Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2013, № 2 (112)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ЯВНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В. В. Семенов[1]

Резюме. В работе для решения вариационных неравенств с монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве, предложен алгоритм расщепления без вычисления резольвент. Доказана теорема о слабой эргодической сходимости алгоритма. Указаны ситуации, когда имеет место сильная сходимость.

Ключевые слова: вариационные неравенства, максимальный монотонный оператор, алгоритм расщепления, среднее по Чезаро, сходимость.

1. Введение

Многие задачи ряда прикладных математических дисциплин могут быть записаны в форме вариационных неравенств, численное решение которых является ареной интенсивных исследований [1, 2, 3, 4]. При решении сложных задач важное значение имеют различные схемы расщепления, позволяющие сводить решение исходной задачи к решению последовательности задач более простой структуры.

Популярные сейчас алгоритмы расщепления для вариационных неравенств

$$\text{найти } x \in C: \ \exists u \in \sum_i A_i x \ \text{ и } \ (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

или более общих задач поиска нулей суммы монотонных операторов

$$\text{найти } x \in H: \ 0 \in \sum_i T_i x,$$

используют на каждом шаге резольвенты многозначных операторов [1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Явный шаг в алгоритмах цитируемых работ используется только для однозначных операторов-слагаемых. Благодаря неявному характеру эти методы обладают изрядным запасом устойчивости, однако вычисление резольвенты часто требует высоких вычислительных затрат.

[1]Исследование выполнено при финансовой помощи ГФФИ Украины (проект GP/F49/061) и Верховной Рады Украины (Именная стипендия ВР Украины для молодых ученых в 2013 году).

В алгоритмике выпуклой оптимизации для задач вида

$$f_1 + f_2 + ... + f_n \to \min_C$$

в последнее время появилась серия субградиентых алгоритмов расщепления явного характера [13, 14]. Эти схемы интересно перенести на случай вариационных неравенств, поскольку инструкция

$$y := P_C\left(x - \lambda u\right), \;\; u \in Ax, \;\; \lambda > 0,$$

как правило намного проще вычисления значения y резольвенты оператора $\lambda A_i + N_C$ в точке x, то есть решения вариационного неравенства:

$$\text{найти } y \in C: \;\exists u \in A_i y \;\text{ и }\; \lambda\left(u, z-y\right) + \left(y-x, z-y\right) \geq 0 \quad \forall z \in C.$$

Отталкиваясь от [14] и опираясь на технику [15, 16, 17, 18, 19, 20], в данной работе мы предлагаем и обосновываем алгоритм расщепления без вычисления резольвент для решения вариационных неравенств с монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Заметим, что наше сообщение носит пока весьма предварительный характер.

2. Вариационное неравенство и вспомогательные факты

Введем обозначения и сформулируем задачу. Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Обозначим символом P_K оператор метрической проекции пространства H на замкнутое выпуклое множество $K \subseteq H$.

Напомним некоторые понятия [1, 2]. Пусть $A : H \to 2^H$ — оператор с графиком $\mathrm{gr}(A) = \{(x,u) : \; y \in Ax\}$.

Определение 1. Оператор $A : H \to 2^H$ называют монотонным, если для любых (x,u), $(y,v) \in \mathrm{gr}(A)$ выполняется неравенство

$$(u - v, x - y) \geq 0.$$

Определение 2. Оператор $A : H \to 2^H$ называют сильно монотонным с константой $\mu > 0$, если для любых (x,u), $(y,v) \in \mathrm{gr}(A)$ выполняется неравенство

$$(u - v, x - y) \geq \mu \left\|x - y\right\|^2.$$

Определение 3. Оператор $A : H \to 2^H$ называют максимальным монотонным, если для любого монотонного оператора $B : H \to 2^H$ из соотношения $\mathrm{gr}(A) \subseteq \mathrm{gr}(B)$ следует $\mathrm{gr}(A) = \mathrm{gr}(B)$.

Пусть:

- $A_i : H \to 2^H$ — монотонный оператор, $i = \overline{1,p}$;
- $A = \sum_{i=1}^p A_i$ — максимальный монотонный оператор;
- $C \subseteq \bigcap_{i=1}^p \mathrm{dom}(A_i)$ — замкнутое выпуклое множество.

Вариационное неравенство с оператором A на множестве C формулируется следующим образом:

$$\text{найти } x \in C: \;\exists u \in Ax \;\text{ и }\; (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{1}$$

Множество решений задачи (1) обозначим $VI(A,C)$. Важным фактом о структуре множества решений вариационного неравенства является следующая

Лемма 1. *Если оператор $A : H \to 2^H$ — максимальный монотонный, то*

$$VI(A,C) = \{x \in C : \ (v, y - x) \geq 0 \ \ \forall y \in C \ \forall v \in Ay\} \,.$$

В частности, множество $VI(A,C)$ выпуклое и замкнутое.

Цель данной работы состоит в построении и исследовании явного алгоритма расщепления для решения вариационного неравенства (1). Под явным мы понимаем алгоритм не содержащий операций вычисления резольвент операторов $A_i + N_C$, где N_C — нормальный конус множества C в точке-аргументе, то есть

$$N_C x = \begin{cases} \{w \in H : \ (w, y - x) \leq 0\} \,, & x \in C, \\ \emptyset, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для доказательства сходимости алгоритма нам потребуются следующие факты.

Лемма 2 ([2]). *Пусть неотрицательные последовательности (a_n), (b_n) таковы, что $a_{n+1} \leq a_n + b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Тогда существует предел $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$.*

Лемма 3 (G.B. Passty, [17]). *Пусть H — гильбертово пространство; $F \subseteq H$ — непустое множество; (x_n) — последовательность элементов H и $z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}$, где (λ_n) — последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$. Предположим, что: 1) предел произвольной слабо сходящейся подпоследовательности (z_{n_k}) лежит в F; 2) для произвольного $y \in F$ существует $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$. Тогда последовательность (z_n) слабо сходится к некоторому элементу $z \in F$.*

3. Явный алгоритм расщепления

Опишем явный алгоритм расщепления для вариационного неравенства (1).

Зафиксируем последовательность положительных чисел (λ_n) удовлетворяющую условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty \,, \ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < +\infty. \tag{2}$$

Алгоритм 1.

1) *Задаем $x_1 \in C$; $n := 1$.*
2) *Для x_n находим элементы:*

$$y_{(n,i)} = P_C\left(x_n - \lambda_n u_{(n,i)}\right) \,, \ \ u_{(n,i)} \in A_i x_n, \ \ i = \overline{1,p}.$$

3) *Если $y_{(n,i)} = x_n$ для всех $i = \overline{1,p}$, то СТОП. Иначе переходим на шаг 4.*

4) *Полагаем*

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}y_{n,1} + \frac{1}{p}y_{n,2} + ... + \frac{1}{p}y_{n,p},$$

$n := n+1$, *переходим на шаг 2.*

Покажем, что если $y_{(n,i)} = x_n$ для всех $i = \overline{1,p}$, то $x_n \in VI(A,C)$. Действительно, пусть $x_n = P_C\left(x_n - \lambda_n u_{(n,i)}\right)$ для всех $i = \overline{1,p}$. Тогда,

$$\left(x_n - \left(x_n - \lambda_n u_{(n,i)}\right), y - x_n\right) = \lambda_n\left(u_{(n,i)}, y - x_n\right) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Откуда

$$(u_n, y - x_n) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

где

$$u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{(n,i)} \in \sum_{i=1}^{p} A_i x_n = Ax_n.$$

То есть, $x_n \in VI(A,C)$.

Далее рассматриваем ситуацию, когда алгоритм 1 порождает бесконечную последовательность. Даже в случае $p = 1$, когда алгоритм 1 совпадает с классическим «субградиентным методом», на таком уровне общности не приходиться ожидать сходимости последовательности (x_n). Нашей основной целью является доказательство слабой сходимости в H последовательности чезаровских средних

$$z_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}.$$

Результаты такого типа традиционно называют теоремами эргодической сходимости [17].

Сделаем относительно операторов A_i следующее предположение:

$$\text{множества } \bigcup_{i=1}^{p} A_i x_n \text{ равномерно ограничены.} \tag{3}$$

Замечание 1. Предположение (3) — аналог использованного в [13, 14] «subgradient boundedness assumption».

Замечание 2. Более близком к алгоритмам [14] является следующий процесс.

1) *Задаем* $x_1 \in C$; $n := 1$.
2) *Начиная с* $y_{(n,0)} = x_n$ *последовательно находим элементы:*

$$y_{(n,i)} = P_C\left(y_{(n,i-1)} - \lambda_n u_{(n,i)}\right), \; u_{(n,i)} \in A_i y_{(n,i-1)}, \; i = \overline{1,p}.$$

3) *Если* $y_{(n,i)} = x_n$ *для всех* $i = \overline{1,p}$, *то СТОП и* $x_n \in VI(A,C)$. *Иначе переходим на шаг 4.*
4) *Полагаем*

$$x_{n+1} = y_{n,p},$$

$n := n+1$, *переходим на шаг 2.*

Для этого алгоритма справедливы утверждения о сходимости такого же характера, что и для подробно рассматриваемого алгоритма 1.

4. Основные неравенства

Анализ сходимости алгоритма начнем с доказательства двух важных неравенств для последовательностй (x_n) и (z_n).

Лемма 4. *Для порожденной алгоритмом 1 последовательности (x_n) и элемента $y \in C$ выполняется неравенство*

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \le \|x_n - y\|^2 + \frac{\lambda_n^2}{p} \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 - \frac{2\lambda_n}{p} (v, x_n - y), \tag{4}$$

где $v \in Ay$.

Доказательство. Для $y \in C$ и $y_{(n,i)}$ имеем

$$\left\|y_{(n,i)} - y\right\|^2 = \left\|P_C\left(x_n - \lambda_n u_{(n,i)}\right) - y\right\|^2 \le \left\|x_n - \lambda_n u_{(n,i)} - y\right\|^2 =$$
$$= \|x_n - y\|^2 + \lambda_n^2 \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 - 2\lambda_n \left(u_{(n,i)}, x_n - y\right).$$

Возьмем $v_i \in A_i y$. Благодаря монотонности оператора A_i, получаем

$$\left(u_{(n,i)}, x_n - y\right) \ge (v_i, x_n - y).$$

Следовательно,

$$\left\|y_{(n,i)} - y\right\|^2 \le \|x_n - y\|^2 + \lambda_n^2 \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 - 2\lambda_n (v_i, x_n - y). \tag{5}$$

Складывая умноженные на $\frac{1}{p}$ неравенства (5) и учитывая, что

$$\|x_{n+1} - y\|^2 = \left\|\frac{y_{(n,1)} - y}{p} + \ldots + \frac{y_{(n,p)} - y}{p}\right\|^2 \le$$
$$\le \frac{1}{p}\left\|y_{(n,p)} - y\right\|^2 + \ldots + \frac{1}{p}\left\|y_{(n,p)} - y\right\|^2,$$

получаем

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \le \|x_n - y\|^2 + \frac{\lambda_n^2}{p} \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 - \frac{2\lambda_n}{p} (v, x_n - y),$$

где $v = \sum_{i=1}^{p} v_i \in \sum_{i=1}^{p} A_i y = Ay$. □

Лемма 5. *Для порожденной алгоритмом 1 последовательности (x_n), последовательности средних (z_n) и элемента $x \in C$ выполняется неравенство*

$$\frac{\|x_{n+1} - y\|^2 - \|x_1 - y\|^2}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \le \frac{2}{p} (v, y - z_n) + \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(k,i)}\right\|^2}{p \sum_{k=1}^{n} \lambda_k}, \tag{6}$$

где $v \in Ay$.

Доказательство. Запишем неравенство леммы 4 в виде

$$\|x_{k+1}-y\|^2-\|x_k-y\|^2\le\frac{2}{p}\left(v,\lambda_k y-\lambda_k x_k\right)+\frac{\lambda_k^2}{p}\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(k,i)}\right\|^2. \tag{7}$$

Суммируя (7) по k от 1 до $n\in\mathbb{N}$ получаем

$$\|x_{n+1}-y\|^2-\|x_1-y\|^2\le\frac{2}{p}\left(v,\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)+$$

$$+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(k,i)}\right\|^2. \tag{8}$$

Поделив (8) на $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$, приходим к неравенству (6). □

5. Теорема об эргодической сходимости

Предположим, что $VI(A,C)\ne\emptyset$. Имеет место

Лемма 6. *Пусть (x_n) — порожденная алгоритмом 1 последовательность. Тогда для произвольного элемента $y\in VI(A,C)$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\|$. В частности, последовательность (x_n) ограничена.*

Доказательство. Воспользуемся леммами 2 и 4. В неравенстве (4) предположим, что $y\in VI(A,C)$. Получим

$$\|x_{n+1}-y\|^2\le\|x_n-y\|^2+\frac{\lambda_n^2}{p}\sum_{i=1}^{p}\left\|u_{(n,i)}\right\|^2, \tag{9}$$

поскольку $(v,x_n-y)\ge 0$, $v\in Ay$. Из неравенства (9), предположения (3) и условия $(\lambda_n)\in\ell_2$ следует существование $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y\|\in\mathbb{R}$. □

Ограниченность последовательности (x_n) влечет ограниченность последовательности средних (z_n). А из леммы 5 следует

Лемма 7. *Все слабые частичные пределы последовательности средних (z_n) принадлежат множеству $VI(A,C)$.*

Доказательство. Рассмотрим слабо сходящуюся подпоследовательность (z_{n_l}) последовательности (z_n). Пусть $z\in H$ — слабый предел (z_{n_l}). Ясно, что z принадлежит множеству C. Записав неравенство (6) для элементов z_{n_l}, после предельного перехода при $l\to\infty$, получим

$$(v,y-z)\ge 0\quad\forall y\in C\ \forall v\in Ay,$$

что в силу леммы 1 равносильно включению $z\in VI(A,C)$. □

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Справедливы утверждения:*

1) *если $VI(A,C)\ne\emptyset$, то последовательность средних по Чезаро (z_n) слабо сходится к некоторому элементу $x\in VI(A,C)$;*

2) *если* $VI(A,C) = \emptyset$, *то* $\|z_n\| \to +\infty$.

Доказательство. Из лемм 6 и 7 следует, что в случае $VI(A,C) \neq \emptyset$ для сгенерированной алгоритмом 1 последовательности (x_n) и для множества $F = VI(A,C)$ выполнены условия леммы 3. Следовательно, последовательность (z_n) слабо сходится к некоторому элементу $x \in VI(A,C)$.

Предположим, что $VI(A,C) = \emptyset$. Тогда $\|z_n\| \to +\infty$. Действительно, иначе последовательность (z_n) имеет слабую предельную точку z, которая, как было показано ранее, принадлежит множеству $VI(A,C)$. □

6. Сильная сходимость

При некоторых дополнительных условиях имеет место сильная сходимость последовательности (x_n).

Теорема 2. *Пусть один из операторов A_i сильно монотонный. Тогда порожденная алгоритмом 1 последовательность (x_n) сильно сходится к единственному решению (1).*

Доказательство. Пусть $z \in C$ — решение (1), A_d ($d \in \{1, ..., p\}$) — сильно монотонный оператор с константой $\mu > 0$. При $i \neq d$ имеем

$$\left\|y_{(n,i)} - y\right\|^2 \leq \|x_n - y\|^2 + \lambda_n^2 \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 - 2\lambda_n (v_i, x_n - y), \;\; y \in C, \;\; v_i \in A_i y.$$

Возьмем $v_d \in A_d y$. Благодаря сильной монотонности оператора A_d получаем

$$\left(u_{(n,d)}, x_n - y\right) \geq (v_d, x_n - y) + \mu \|x_n - y\|^2 .$$

Следовательно,

$$\left\|y_{(n,d)} - y\right\|^2 \leq \|x_n - y\|^2 + \lambda_n^2 \left\|u_{(n,d)}\right\|^2 - \\ - 2\lambda_n (v_d, x_n - y) - 2\mu\lambda_n \|x_n - y\|^2 .$$

Таким образом, имеем

$$\|x_{n+1} - y\|^2 \leq \|x_n - y\|^2 + \frac{\lambda_n^2}{p} \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 - \\ - \frac{2\lambda_n}{p} (v, x_n - y) - \frac{2\mu\lambda_n}{p} \|x_n - y\|^2 , \quad (10)$$

где $v = \sum_{i=1}^{p} v_i \in \sum_{i=1}^{p} A_i y = Ay$. Рассмотрев в (10) вариант $y = z$, приходим к неравенству

$$\frac{2\mu\lambda_n}{p} \|x_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 - \|x_{n+1} - z\|^2 + \frac{\lambda_n^2}{p} \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 . \quad (11)$$

Просуммировав (11) по n от 1 до N, получим

$$\frac{2\mu}{p} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \|x_n - z\|^2 \leq \|x_1 - z\|^2 - \|x_{N+1} - z\|^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n^2}{p} \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(n,i)}\right\|^2 .$$

Откуда следует
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|x_n - z\|^2 < +\infty.$$
Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$ и существует предел $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\|$, то имеем $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| = 0$. □

Теорема 3. *Пусть* $\mathrm{int} VI(A,C) \neq \emptyset$. *Тогда порожденная алгоритмом 1 последовательность* (x_n) *сильно сходится к решению (1).*

Доказательство. Возьмем элемент $y \in \mathrm{int} VI(A,C)$. Тогда существует шар $B(y,r) \subseteq VI(A,C)$, $r > 0$. Запишем для $y_n = y - r\frac{x_{n+1}-x_n}{\|x_{n+1}-x_n\|} \in B(y,r)$ неравенство (9):
$$\|x_{n+1} - y_n\|^2 \leq \|x_n - y_n\|^2 + \frac{\lambda_n^2}{p} \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(n,i)}\right\|^2.$$
Этому неравенству можно придать такой вид
$$2r\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|x_n - y\|^2 - \|x_{n+1} - y\|^2 + \frac{\lambda_n^2}{p} \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(n,i)}\right\|^2.$$
Для произвольных $m > n$ имеем
$$\|x_m - x_n\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \frac{\|x_n - y\|^2 - \|x_m - y\|^2}{2r} +$$
$$+ \frac{1}{2rp} \sum_{k=n}^{m-1} \lambda_k^2 \sum_{i=1}^{p} \left\|u_{(k,i)}\right\|^2.$$
Из предположения (3), $(\lambda_n) \in \ell_2$ и леммы 6 следует фундаментальнсть последовательности (x_n). Пусть $z \in H$ — сильный предел (x_n). Тогда последовательность средних (z_n) сильно сходится к z. Включение $z \in VI(A,C)$ следует из леммы 7. □

7. Заключительные замечания

Включая операцию усреднения в схему вычислений, получаем следующий явный алгоритм расщепления.

Алгоритм 2.

1) *Задаем* $x_1 = z_1 \in C$; $\sigma_1 := \lambda_1$, $n := 1$.
2) *Для* x_n *находим элементы:*
$$y_{(n,i)} = P_C\left(x_n - \lambda_n u_{(n,i)}\right), \;\; u_{(n,i)} \in A_i x_n, \;\; i = \overline{1,p}.$$
3) *Если* $y_{(n,i)} = x_n$ *для всех* $i = \overline{1,p}$, *то СТОП и* $x_n \in VI(A,C)$. *Иначе переходим на шаг 4.*

4) *Полагаем*

$$x_{n+1} = \frac{1}{p} y_{n,1} + \frac{1}{p} y_{n,2} + ... + \frac{1}{p} y_{n,p},$$
$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \lambda_{n+1},$$
$$z_{n+1} = \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}}\right) z_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} x_{n+1},$$

$n := n+1$, *переходим на шаг 2.*

Имеет место

Теорема 4. *Справедливы утверждения:*

1) *если* $VI(A,C) \neq \emptyset$, *то последовательность* (z_n) *слабо сходится к некоторому элементу* $x \in VI(A,C)$;
2) *если* $VI(A,C) = \emptyset$, *то* $\|z_n\| \to +\infty$.

Аналогичный теореме 4 результат справедлив для следующего явного последовательного алгоритма расщепления.

Алгоритм 3.

1) *Задаем* $x_1 = z_1 \in C$; $\sigma_1 := \lambda_1$, $n := 1$.
2) *Полагаем* $y_{(n,0)} = x_n$ *и последовательно находим элементы:*

$$y_{(n,i)} = P_C\left(y_{(n,i-1)} - \lambda_n u_{(n,i)}\right), \quad u_{(n,i)} \in A_i y_{(n,i-1)}, \quad i = \overline{1,p}.$$

3) *Если* $y_{(n,i)} = x_n$ *для всех* $i = \overline{1,p}$, *то СТОП и* $x_n \in VI(A,C)$. *Иначе переходим на шаг 4.*
4) *Полагаем*

$$x_{n+1} = y_{n,p},$$
$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \lambda_{n+1},$$
$$z_{n+1} = \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}}\right) z_n + \frac{\lambda_{n+1}}{\sigma_{n+1}} x_{n+1},$$

$n := n+1$, *переходим на шаг 2.*

Только вместо (3) для обоснования сходимости алгоритма 3 следует сделать такое предположение.

$$\text{множества } \bigcup_{i=1}^{p} A_i y_{(n,i-1)} \text{ равномерно ограничены.} \tag{12}$$

Интересной задачей является построение и обоснование схем расщепления для вариационных неравенств вида:

$$\text{найти } x \in \bigcap_k C_k : \ \exists u \in \sum_i A_i x \ \text{ и } \ (u, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in \bigcap_k C_k, \tag{13}$$

где C_k — замкнутые выпуклые множества. В случае $A_i \equiv 0$ задача (13) переходит в классическую задачу поиска элемента множества $\bigcap_k C_k$ (convex feasibility problem), имеющую богатую алгоритмику [21, 22, 23, 24]. Кроме того, актуальным вопросом является построение схем расщепления в случае, когда множества C_k в (13) являются множествами неподвижных точек для (квази)нерастягивающих операторов.

Литература

1. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. — Springer, 2011. — 408 + XVI p.
2. Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. — М.: Наука, 1989. — 400 с.
3. Konnov I. V. Combined relaxation methods for variational inequalities. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2001. — xi + 181 p.
4. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problem. V. 2. — New York: Springer, 2003. — xxxiii + 666 p.
5. Lions P.L., Mercier B. Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators // SIAM J. Numer. Anal. — 1979, V. 16, № 6. — P. 964–979.
6. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM J. Control Optim. — 2000. — V. 38. — P. 431–446.
7. Semenov V. V. On the Parallel Proximal Decomposition Method for Solving the Problems of Convex Optimization // Journal of Automation and Information Sciences. — 2010. — V. 42, № 4. — P. 14–18.
8. Денисов С. В. Параллельная схема декомпозиции для поиска седловой точки и равновесия Нэша // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3 (102). — С. 40–48.
9. Iiduka H. Decentralized Algorithm for Centralized Variational Inequalities in Network Resource Allocation // J. Optim. Theory Appl. — 2011. — 151. — P. 525–540.
10. Семенов В. В. Збіжність проксимального алгоритму для задачі дворівневої опуклої мінімізації // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2012. — № 4 (110). — С. 100–111.
11. Войтова Т. А., Денисов С. В., Семенов В. В. Альтернуючий проксимальний алгоритм для задачі дворівневої опуклої мінімізації // Доповіді НАН України. — 2012. — № 2. — С. 56–62.
12. Raguet H., Fadili J., Peyre G. A Generalized Forward-Backward Splitting // SIAM Journal on Imaging Sciences. — 2013. — V. 6(3). — P. 1199–1226.
13. Nedic A., Bertsekas D.P. Incremental subgradient methods for nondifferentiable optimization // SIAM J. Optim. — 2001. — V. 12, № 1. — P. 109–138.
14. Bertsekas D.P. Incremental proximal methods for large scale convex optimization // Math. Program., Ser. B. — 2011. — 129. — P. 163–195.
15. Bruck R. E. On the weak convergence of an ergodic iteration for the solution of variational inequalities for monotone operators in Hilbert space // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1977. — 61. — P. 159–164.
16. Немировский А. С., Юдин Д. Б. Чезаровская сходимость градиентного метода аппроксимации седловых точек выпукло-вогнутых функций // Доклады АН СССР. — 1978. — Т. 239, вып. 5. — 1056–1059.
17. Passty G. B. Ergodic Convergence to a Zero of the Sum of Monotone Operators in Hilbert Spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1979. — 72. — P. 383–390.

18. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2012. — № 2 (108). — С. 53–58.
19. Семенов В. В. Два методи апроксимації нерухомої точки фейєрівського оператора // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2013. — № 1 (111). — С. 46–56.
20. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция операторных включений с максимальными монотонными операторами // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2013. — № 2 (112). — С. 155–160.
21. Bauschke H. H., Borwein J. M. On projection algorithms for solving convex feasibility problems // SIAM Review. — 1996. — 38(3). — P. 367–426.
22. Combettes P. L. Hilbertian convex feasibility problem: Convergence of projection methods // Applied Mathematics and Optimization. — 1997. — V. 35, № 3. — P. 311–330.
23. Bauschke H. H. Projection algorithms: results and open problems // Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and their Applications (Haifa 2000); ed. D. Butnariu, Y. Censor, S. Reich. — Elsevier, 2001. — P. 11–22.
24. Bauschke H. H., Luke D. R., Phan H. M., Wang X. Restricted normal cones and the method of alternating projections: theory // Set-Valued and Variational Analysis. — 2013. — 21. — P. 431–473.

Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина, e-mail: semenov.volodya@gmail.com

Поступила 17.05.2013