $\overline{u}_0$ *зберігався допустимим базисним для задачі (1), (2) необхідно і достатньо, щоб існували такі номери* k *та* l, *для яких*
$\alpha_{0k} > 0, \quad \alpha_{lk} < 0, \quad \frac{\Delta_r}{\Delta_l} \ge \frac{\alpha_{rk}}{\alpha_{lk}}$, $r = \overline{1,n}$.

Теорема 3. *Для оптимальності базисного розв'язку* u_0 *необхідно і достатньо, щоб* $\alpha_{ok} \ge 0$ *для* $k = \overline{1,m}$.

Наслідок 2. *Для оптимальності базисного розв'язку* u_0 *та базисної матриці* $A_б$ *для задачі* $\max(-Bu)$, $u \in U$ *необхідно і достатньо, щоб* $\alpha_{0k} \le 0, k = \overline{1,m}$.

Теорема 4. *Якщо* $\exists$ *індекс* k *такий, що* $\alpha_{0k} < 0$ *і* $\alpha_{rk} \ge 0$, *для* $r \notin J_б$, *то цільова функція задачі необмежена на множині допустимих розв'язків.*

Теорема 5. *Якщо* $\alpha_{0k} < 0$ *і* $\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{\substack{r,\\ \alpha_{rk}<0}} \frac{\Delta_r}{\alpha_{rk}}$, *то* $B\overline{u}_0 \ge Bu_0$ *і* $\overline{u}_0$ — *допустимий базисний розв'язок.*

Доведення теорем 2—5 є в [4].

Дослідження пасивності та неактивності обмежень моделі

Розглянемо застосування МДБМ для аналізу (1)—(2), зокрема, для виявлення пасивних обмежень.

Нехай $U = \{u / a_j u \le c_j,\ j \in J\}$, $U_r = \{u / a_j u \le c_j,\ j \in J,\ J \ne r\}$, $U^0 = \{u_0 / Bu_0 = \max\limits_{u \in U} Bu, u \in U\}$, $U_r^0 = \{u_0 / Bu_0 = \max\limits_{u \in U_r} Bu, u \in U_r\}$.

Означення 4. Обмеження $a_r u \le c_r$ пасивне (несуттєве, надлишкове), якщо $U = U_r$.

Означення 5. Обмеження $a_r u \le c_r$ неактивне, якщо $U^0 = U_r^0$.

Означимо через $A^0_{б(k)}$ матрицю, яка отримується із базисної матриці $A_б$, заміною k-го рядка вектором B.

Означення 6. Матрицю B_k^0 будемо називати оптимально базисною, якщо існує обернена до неї $(A^0_{б(k)})^{-1}$, $A^0_{б(k)} \cdot u_0 = d_0$, де
$d_0 = (c_1^0, ..., c_{k-1}, -Bu_0, c^0_{k+1}, ..., c^0_m)^T$.

Теорема 6. *Для того, щоб обмеження $a_r u \leq c_r$ було пасивним необхідно і достатньо існування $A_б$, відносно якої $\alpha_{rk} \geq 0$ для $k = \overline{1,m}$.*

Теорема 7. *Для того щоб $a_r u \leq c_r$ обмеження було неактивним для (2) необхідно і достатньо, щоб існувала оптимально базисна матриця $A^0_{б(k)}$, $k = \overline{1,m}$, відносно якої $\alpha_{ri} \geq 0$ для всіх $i = \overline{1,m}$.*

Наслідок 3. *Для несумісності множини U, утвореної перетином*
$U_r = \{u/a_j u \leq c_j,\ j \in J,\ j \neq r\}$ та $\Pi^{(+)}_r = \{u/a_r u\ lec_r,\ r \in J\}$,
тобто $U = U_r \cap \Pi^{(+)}_r = \varnothing$, необхідно і достатньо існування базисної матриці $A_б$, опорної вершини u_0, що виконується при
$\alpha_{ri} \leq 0, \quad i = \overline{1,m}$ та $\Delta_r = a_r u_0 - c_r > 0$.

Доведення теорем 6,7 наведено в [4].

Властивості структурних елементів моделі (1)–(2).

Нехай існує базисна матриця $A_б$, ранг якої m та індекс k, тобто $\alpha_{rk} = 0,\ r \notin J_б$, тоді довільна сімплексна ітерація по вводу на k-у позицію базисної матриці вектора нормалі a_l обмеження $a_l u \leq c_l\ \forall_l \notin J_б$ утворює нову матрицю, ранг якої $m-1$, що визначає одновимірну необмежену грань з направляючим вектором e_k, де e_k — вектор-стовпець k матриці $A_б^{-1}$, який позначимо $(A_б^{-1})_k$.

Наслідок 4. *Для точок одновимірної необмеженої грані з направляючим вектором e_k виконуються умови:*
при $\alpha_{0k} < 0$ — необмежене зростання цільової функції,
якщо $\alpha_{0k} > 0$ — необмежене спадання цільової функції,
якщо $\alpha_{0k} = 0$, то цільова функція незмінна,
$\overline{\Delta}_k$ — оцінка обмеження, нормаль якого виводиться з базисної матриці, необмежено спадае, решта $\Delta_r, r \notin J_б$ — незмінні і при цьому від'ємні.

Наслідок 5. *Якщо $\alpha_{0k} = 0$ і $\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{\substack{r,\, r \notin J_б \\ \alpha_{rk} < 0}} \frac{\Delta_r}{\alpha_{rk}}$, то: $B\overline{u}_0 = Bu_0$, $\overline{u}_0 \neq u_0$, $\overline{u}_0$ — допустимий базисний розв'язок, направляючий вектор $\overline{e}_k$ ребра, що з'еднуе u_0 та $\overline{u}_0$ — ортогональний вектору нормалі цільової функції B.*

Наслідок 6. *Для ортогональності направляючого вектора ребра, що з'еднуе u_0 та $\overline{u}_0$ та вектора нормалі B необхідно і достатньо $\alpha_{0k} = 0$.*

Наслідок 7. *Для коленіарності направляючого вектора ребра, що поеднує u_0 та $\overline{u}_0$ та вектора B необхідно і достатньо $\alpha_{0k} = 1$.*

Наслідок 8. *Якщо $\alpha_0 = (\alpha_0^{(-)}, \alpha_0^{(0)}, \alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(+)})$, де*

$$\alpha_0^{(-)} = \{\ i/i = \overline{1,m},\ \alpha_{0i} < 0\ \},$$

$$\alpha_0^{(+)} = \{\ i/i = \overline{1,m},\ \alpha_{0i} > 0\ \},$$

$$\alpha_0^{(0)} = \{\ i/i = \overline{1,m},\ \alpha_{0i} = 0\ \},$$

$$\alpha_0^{(1)} = \{\ i/i = \overline{1,m},\ \alpha_{0i} = 1\ \},$$

тоді якщо $\alpha_0^{(-)} \neq \varnothing$, *то переходи в сімплексній схемі, пов'язані з* $\alpha_{oi} < 0$, *ведуть до росту цільової функції;*
якщо $\alpha_0^{(0)} \neq \varnothing$, *то відповідні переходи в сімплексній схемі задовольняють умові ортогональності ребра та вектора* B;
якщо $\alpha_0^{(1)} \neq \varnothing$, *то відповідні переходи в сімплексній схемі задовольняють умові колінарності ребра* e_i *та вектора* B;
якщо $\alpha_0^{(+)} \neq \varnothing$, *то відповідні переходи в сімплексній схемі, пов'язані з* $\alpha_{0i} > 0$, *ведуть до спаду значень цільової функції;*
за умови виконання умов теорем 1, 2, 5.

Наслідок 9. *Якщо існує індекс* k *такий, що* $\alpha_{0k} = 0$ *і* $\alpha_{rk} \geq 0$ *для всіх небазисних* r , *то область* U, *що визначає (1), (2) має необмежене ребро з направляючим вектором* e_k, *причому значення цільової функції* $B\overline{u}_0 = Bu_0$, $\overline{u}_0 \neq u_0$, *а* e_k *та* B *є ортогональними.*

Наслідок 10. *Якщо існує індекс* k *такий, що* $\alpha_{0k} = 1$ *та* $\alpha_{rk} \geq 0$ *для всіх небазисних* r, *то область* U, *що визначає (1), (2) має необмежене ребро з направляючим вектором* e_k, *причому значення цільової функції спадатиме* $B\overline{u}_0 = Bu_0 - \lambda$, *а* e_k *та* B *коленіарні.*

Наслідок 11. *Якщо існує індекс* k *такий, що* $\alpha_{0k} > 0$ *та* $\alpha_{rk} \geq 0$ *для всіх небазисних* r, *то цільова функція задачі необмежена знизу на множині допустимих розв'язків.*

Наслідок 12. *Якщо* $\alpha_{0k} > 0$ *і* $\frac{\Delta_l}{\alpha_{lk}} = \min\limits_{r \in J_b,\, \alpha_{rk} < 0} \frac{\Delta_r}{\alpha_{rk}}$, *то* $B\overline{u}_0 < Bu_0$, *а* $\overline{u}_0$ — *допустимий базисний розв'язок.*

Справедливість наслідків 3–12 безпосередньо випливає з формул (3)–(7) теореми 1 та теореми 3.

Виродженість базисного розв'язку задачі лінійного програмування.

Розглянемо таку ε-задачу:

$$\max_{u \in U} \sum_{i=1}^{m} b_i u_i, \tag{8}$$

де U визначається системою нерівностей

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} u_i \leq c_j + \varepsilon^{V_{j(0)}} \cdot \varepsilon^{n+1-j} = c_j(\varepsilon), \tag{9}$$

$v_{(0)} = (v_{1(0)}, v_{2(0)}, ..., v_{j(0)}, ..., v_{n(0)})$ — n–вимірний вектор, компоненти якого визначаються співвідношеннями

$$V_{j(0)} = \begin{cases} 0, & j \in J_б, \\ j_0, & j_0 < j - m - 1, \quad j \notin J_б \end{cases}, \varepsilon \geq 0, j \in J. \tag{10}$$

Задачу (1), (2) будемо називати породжуючою, а (8)–(10) — "збуреною".

Теорема 8. *Якщо* u_0 *базисний розв'язок задачі (1),(2), то існує* $\varepsilon_1 > 0$ *таке, що для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ *відповідний базисний розв'язок задачі (8)–(10) буде невироджений.*

Теорема 9. *Існує $\varepsilon_2 > 0$ таке, що для інтервалу $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ε-задача буде невиродженою.*

Теорема 10. *Довільний опорний базисний розв'язок ε-задачі буде опорним базисним розв'язком (1),(2), тобто породжуючої задачі. Оптимальному базисному розв'язку останньої задачі відповідає оптимальний базисний розв'язок "збуреної" задачі при $\varepsilon = 0$.*

Теореми 8–10 обгрунтовані в [4].

Положення теорем 8—10 вказують на існування малих збурень для виродженої задачі (1)—(2) у вигляді (8)—(10) — невиродженої задачі.

Умови єдиності та необмеженості множини оптимальних розв'язків.

Наслідок 13. *Необхідною і достатньою умовою єдиності оптимального опорного, допустимого розв'язку u_0 є виконання умови $\alpha_{0i} > 0,\ i = \overline{1,m}$.*

Наслідок 14. *Допустимий, опорний, базисний розв'язок u_0 задачі неєдиний тоді і тільки тоді, коли існує k таке, що $\alpha_{0k} = 0$.*

Наслідок 15. *Розв'язки задачі (1),(2) утворюють необмежену замкнену множину тоді і тільки тоді, коли серед $k \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ існують такі, що виконуються умови $\alpha_{0k} = 0,\ \alpha_{jk} 0,\ j \notin J_б$.*

Наслідок 16. *Розмірність множини оптимальних розв'язків визначається k_0, де k_0 — потужність множини $k_0 = \left\{k/\alpha_{0k} = 0,\ k = \overline{1,m}\right\}$.*

Наслідки 13–16 випливають з теореми 1 (формула (7)) та теореми 3.

Приведені положення теорем охоплюють всі випадки для організації розширеного аналізу лінійної системи на основі методу базисних матриць:

1. Якщо існує базисна матриця $A_б$ така, що $\alpha_{0k} \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, то базисна матриця і відповідний їй розв'язок u_0 оптимальний, причому при $\alpha_{0k} > 0$, $k = \overline{1,m}$ — розв'язок єдиний, якщо $\exists\, i_0$ таке, що $\alpha_{0i_0} = 0$ — розв'язок неєдиний.

2. Якщо існує k таке, що $\alpha_{0k} < 0$, $\alpha_{rk} \geq 0$ для всіх $r \in J_H$, то цільова функція задачі необмежена зверху, а при $\alpha_{0k} > 0$ та $\alpha_{rk} \geq 0$ для всіх $r \in J_H$ — необмежена знизу на множині допустимих розв'язків.

3. Якщо існує базисна матриця $A_б$ та розв'язок u_0 такий, що $\alpha_{rk} \leq 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_r > 0$, то система нерозв'язна за несумісністю обмежень.

4. Якщо існує k таке, що $\alpha_{rk} < 0$, то з допомогою перетворень (3)–(7) можна перейти до нової базисної матриці та розв'язку з більшим значенням цільової функції при $\alpha_{0k} < 0$, зменшенням цільової функції при $\alpha_{0k} > 0$ та незмінності значень при $\alpha_{0k} = 0$.

5. Якщо існує базисна матриця $A_б$ та розв'язок u_0 такі, що $\alpha_{rk} \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_r \leq 0$, то обмеження $a_r u \leq c_r$ пасивне.

6. Якщо існує на деякій ітерації оптимально-базисна матриця $A_б$, відносно якої $\alpha_{rk} \geq 0$, $k = \overline{1,m}$, $\Delta_r \leq 0$, то обмеження $a_r u \leq c_r$ неактивне.

Висновок

На основі наведених вище положень теорем можна побудувати різноманітні алгоритмічні схеми аналізу моделі лінійного програмування методом базисних матриць. Запропоновані вище положення методу (теореми та наслідки) можуть бути застосовані, зокрема, для побудови процедур аналізу моделі на стадії дооптимізації: уточнення меж змінних та оптимального розв'язку (1), (2), ідентифікації пасивних обмежень, локалізації області оптімума, знаходження наближеного розв'язку, побудови агрегуючих множин для U, "виділення" фундаментальної системи обмежень, тобто обмежень (2) утворюючих U.

Результати обчислювального експерименту за методом базисних матриць наведено в роботах [6–8].

Література

1. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. В 2-х т. / А. Схрейвер // Т. 1 — М., 1991. — 380 с.
2. Черников С.Н. Линейные неравенства. / С.Н. Черников // М. — 1968. — 488 с.
3. Кудин В.И. Анализ свойств линейной систетемы методом искусственных базисных матриц. / В.И. Кудин, С.И. Ляшко, Н.М. Хритоненко, Ю.П. Яценко // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4 — С.119–127.
4. Волкович В.Л. Релаксационная схема строчного симплекс метода / В.Л. Волкович, В.М. Войналович, В.И. Кудин// Автоматика. — 1987.— № 4 — С. 79–86.
5. Кудін В.І. Метод штучних базисних матриць / В.І. Кудін, С.І. Ляшко, Н.М. Хритоненко, Ю.П. Яценко // Доповіді НАН України. — 2007. — № 9. — С. 29–33.
6. Богаенко В.А. О вычислительной эффективности схем метода базисных матриц / В.А. Богаенко, В.В. Скопецкий, В.И. Кудин // Праці міжнародного симпозіуму Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXV), Кацивелі 24–29 вересня 2009 р. — Т. 1. — Київ, 2009. — С. 68–72.
7. Богаенко В.А. Анализ компьютерных схем метода базисных матриц. / В.А. Богаенко, В.В. Скопецкий, В.И. Кудин // Компьютерная математика — 2009. — № 2. — С. 3–13.
8. Богаенко В.А. О свойствах параллельных вычислительных схем метода базисных матриц / В.А.Богаенко, В.И. Кудин // Математичне та комп'ютерне моделювання. — Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — 2009. — Вип.2. — С. 3–14.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 11.09.2013