

УДК 519.71

## МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ РАДІОАКТИВНОГО ТРИТІЯ (TRITIUM 3H) ТА НЕРАДІОАКТИВНОГО ГЕЛІЯ-3 (HELIUM-3)

О. Ю. Грищенко, Д. А. Ключин, В. В. Оноцький,  
Л. І. Потапенко, Г. М. Стешенко

**РЕЗЮМЕ.** В даній роботі було розглянуто задачу по ідентифікації параметрів джерел радіоактивного забруднення з врахуванням явища філіації, знаючи концентрації забруднення на досліджуваній території. Було проведено моделювання поширення радіоактивного забруднення на досліджуваній території з використанням псевдореальних даних.

**Ключові слова:** концентрація забруднення, ДС-алгоритм, задача оптимального керування, спряжена задача.

### ВСТУП

Розв'язання задачі ідентифікації параметрів джерел суміші радіонуклідів, структурованих за віком, за допомогою варіаційного методу пов'язане із розв'язанням прямої та спряженої початково-крайових задач[5]. До того ж з формальної точки зору задача ідентифікації зосереджених джерел еквівалентна задачі узагальненого оптимального керування. Тому для розв'язання нашої варіаційної задачі нам необхідно розв'язати задачу оптимального керування системою[3, 4, 6, 7].

Математична модель переносу суміші радіонуклідів в пористому середовищі описана в роботі Шоке (Choquet) і Цимермана (Zimmerman) [13]. Слід зауважити, що моделюванню радіоактивного забруднення ґрунтових вод розчинами сумішей ізотопів із урахуванням трансмутації присвячено доволі мало робіт. В першу чергу слід назвати роботи Шоке (Choquet) [11, 12, 13], а також Дугласа (Douglas) і Спаньоло (Spagnuolo) [14].

Ідею двокрокового явно-неявного чисельного методу ще в 1962 році запропонував Шелдон для ітераційного розв'язування рівняння Пуассона. Грищенко О. Ю. поширив її для систем гіперболічних рівнянь, лінійних та нелінійних рівнянь переносу та систем рівнянь газової динаміки [1]. Для рівнянь параболічного типу Самарський [10] поставив проблему та отримали ґрунтовні результати про необхідні та достатні умови стійкості симетризованих різницевих схем, що не є самоспряженими, але приводяться до схем із симетричними операторами, зокрема, вибором спеціальних норм.

1. МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ РАДІОАКТИВНОГО ЗАБРУДНЕННЯ

**Постановка прямої задачі.** Нехай радіоактивна суміш складається з двох ізотопів: радіоактивного трітія (tritium 3H) та нерадіоактивного гелія-3 (helium-3), причому період піврозпаду трітія у гелій складає 4500 днів. Розглядаємо модель, запропоновану Дугласом (Douglas) та Спаньоло (Spagnuolo) [14], що описує процес переносу суміші через пористе середовище.

Позначимо стан системи  $(u, v)$ , де  $u = u(t, \xi_1, \xi_2)$ ,  $v = v(t, \xi_1, \xi_2)$ . Функції  $u$  та  $v$  визначені в циліндричній області  $Q = (0, T) \times \Omega$ , де  $\Omega \subset R^2$  обмежена зв'язна область з регулярною границею  $\partial\Omega$ . Стан  $(u, v)$  системи, де  $u$  — концентрація трітія,  $v$  — концентрація гелія, описується системою параболічних рівнянь:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{m=1}^2 \left( k_m^{(1)}(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_m^2} \right) + \sum_{m=1}^2 \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( c_m^{(1)}(\xi) u \right) + a_1(\xi) u = f(t, \xi), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{m=1}^2 \left( k_m^{(2)}(\xi) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_m^2} \right) + \sum_{m=1}^2 \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left( c_m^{(2)}(\xi) v \right) + a_2(x) (\xi) v - a_1(x) u = 0. \quad (2)$$

В операторному вигляді (1)–(2) можна переписати таким чином:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D_1 u + C_1 u + q_1 u = f,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - D_2 v + C_2 v + a_2 v - a_1 u = 0,$$

де  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Omega$ ,  $(t, \xi) \in Q$ ,  $a_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2$  — коефіцієнти розпаду, філіації;  $D_i$  — оператори дифузійного переносу, самоспряжені та додатньо визначені:  $D_i = D_i^* \geq k_0^{(i)} E$ , де  $E$  — тотожній оператор,  $C_i$  — оператори конвективного переносу,  $C^{(i)} = -C^{(i)*}$ ,  $c_m^{(i)}$  — швидкість переносу  $i$ -го ізотопу вздовж осі  $Ox_m$ . Вважаємо, що середовище є нестислим, тому маємо:

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial c_k^{(i)}}{\partial x_k}(\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega,$$

$$f(t, \xi) = -\delta(\xi) V(t),$$

де  $V(t) = (V_1(t), V_2(t), \dots, V_p(t))$  — вектор невідомих інтенсивностей,  $\delta(x) = (\delta(x - r_1), \delta(x - r_2), \dots, \delta(x - r_p))$  — вектор  $\delta$ -функцій Дірака,  $r_i$  — відомі положення джерел забруднень.

Задані початкові та граничні умови:

$$u|_{t=0} = \varphi_0^{(1)}(\xi),$$

$$v|_{t=0} = \varphi_0^{(2)}(\xi),$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0^{(1)}(\xi), \quad (3)$$

$$u|_{\xi \in \partial\Omega} = 0.$$

Використовуючи методику, описану в [8, 9], переходимо до задачі оптимального керування, що полягає в мінімізації функціоналу

$$J_\alpha(V) = \sum_{m=1}^M \int_0^T \left( (\tilde{u}(t, V) - \varphi_m^{(1)}(t))^2 + (\tilde{v}(t, V) - \varphi_m^{(2)}(t))^2 \right) dt + \alpha \|V\|^2, \quad (4)$$

$\varphi_m^{(i)}(t)$  — значення концентрації забруднень в точках спостереження  $z_m$ ,  $m = \overline{1, \dots, M}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\alpha$  — параметр регуляризації [10], що вважається відомим і підбирається експериментально з врахуванням похибки спостережень  $\Delta\varphi_m^{(i)}$ ;

$$\tilde{u}(t, V) = \int_{\Omega} g_m(x) u(t, x, V) dx, \quad \tilde{v}(t, V) = \int_{\Omega} g_m(x) v(t, x, V) dx,$$

$g_m(x) = \frac{\chi\omega_m}{\text{diam}\omega_m}$  — функція усереднення в деякому околі  $\varpi_m$  точки спостереження  $z_m$  [6].

Спряжена задача для постановки описаної виразами (1)–(3) має вигляд

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{m=1}^2 \left( k_m^{(1)}(\xi) \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_m^2} \right) - \sum_{m=1}^2 \frac{\partial}{\partial\xi_m} \left( c_m^{(1)}(\xi)\psi \right) + a_1\psi - a_1\eta = \\ = 2 \sum_{m=1}^M \int_0^T \left( \tilde{u}(t, V) - \varphi_m^{(1)}(t) \right)^2 dt, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial\eta}{\partial t} + \sum_{m=1}^2 \left( k_m^{(2)}(\xi) \frac{\partial^2\eta}{\partial\xi_m^2} \right) - \sum_{m=1}^2 \frac{\partial}{\partial\xi_m} \left( c_m^{(1)}(\xi)\eta \right) + a_2\eta = \\ = 2 \sum_{m=1}^M \int_0^T \left( \tilde{v}(t, V) - \varphi_m^{(2)}(t) \right)^2 dt, \end{aligned} \quad (6)$$

з наступними початково-крайовими умовами:

$$\psi|_{t=T} = 0; \psi|_{\xi \in \partial\Omega} = 0,$$

$$\zeta|_{t=T} = 0; \zeta|_{\xi \in \partial\Omega} = 0, \quad (7)$$

Ітераційний процес має вигляд

$$V_{i,n}^{k+1} = V_{i,n}^k - s_k(\psi^{(i),k}(r_i, \tau n) - \alpha V_{i,n}^k), \quad (8)$$

де  $k$  — номер ітерації,  $i = \overline{1, p}$ ,  $n = \overline{1, N_t}$ ,  $N_t = [T/\tau]$ ,  $\alpha = 0.001$ .

Як відомо, процес збіжний при  $s_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  та  $\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \infty$ .

## 2. ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛІ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ РАДІОАКТИВНОГО ЗАБРУДНЕННЯ

Застосуємо описаний вище метод до нашої конкретної задачі для її чисельної реалізації. На кожній ітерації послідовно розв'язуємо прямі задачі (1), (2), з врахуванням умов (3) для основного стану системи та задачі (5)–(7) для спряженого стану з використанням ДС-алгоритму [1, 2].

Розглянемо загальний випадок, коли  $\Omega = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset R^2$  — 2-вимірний паралелепіпед. Область  $\Omega$  покриваємо сіткою:

$$\Omega_{h,\tau} = \{(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}, t) | x_{s,k_s} = a_s + k_s h_s,$$

$$t = n\tau, k_s = \overline{0, M_s}, n = \overline{0, N_t}, h_s = (b_s - a_s)/M_s, s = \overline{1, 2}, \tau > 0\},$$

яку розбиваємо на дві підмножини:  $\Omega_{h,\tau}^{(1,n)}$  та  $\Omega_{h,\tau}^{(2,n)}$ . До першої з них відносимо всі точки  $(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}, t_n) \in \Omega_{h,\tau}$ , для яких  $(k_1 + k_2 + n)$  — непарне, а до другої —  $(k_1 + k_2 + n)$  — парне. Покладемо

$$k_1 \pm 1 = (k_1 \pm 1, k_2), k_2 \pm 1 = (k_1, k_2 \pm 1), k = (k_1, k_2).$$

На внутрішніх точках сіткової множини  $\Omega_{h,\tau}^{(1,n+1)}$  задамо сімейство різницьових схем

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \tau (C_1 u_k^n - D_1 u_k^n + a_1 u_k^n) + \tau F_k^n V_k^n, \quad (9)$$

а на внутрішніх точках множини  $\Omega_{h,\tau}^{(2,n+1)}$  —

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \tau (C_1 u_k^{n+1} - D_1 u_k^{n+1} + a_1 u_k^{n+1}) + \tau F_k^{n+1} V_k^{n+1}. \quad (10)$$

В свою чергу  $C_1 u_k^n$  та  $D_1 u_k^n$  вираховуємо за формулами

$$C_1 u_k^n = \sum_{s=1}^2 c_{s,k_s}^{(1)} \frac{u_{k_s+1}^n - u_{k_s-1}^n}{2h_s},$$

$$D_1 u_k^n = \sum_{s=1}^2 k_{k_s}^{(1)} \frac{u_{k_s+1}^n - 2u_k^n + u_{k_s-1}^n}{h_s^2},$$

$$F_k^{n+1} V_k^{n+1} = \begin{cases} V(\tau n), & \text{якщо точка співпадає з джерелом,} \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Схеми доповнюються початковою умовою

$$u_k^0 = \varphi_0^{(1)}(k_1 h_1, k_2 h_2), k_s = \overline{0, M_s}, s = \overline{1, 2},$$

та граничними умовами  $u_k^{n+1} = 0$ , де  $k_s = 0$  або  $k_s = M_s, s = \overline{1, 2}$ .

На внутрішніх точках сіткової множини  $\Omega_{h,\tau}^{(1,n+1)}$  задамо сімейство різницьових схем

$$v_k^{n+1} = v_k^n - \tau (C_2 v_k^n - D_2 v_k^n + a_2 v_k^n) + \tau a_1 u_k^n, \quad (11)$$

а на внутрішніх точках множини  $\Omega_{h,\tau}^{(2,n+1)}$  —

$$v_k^{n+1} = v_k^n - \tau (C_2 v_k^{n+1} - D_2 v_k^{n+1} + a_2 v_k^{n+1}) + \tau a_1 u_k^{n+1}. \quad (12)$$

$C_2 u_k^n$  та  $D_2 u_k^n$  вираховуємо за формулами

$$C_2 v_k^n = \sum_{s=1}^2 c_{s,k_s}^{(2)} \frac{v_{k_s+1}^n - v_{k_s-1}^n}{2h_s},$$

$$D_2 v_k^n = \sum_{s=1}^p k_{k_s}^{(2)} \frac{v_{k_s+1}^n - 2v_k^n + v_{k_s-1}^n}{h_s^2}.$$

Схеми доповнюються початковою умовою

$$v_k^0 = \varphi_0^{(2)}(k_1 h_1, k_2 h_2), k_s = \overline{0, M_s}, s = \overline{1, 2}, \quad (13)$$

та граничними умовами

$$v_k^{n+1} = 0, \text{ де } k_s = 0 \text{ або } k_s = M_s, s = \overline{1, 2}. \quad (14)$$

Розв'язок задачі знаходимо послідовно при  $n = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1$  таким чином: знаходимо  $u_k^{n+1}$ , використовуючи спочатку явне різницеве рівняння (9) в усіх точках множини  $\Omega_{h,\tau}^{(1,n+1)}$ , а потім неявне (10) в усіх точках множини  $\Omega_{h,\tau}^{(2,n+1)}$ , далі, використовуючи вже знайдене значення  $u_k^{n+1}$ , знаходимо  $v_k^{n+1}$ , використовуючи явне різницеве рівняння (11) в усіх точках множини  $\Omega_{h,\tau}^{(1,n+1)}$ , а потім неявне (12) в усіх точках множини  $\Omega_{h,\tau}^{(2,n+1)}$ .

Аналогічно для спряженого стану схеми ДС-алгоритму мають такий вигляд. Зокрема для функції  $\psi$  з рівняння (5)

$$\psi_k^{n-1} = \psi_k^n + \tau (C_1 \psi_k^n + D_1 \psi_k^n - a_1 \psi_k^{i,n}) + \tau a_1 \eta_k^n + \tau Z_k^{1,n},$$

$$(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}, \dots, x_{p,k_p}, t_{n-1}) \in \Omega_{h,\tau}^{(1,n-1)}, \quad (15)$$

$$\psi_k^{n-1} = \psi_k^n + \tau (C_1 \psi_k^{n-1} + D_1 \psi_k^{n-1} - a_1 \psi_k^{n-1}) + \tau q_1 \eta_k^{1,n-1} + \tau Z_k^{1,n-1},$$

$$(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}, t_{n-1}) \in \Omega_{h,\tau}^{(2,n-1)}, \quad (16)$$

де

$$Z_k^{1,n} = 2\chi_h(u_k^n - \varphi^{(1)}(t_n)).$$

В свою чергу  $\chi_h(x)$  приймає значення

$$\chi_h(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \sum_{m=1}^M \int_{D_0} \delta(x - z_m) dx,$$

та виконуються умови

$$D_0 = [-h_1, h_1] \times [-h_2, h_2],$$

$$\psi_k^T = 0, k_s = \overline{0, M_s}, s = \overline{1, 2}, \quad (17)$$

$$\psi_k^{n-1} = 0,$$

де  $k_s = 0$  або  $k_s = M_s, s = \overline{1, 2}$ .

Зокрема для функції  $\eta$  з рівняння (6):

$$\eta_k^{n-1} = \eta_k^n + \tau (C_2 \eta_k^n + D_2 \eta_k^n - q_2 \eta_k^n) + \tau Z_k^{2,n}, \quad (18)$$

$$(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}, t_{n-1}) \in \Omega_{h,\tau}^{(1,n-1)},$$

$$\eta_k^{n-1} = \eta_k^n + \tau (C_2 \eta_k^{n-1} + D_2 \eta_k^{n-1} - q_2 \eta_k^{n-1}) + \tau Z_k^{2,n-1}, \quad (19)$$

$$(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}, t_{n-1}) \in \Omega_{h,\tau}^{(2,n-1)},$$

де:

$$Z_k^{2,n} = 2\chi_h(v_k^n - \varphi^{(2)}(t_n)),$$

$$\chi_h(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \sum_{m=1}^M \int_{D_0} \delta(x - z_m) dx,$$

та виконуються наступні умови

$$\zeta_k^T = 0, k_s = \overline{0, \dots, M_s}, s = 1, 2, \quad (20)$$

$$\zeta_k^{n-1} = 0, \text{ де } k_s = 0 \text{ або } k_s = M_s, s = \overline{1, 2}. \quad (21)$$

За цими схемами розв'язок знаходиться послідовно починаючи з  $n = N_t, N_t - 1, \dots, 1$  таким чином: знаходимо  $\zeta_k^{n-1}$ , використовуючи спочатку явне різницеве рівняння (18) в усіх точках множини  $\Omega_{h,\tau}^{(1,n-1)}$ , а потім неявне (19) в усіх точках множини  $\Omega_{h,\tau}^{(2,n-1)}$ , далі, використовуючи вже знайдене значення  $\zeta_k^{n-1}$ , знаходимо  $\psi_k^{n-1}$ , використовуючи явне різницеве рівняння (15) в усіх точках множини  $\Omega_{h,\tau}^{(1,n-1)}$ , а потім неявне (16) в усіх точках множини  $\Omega_{h,\tau}^{(2,n-1)}$ .

### 3. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Нехай задані наступні дані для проведення обчислювального експерименту. Область дослідження  $\Omega = [0, 500] \times [0, 300]$  є прямокутною областю розмірами 500 на 300 метрів. Часовий проміжок, на якому відбувається моделювання  $T = 920$  часових кроків. Коефіцієнти системи приймають наступні значення:

$$k_m^{(1)} = 4.755, c_m^{(1)} = 3.17,$$

$$k_m^{(2)} = 10^{-5}, c_m^{(2)} = 1,$$

$$q_1 = 1/4500, q_2 = 0.$$

На всій області  $\Omega$  ми маємо 24 точки спостереження за нашою системою (свердловини для проведення контрольних замірів). Дані про місцезонаження точок спостереження наведені нижче в таблиці 1. Так  $N$  це порядковий номер свердловини,  $x$  та  $y$  координати її положення (в метрах) відповідно.

Таблиця 1. Координати точок спостереження.

<b>N</b>	<b>x</b>	<b>y</b>
1	107.50	186.50
2	148.00	191.00
3	200.00	220.00
4	140.00	110.00
5	148.50	181.00
6	213.50	191.50
7	276.00	218.00
8	193.50	104.00
9	220.00	140.00
10	250.00	180.00
11	484.00	239.00
12	302.50	127.50
13	330.00	171.50
14	341.00	216.00
15	146.50	227.50
16	345.00	128.00
17	361.00	195.00
18	388.50	218.00
19	380.00	165.50
20	378.50	126.50
21	425.00	105.00
22	448.50	160.50
23	441.50	214.00
24	112.50	230.00

Також у нас за умовою є 92 джерела, з їх координатами (в метрах) та потужністю. Дані про них наведені в таблиці 2.

Таблица 2. Опис джерел забруднення.

N	x	y	V		N	x	y	V
1	160.0	170.0	1252.1		47	190.0	185.0	280.64
2	165.0	170.0	1252.1		48	195.0	185.0	280.64
3	170.0	170.0	1252.1		49	200.0	185.0	215.88
4	175.0	170.0	1252.1		50	205.0	185.0	215.88
5	180.0	170.0	280.64		51	210.0	185.0	215.88
6	185.0	170.0	280.64		52	215.0	185.0	215.88
7	190.0	170.0	280.64		53	220.0	185.0	215.88
8	195.0	170.0	280.64		54	160.0	190.0	1252.1
9	200.0	170.0	215.88		55	165.0	190.0	1252.1
10	205.0	170.0	215.88		56	170.0	190.0	1252.1
11	210.0	170.0	215.88		57	175.0	190.0	1252.1
12	215.0	170.0	215.88		58	180.0	190.0	280.64
13	220.0	170.0	215.88		59	185.0	190.0	280.64
14	160.0	175.0	1252.1		60	190.0	190.0	280.64
15	165.0	175.0	1252.1		61	195.0	190.0	280.64
16	170.0	175.0	1252.1		62	200.0	190.0	215.88
17	175.0	175.0	1252.1		63	205.0	190.0	215.88
18	180.0	175.0	280.64		64	210.0	190.0	215.88
19	185.0	175.0	280.64		65	215.0	190.0	215.88
20	190.0	175.0	280.64		66	220.0	190.0	215.88
21	195.0	175.0	280.64		67	160.0	195.0	1252.1
22	200.0	175.0	215.88		68	165.0	195.0	1252.1
23	205.0	175.0	215.88		69	170.0	195.0	1252.1
24	210.0	175.0	215.88		70	175.0	195.0	1252.1
25	215.0	175.0	215.88		71	180.0	195.0	280.64
26	220.0	175.0	215.88		72	185.0	195.0	280.64
27	150.0	180.0	300.00		73	190.0	195.0	280.64
28	160.0	180.0	1252.1		74	195.0	195.0	280.64
29	165.0	180.0	1252.1		75	200.0	195.0	215.88
30	170.0	180.0	1252.1		76	205.0	195.0	215.88
31	175.0	180.0	1252.1		77	210.0	195.0	215.88
32	180.0	180.0	280.64		78	215.0	195.0	215.88
33	185.0	180.0	280.64		79	220.0	195.0	215.88
34	190.0	180.0	280.64		80	160.0	200.0	1252.1
35	195.0	180.0	280.64		81	165.0	200.0	1252.1
36	200.0	180.0	215.88		82	170.0	200.0	1252.1
37	205.0	180.0	215.88		83	175.0	200.0	1252.1
38	210.0	180.0	215.88		84	180.0	200.0	280.64
39	215.0	180.0	215.88		85	185.0	200.0	280.64
40	220.0	180.0	215.88		86	190.0	200.0	280.64
41	160.0	185.0	1252.1		87	195.0	200.0	280.64
42	165.0	185.0	1252.1		88	200.0	200.0	215.88
43	170.0	185.0	1252.1		89	205.0	200.0	215.88
44	175.0	185.0	1252.1		90	210.0	200.0	215.88
45	180.0	185.0	280.64		91	215.0	200.0	215.88
46	185.0	185.0	280.64		92	220.0	200.0	215.88



Для моделювання були використані наступні значення для параметрів ДС-алгоритму:

$$h_x = 5, h_y = 5, \tau = 0,5.$$

На рисунку 1 зображено значення функціоналу якості, що використовувався в нашій задачі, на 20 ітераціях.

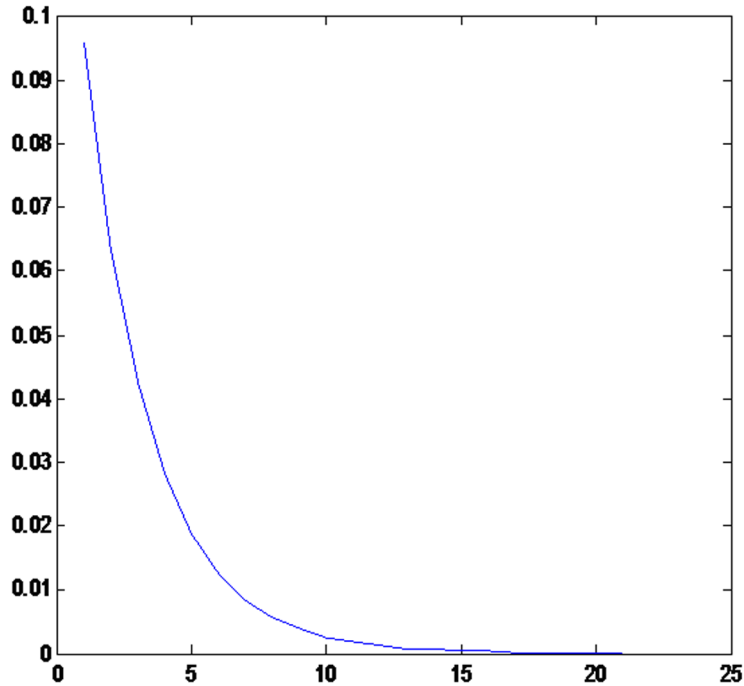


Рис. 1. Функціонал якості на 20 ітераціях

#### ВИСНОВКИ

В даному розділі авторами була розглянута практична задача розповсюдження радіоактивної суміші ізотопів: радіоактивного тритію (tritium  $^3\text{H}$ ) та нерадіоактивного гелію-3 (helium-3). Було продемонстровано практичну значущість розроблених методів на прикладі чисельного моделювання розповсюдження радіоактивної суміші радіоактивного тритію (tritium  $^3\text{H}$ ) та нерадіоактивного гелію-3 (helium-3) та ідентифікації їх точкових джерел.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Грищенко О. Ю. Про один двокроковий скінченно-різницевий алгоритм моделювання процесів переносу // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Кібернетика. — 2006. — №7. — С. 7–10.

2. Грищенко О. Ю., Ключин Д. А., Оноцкий В. В., Стещенко Г. М. Идентификация точковых структурированных за вѣком джерел забруднень з використанням двокрокового симетризованого алгоритму // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2011. — Вып. 104. — С. 40–48.
3. Ключин Д. А., Куцан А. А., Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И. Обобщенное решение некоторых операторных уравнений в банаховых пространствах // Журн. обчисл. та прикл. матем. — №1 (81). — 1997.— С. 93–99.
4. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами. — К. Наукова думка, 1998. — 472 с.
5. Пененко В. В. Вариационное усвоение данных в реальном времени // Вычислительные технологии. Специальный выпуск, часть 1. — 2005. — Т. 10. — С. 9–20.
6. Семенов В. В. Про глобально оптимальні керування в нелінійних операторних системах // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. — 2003. — №4. — С. 294–296.
7. Стеля О. Б., Тригуб О. С. Чисельна процедура відтворення невідомих параметрів джерел для задач масопереносу // Наукові записки. Комп'ютерні науки / Національний університет "Києво-Могилянська академія". — 2000. — Т. 18. — С. 40–46.
8. Стещенко Г. М. Дослідження існування і єдності розв'язку для параболічних систем з сингулярними правими частинами // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2010. — Вип. 1. — С. 144–151.
9. Стещенко Г. М. Дослідження існування і єдності розв'язку для параболічних систем з сингулярними правими частинами // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2010. — №2.— С. 172–179.
10. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Аддитивные схемы для задач математической физики // М.: Наука. — 2001. — 345 с.
11. Choquet C. Existence result for a radionuclide transport model with unbounded viscosity // Journal of Mathematics and Fluid Mechanics. — 2004. — V. 6. — P. 365–388.
12. Choquet C. Radionuclide transport model with wells // Asymptotic Analysis. — 2004. — V. 37. — P. 57–78.
13. Choquet C., Zimmermann S. Study of a finite volume-finite element scheme for a nuclear transport model // Mode of access: WWW.URL: [arxiv.org/abs/0704.1286](http://arxiv.org/abs/0704.1286). — Last access: 2009.
14. Douglas J., Spagnuolo A. The transport of nuclear contamination in fractured porous media // Journal of Korean Mathematical Society. — V. 38. — P. 723–761.

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ, КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА, вул., ВОЛОДИМИРСЬКА 64, КИЇВ, 01601,  
УКРАЇНА

Надійшла 15.10.13